VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



JAMES CLERK MAXWELL

A TREATISE ON ELECTRICITY AND MAGNETISM

Volume II

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ

В ДВУХ ТОМАХ

Том II

ПЕРЕВОД:
Б. М. БОЛОТОВСКОГО, И. Л. БУРШТЕЙНА,
М. А. МИЛЛЕРА, Е. В. СУВОРОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ:
доктора физико-математических наук
М. Л. ЛЕВИНА,
доктора физико-математических наук
М. А. МИЛЛЕРА,
кандидата физико-математических наук
Е. В. СУВОРОВА



МОСКВА «НАУКА» 1989

УДК 537.8

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком С. *И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А. А. Баев (председатель), *И. Е. Дзялошинский*, *А. Ю. Ишлинский*, *С. П. Капица*, *И. Л. Кнунянц*, *С. Р. Микулинский*, *Д. В. Ознобишин* (ученый секретарь), *Л. С. Полак*, *Я. А. Смородинский*, *А. С. Спирин*, *И. Т. Фролов* (заместитель председателя), *А. Н. Шамин*, *И. Р. Шафаревич*, *А. Л. Яншин*

Дж. К. Максвелл. **Трактат об электричестве и магнетизме.** В двух томах. Т. II. М.: Наука, 1989.
ISBN 5—02—000042—6

Второй том «Трактата» посвящен магнетизму и электромагнетизму (в I том Максвелл включил электростатику и электрокинематику — электрические токи). Именно в этом (II томе) Максвелл обосновывает необходимость введения тока смещения, приводит полную систему уравнений электромагнитного поля, указывает на существование электромагнитных волн в вакууме и отождествляет свет с этими волнами.

В Приложении приводятся краткие комментарии к обоим томам «Трактата», послесловия редакторов, а также список опубликованных в СССР монографий по электродинамике.

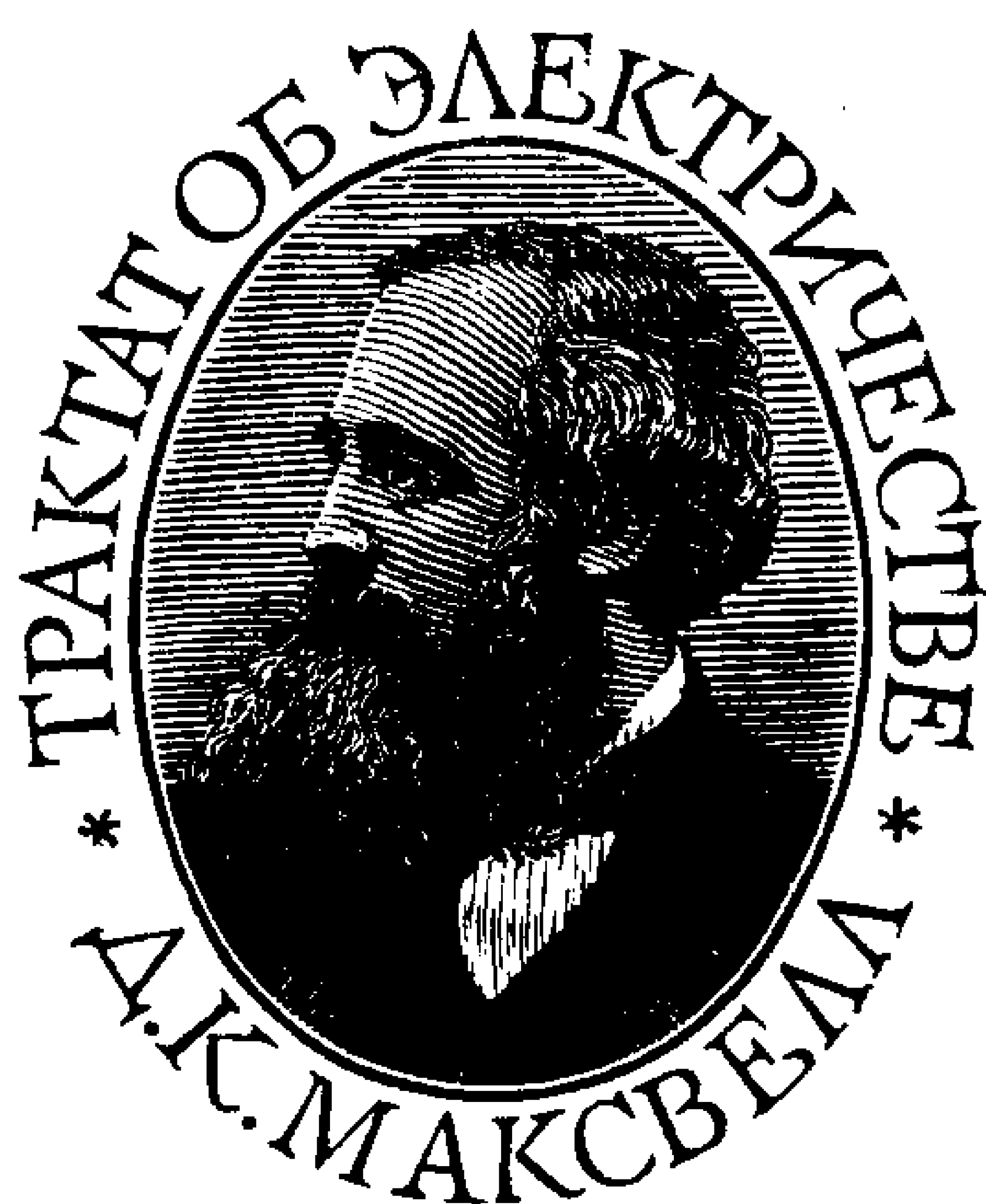
Издание рассчитано на физиков, историков науки и читателей, желающих ознакомиться с трудом, давно ставшим классическим и впервые полностью издающимся на русском языке.

Рецензент:
академик *А. В. Гапонов-Грехов*

М $\frac{1604050000\text{-}235}{055(02)\text{-}89}$ 116—89, кн. 2

ISBN 5—02—000042—6

© Издательство «Наука», 1989


ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ
Д.К.МАКСВЕЛЛ

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ III
МАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МАГНЕТИЗМА

371. Свойства магнита, на который воздействует Земля 23
372. Определение оси магнита и направления магнитной силы.. 23
373. Действие магнитов друг на друга. Закон магнитной силы.. 24
374. Определение магнитных единиц и их размерностей.. 24
375. Природа доказательства закона магнитной силы.. 25
376. Магнетизм как математическая величина.. 25
377. Количества противоположных сортов магнетизма в магните всегда точно равны.. 25
378. Эффекты разламывания магнита.. 26
379. Магнит составлен из частиц, каждая из которых является магнитом 26
380. Теория магнитной «материи».. 26
381. Намагниченность является по природе вектором.. 27
382. Значение термина «Магнитная Поляризация» 28
383. Свойства магнитной частицы.. 28
384. Определение магнитного момента, интенсивности намагниченности и составляющих намагниченности.. 29
385. Потенциал намагниченного элемента объема.. 29
386. Потенциал магнита конечного размера. Два выражения этого потенциала, соответствующие теории поляризации и теории магнитной «материи» 30
387. Исследование действия одной магнитной частицы на другую.. 31
388. Частные случаи.. 32
389. Потенциальная энергия магнита в произвольном поле силы.. 34
390. О магнитном моменте и оси магнита.. 35
391. Разложение потенциала магнита по сферическим гармоникам.. .. 36
392. Центр магнита, главные и вторичные оси, проходящие через центр 37
393. Северный конец магнита в этом трактате — это конец, показывающий на север, а южный конец — тот, который показывает на юг. Борейный магнетизм, по предположению, существует около северного полюса Земли и около южного конца магнита. Аустральный магнетизм принадлежит южному полюсу Земли и северному концу магнита. Аустральный магнетизм считается положительным.. .. 38
394. Направление магнитной силы — это такое направление, в котором стремится двигаться аустральный магнетизм, т. е. от севера к югу, и оно принято за положительное направление магнитных линий силы. Про магнит говорят, что он намагничен от южного конца к северному 39

ГЛАВА II
МАГНИТНАЯ СИЛА И МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

395. Магнитная сила, определенная через магнитный потенциал.. 39
396. Магнитная сила в цилиндрической полости магнита, однородно намагниченного параллельно оси цилиндра.. 40
397. Приложение к произвольному магниту.. 40
398. Вытянутый цилиндр. Магнитная сила 40
399. Тонкий диск. Магнитная индукция 41
400. Связь между магнитной силой, магнитной индукцией и намагниченностью.. 41
401. Линейный интеграл от магнитной силы, или магнитный потенциал 42
402. Поверхностный интеграл от магнитной индукции.. 42
403. Соленоидальное распределение магнитной индукции.. 43
404. Поверхности и трубки магнитной индукции.. 44
405. Вектор-потенциал магнитной индукции.. 44
406. Соотношения между скалярным потенциалом и вектор-потенциалом.. 46

ГЛАВА III
МАГНИТНЫЕ СОЛЕНОИДЫ И ОБОЛОЧКИ

407. Определение магнитного соленоида.. 47
408. Определение сложного соленоида и выражение для его потенциала в произвольной точке.. 48
409. Потенциал магнитной оболочки в произвольной точке есть произведение ее мощности на телесный угол с вершиной в этой точке, опирающийся на границу оболочки.. 48
410. Другой метод доказательства.. 49
411. Потенциал в точке на положительной стороне оболочки мощности Ф превышает потенциал ближайшей точки на отрицательной стороне на $4\pi\Phi$.. 49
412. Слоистое распределение магнетизма.. 50
413. Сложное слоистое распределение магнетизма.. 50
414. Потенциал соленоидального магнита.. 50
415. Потенциал слоистого магнита.. 50
416. Вектор-потенциал слоистого магнита.. 51
417. О телесном угле с вершиной в данной точке, опирающемся на замкнутую кривую.. 52
418. Телесный угол, выраженный через длину кривой на сфере.. 52
419. Телесный угол, найденный двойным линейным интегрированием.... 53
420. П, выраженное как определитель.. 54
421. Телесный угол является циклической функцией.. 54
422. Теория вектор-потенциала замкнутой кривой.. 55
423. Потенциальная энергия магнитной оболочки, помещенной в магнитное поле.. 56

ГЛАВА IV
ИНДУЦИРОВАННАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ

424. Когда тело под действием магнитной силы само становится намагниченным, это явление называется магнитной индукцией.. 57
425. Магнитная индукция в различных веществах.. 58

426. Определение коэффициента индуцированной намагниченности.. .. 59
427. Математическая теория магнитной индукции.. 60
428. Метод Фарадея.. 62
429. Случай тела, окруженного магнитной средой.. 64
430. Физическая теория Пуассона, объясняющая причины индуцированного магнетизма.. 65

ГЛАВА V

ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

431. Теория полой сферической оболочки.. 67
432. Случай, когда $\varkappa$ велико.. 68
433. . . ., когда $i=1$.. 68
434. Соответствующий случай в двух измерениях. (Рис. XV).. 69
435. Случай твердой сферы, коэффициенты намагниченности которой различны в разных направлениях.. 70
436. Девять коэффициентов, сведенные к шести. (Рис. XVI).. 71
437. Теория эллипсоида, на который действует постоянная магнитная сила.. 72
438. Случаи очень плоского и очень длинного эллипсоидов.. 75
439. Постановка задач, решенных Нейманом, Кирхгофом и Грином.. .. 77
440. Метод приближения к решению общей задачи, когда коэффициент $\varkappa$ очень мал.. 78
441. О корабельном магнетизме 78

ГЛАВА VI

ВЕБЕРОВСКАЯ ТЕОРИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНЕТИЗМА

442. Эксперименты, указывающие на максимальную намагниченность .. 82
443. Веберовская математическая теория временной намагниченности 83
444. Видоизменение теории для учета остаточной намагниченности 86
445. Объяснение явлений при помощи видоизмененной теории.. 88
446. Намагничивание, размагничивание и перемагничивание.. 90
447. Влияние намагниченности на размеры магнита.. 91
448. Эксперименты Джоуля.. 92

ГЛАВА VII

МАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

449. Подвешивание магнита.. 93
450. Методы наблюдения при помощи зеркала и шкалы. Фотографический метод.. 94
451. Принцип коллимации, использованный в магнитометре Кью.. 98
452. Определение оси магнита и направления горизонтальной составляющей магнитной силы.. 98
453. Изменение момента магнита и интенсивности горизонтальной составляющей магнитной силы.. 101
454. Наблюдения отклонения 103
455. Метод тангенсов и метод синусов.. 104
456. Наблюдение колебаний.. 105
457. Исключение эффектов магнитной индукции.. 107
458. Статический метод измерения горизонтальной силы.. 108

459. Двухнитевой подвес.. 109
460. Система наблюдений в обсерватории.. 112
461. Наблюдения инклинометра.. 113
462. Метод поправки Дж. А. Брауна.. 116
463. Подвес Джоуля.. 116
464. Сбалансированный магнитометр вертикальной силы.. 118

ГЛАВА VIII

О ЗЕМНОМ МАГНЕТИЗМЕ

465. Элементы магнитной силы.. 119
466. Сопоставление результатов магнитного обзора по стране.. 121
467. Вывод разложения магнитного потенциала Земли по сферическим гармоникам.. 122
468. Определение земных магнитных полюсов. Они не расположены на концах магнитной оси. Ложные полюса. На земной поверхности их нет.. 123
469. Вычисление Гаусса 24-х коэффициентов первых четырех гармоник 123
470. Отделение внешних источников магнитной силы от внутренних 123
471. Солнечные и лунные вариации.. 124
472. Периодические вариации.. 124
473. Возмущения и их 11-летний период.. 125
474. Их влияние на магнитные исследования.. 125

ЧАСТЬ IV

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА

475. Открытие Эрстедом действия электрического тока на магнит.. 126
476. Пространство около электрического тока является магнитным полем 126
477. Действие вертикального тока на магнит.. 126
478. Доказательство того, что сила, обусловленная прямым током сколь угодно большой длины, меняется обратно пропорционально расстоянию.. 127
479. Электромагнитное измерение тока 127
480. Потенциальная функция, обусловленная прямым током. Она является многозначной функцией.. 127
481. Сравнение действия такого тока с действием магнитной оболочки, имеющей бесконечную прямую кромку и простирающейся по одну сторону от этой кромки до бесконечности.. 128
482. Небольшой контур действует на больших расстояниях подобно магниту.. 128
483. Отсюда вывод формулы для действия замкнутого контура произвольной формы и размера на любую точку, не лежащую на самом токе.. 129
484. Сравнение контура и магнитной оболочки.. 129
485. Магнитный потенциал замкнутого контура.. 129
486. Условия непрерывного вращения магнита вокруг тока.. 130

487. Форма магнитной эквипотенциальной поверхности, обусловленной замкнутым контуром. (Рис. XVIII).. 131
488. Взаимодействие между произвольной системой магнитов и замкнутым током.. 131
489. Реакция на контур.. 131
490. Сила, действующая на провод, несущий ток и помещенный в магнитное поле.. 132
491. Теория электромагнитных вращений.. 134
492. Действие одного электрического контура на другой или на его часть 135
493. Наш метод исследования является методом Фарадея.. 135
494. Иллюстрация метода в приложении к параллельным токам.. 136
495. Размерность единицы тока.. 136
496. На провод действует сила, направленная с той стороны, где его действие усиливает магнитную силу, в ту сторону, где оно противоположно магнитной силе.. 136
497. Действие бесконечного прямого тока на произвольный ток, лежащий в его плоскости.. 137
498. Формулировка законов электромагнитной силы. Магнитная сила, обусловленная током.. 137
499. Универсальность этих законов.. 138
500. Сила, действующая на контур, помещенный в магнитное поле 138
501. Электромагнитная сила—это механическая сила, действующая на проводник, а не на сам ток.. 139

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЯ АМПЕРА ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

502. Исследование Ампером закона силы между элементами электрических токов.. 139
503. Его метод экспериментирования.. 140
504. Весы Ампера.. 140
505. Первый опыт Ампера. Равные, но противоположные токи нейтрализуют друг друга.. 141
506. Второй опыт. Изогнутый проводник эквивалентен прямому проводнику, несущему такой же ток.. 141
507. Третий опыт. Действие замкнутого тока на элемент другого тока перпендикулярно этому элементу.. 141
508. Четвертый опыт. Равные токи в геометрически подобных системах создают равные силы.. 142
509. Во всех этих опытах действующий ток является замкнутым.. 143
510. Оба контура, однако, можно для математических целей считать состоящими из элементарных частей, а действие токов рассматривать как результирующее действие этих элементов.. 143
511. Необходимая форма связей между элементарными участками линий 144
512. Геометрические свойства, которые определяют их относительное положение.. 144
513. Форма составляющих их взаимного действия.. 145
514. Разложение на проекции в трех направлениях, параллельных соответственно линии, их соединяющей, и самим элементам.. 146
515. Общее выражение для действия некоторого конечного тока на элемент другого.. 147

516. Условие, вытекающее из третьего амперовского случая равновесия 148
517. Теория директрисы и определителей электромагнитного действия 148
518. Выражение для определителей через составляющие вектор-потенциала тока.. 149
519. Часть силы, которая не определена, может быть выражена через пространственную производную от потенциала.. 150
520. Полное выражение для действия между двумя конечными токами 150
521. Взаимный потенциал двух замкнутых токов.. 150
522. Уместность введения кватернионов в этом исследовании.. 151
523. Определение вида функций из четвертого амперовского случая равновесия.. 151
524. Электродинамическая и электромагнитная единицы токов.. 151
525. Полное выражение для действия между двумя конечными токами 152
526. Четыре допустимых разновидностей теории.. 152
527. Из них следует предпочесть теорию Ампера.. 153

ГЛАВА III

ОБ ИНДУКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

528. Открытие Фарадея, сущность его методов.. 153
529. Метод, принятый в этом трактате, основан на методе Фарадея.. 155
530. Явление магнитоэлектрической индукции.. 156
531. Общий закон индукции токов.. 157
532. Иллюстрации направления индуцированных токов.. 157
533. Индукция из-за движения Земли.. 158
534. Электродвижущая сила, обусловленная индукцией, не зависит от материала проводника.. 158
535. Она не проявляет тенденции двигать проводник.. 159
536. Опыты Феличи по законам индукции.. 159
537. Использование гальванометра для определения интеграла по времени от электродвижущей силы.. 160
538. Сопряженные положения двух катушек.. 161
539. Математическое выражение для полного тока индукции.. 162
540. Фарадеевская концепция электротонического состояния.. 162
541. Его метод формулировки законов индукции с помощью линии магнитной силы.. 163
542. Закон Ленца и неймановская теория индукции.. 165
543. Вывод индукции Гельмгольцем из механического действия токов при помощи закона сохранения энергии.. 165
544. Томсоновское приложение того же принципа.. 166
545. Вклад Вебера в науку об электричестве.. 167

ГЛАВА IV

О САМОИНДУКЦИИ ТОКА

546. Удар, создаваемый электромагнитом.. 167
547. Кажущийся импульс (количество движения) электричества.. 168
548. Различие между этим случаем и случаем трубы, содержащей поток воды.. 168
549. Если здесь и возникает импульс, то он не является импульсом движущегося электричества.. 186

550. Тем не менее явления полностью аналогичны явлениям, связанным с импульсом.. 168
551. Электрический ток обладает энергией, которую можно назвать электрокинетической энергией 169
552. Это приводит нас к виду динамической теории электрических токов 169

ГЛАВА V

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

553. Лагранжев метод получения соответствующих идей для изучения высших динамических наук.. 170
554. Эти идеи должны быть переведены с математического языка на динамический.. 170
555. Степени свободы связанной системы.. 171
556. Обобщенное значение скорости.. 172
557. Обобщенное значение силы.. 172
558. Обобщенное значение импульса (количества движения) и импульса силы 172
559. Работа, совершаемая малым импульсом.. 173
560. Кинетическая энергия, выраженная через импульсы.. 173
561. Гамильтоновы уравнения движения.. 174
562. Кинетическая энергия, выраженная через скорости и импульсы 175
563. Кинетическая энергия, выраженная через скорости.. 176
564. Соотношения между T_p и $T_{\dot{q}}$, p и $\dot{q}$.. 176
565. Моменты, произведения инерции и подвижности.. 177
566. Необходимые условия, которым должны удовлетворять эти коэффициенты.. 178
567. Связь между математическими, динамическими и электрическими представлениями.. 178

ГЛАВА VI

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

568. Электрический ток обладает энергией.. 179
569. Ток есть явление кинетическое.. 180
570. Работа, совершаемая электродвижущей силой.. 180
571. Наиболее общее выражение для кинетической энергии системы, содержащей электрические токи.. 181
572. Электрические переменные не появляются в этом выражении.. .. 181
573. Механическая сила, действующая на проводник.. 182
574. Часть, зависящая от произведений обычных скоростей на силы токов, не существует.. 183
575. Другая экспериментальная проверка.. 185
576. Обсуждение электродвижущей силы.. 186
577. Если бы существовали члены, включающие произведения скоростей и токов, они бы вводили электродвижущие силы, которые не наблюдаются.. 187

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

578. Электрокинетическая энергия системы линейных контуров.. 188
579. Электродвижущая сила в каждом контуре.. 189
580. Электромагнитная сила.. 189
581. Случай двух контуров.. 190
582. Теория индуцированных токов.. 190
583. Механическое действие между контурами.. 191
584. Все явления взаимодействия двух контуров зависят от единственной величины — потенциала двух контуров.. 191

ГЛАВА VIII

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ ВТОРИЧНОГО КОНТУРА

585. Электрокинетический импульс вторичного контура.. 191
586. . . . выраженный в виде линейного интеграла.. 192
587. Произвольная система смежных контуров эквивалентна контуру, образованному их внешней границей.. 192
588. Электрокинетический импульс, выраженный в виде поверхностного интеграла.. 193
589. Изогнутый участок контура эквивалентен прямому участку.. 193
590. Электрокинетический импульс в точке, выраженный в виде вектора $\mathfrak{A}$.. 194
591. Его связь с магнитной индукцией $\mathfrak{B}$. Уравнения (A).. 195
592. Оправдание этих наименований.. 196
593. Соглашения относительно знаков перемещения и вращений.. 196
594. Теория скользящего участка.. 197
595. Электродвижущая сила, обусловленная движением проводника 198
596. Электромагнитная сила, действующая на скользящий участок.. .. 198
597. Четыре определения линии магнитной индукции.. 198
598. Общие уравнения электромагнитной силы (B).. 199
599. Анализ электродвижущей силы.. 201
600. Общие уравнения, отнесенные к движущимся осям.. 202
601. Движение осей не меняет ничего, кроме кажущегося значения электрического потенциала.. 203
602. Электромагнитная сила, действующая на проводник.. 203
603. Электромагнитная сила, действующая на элемент проводящего тела. Уравнения (C).. 204

ГЛАВА IX

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

604. Резюме.. 205
605. Уравнения намагниченности (D).. 206
606. Связь между магнитной силой и электрическими токами.. 207
607. Уравнения электрических токов (E).. 208
608. Уравнения электрического смещения (F).. 209
609. Уравнения электрической проводимости (G).. 209
610. Уравнения полных токов (H).. 210

611. Токи, выраженные через электродвижущую силу (I).. 210
612. Объемная плотность свободного электричества (J).. 210
613. Поверхностная плотность свободного электричества (K).. 210
614. Уравнения магнитной проницаемости (L).. 210
615. Теория магнитов Ампера.. 211
616. Электрические токи, выраженные через электрокинетический импульс.. 211
617. Вектор-потенциал электрических токов.. 212
618. Кватернионные выражения для электромагнитных величин.. 213
619. Кватернионные уравнения электромагнитного поля.. 214

ГЛАВА X

РАЗМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

620. Две системы единиц 215
621. Двенадцать первичных единиц.. 215
622. Пятнадцать связей между этими величинами.. 216
623. Выражение через e и m.. 217
624. Свойства взаимности двух систем.. 217
625. Электростатическая и электромагнитная система.. 217
626. Размерности двенадцати величин в двух системах.. 218
627. Шесть производных единиц.. 219
628. Отношение соответствующих единиц в двух системах 219
629. Практическая система электрических единиц. Таблица практических единиц.. 220

ГЛАВА XI

ОБ ЭНЕРГИИ И НАПРЯЖЕНИИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

630. Электростатическая энергия, выраженная через свободное электричество и потенциал.. 221
631. Электростатическая энергия, выраженная через электродвижущую силу и электрическое смещение.. 221
632. Магнитная энергия, выраженная через намагниченность и магнитную силу.. 222
633. Магнитная энергия, выраженная через квадрат магнитной силы 222
634. Электрокинетическая энергия, выраженная через электрический импульс и электрический ток.. 223
635. Электрокинетическая энергия, выраженная через магнитную индукцию и магнитную силу.. 223
636. Метод, принятый в трактате.. 224
637. Сравнение магнитной энергии и электрокинетической энергии.. 224
638. Сведение магнитной энергии к электрокинетической.. 225
639. Сила, действующая на частицу вещества, обусловленная ее намагниченностью.. 226
640. Электромагнитная сила, обусловленная прохождением электрического тока через нее.. 226
641. Объяснение этих сил при помощи гипотезы напряжения в среде 227
642. Общий характер напряжения, необходимого для создания явления 228

643. В отсутствии намагниченности напряжение является натяжением в направлении линий магнитной силы, объединенным с давлением во всех направлениях, перпендикулярных этим линиям; величина натяжения и давления при этом равна $(1/8\pi)\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ есть магнитная сила.. 229
644. Сила, действующая на проводник с током.. 230
645. Теория напряжения в среде в формулировке Фарадея.. 230
646. Численное значение Магнитного напряжения.. 231

ГЛАВА XII

ТОКОВЫЕ ЛИСТЫ

647. Определение токового листа.. 231
648. Функция тока.. 232
649. Электрический потенциал.. 232
650. Теория постоянных токов.. 232
651. Случай однородной проводимости.. 232
652. Магнитное действие токового листа с замкнутыми токами.. 233
653. Магнитный потенциал, обусловленный токовым листом.. 233
654. Индукция токов в листе с бесконечной проводимостью.. 234
655. Такой лист непроницаем для магнитного действия.. 234
656. Теория плоского токового листа.. 235
657. Магнитные функции, выраженные как производные от одной функции.. 235
658. Действие переменной магнитной системы на лист.. 236
659. В отсутствии внешнего действия токи затухают и их магнитное действие уменьшается, как если бы лист удалялся с постоянной скоростью R.. 238
660. Токи, возбуждаемые мгновенным введением магнитной системы, производят действие, эквивалентное изображению этой системы 238
661. Это изображение удаляется от первоначального положения со скоростью R.. 239
662. Последовательность изображений, формируемая магнитной системой при непрерывном движении.. 239
663. Математическое выражение для действия индуцированных токов 239
664. Случай однородного движения магнитного полюса.. 240
665. Величина силы, действующей на магнитный полюс.. 241
666. Случай криволинейного движения.. 241
667. Случай движения вблизи кромки листа.. 241
668. Теория вращающегося диска Араго.. 242
669. Последовательность изображений в виде спирали.. 244
670. Сферические токовые листы.. 245
671. Вектор-потенциал.. 246
672. Как создать поле постоянной магнитной силы внутри сферической оболочки.. 246
673. Как создать постоянную силу, действующую на подвешенную катушку.. 247
674. Токи, параллельные плоскости.. 248
675. Плоский электрический контур. Сферическая оболочка. Эллипсоидальная оболочка.. 248
676. Соленоид.. 249

677. Длинный соленоид.. 250
678. Сила около концов.. 251
679. Пара индукционных катушек.. 251
680. Оптимальная толщина провода.. 252
681. Бесконечный соленоид.. 253

ГЛАВА XIII

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ТОКИ

682. Цилиндрические проводники.. 254
683. Внешнее магнитное действие цилиндрического провода зависит только от полного тока, протекающего через него.. 255
684. Вектор-потенциал.. 256
685. Кинетическая энергия тока.. 256
686. Отталкивание между прямым и обратным токами.. 257
687. Натяжение проводов. Опыт Ампера.. 257
688. Самоиндукция сдвоенного провода.. 258
689. Токи меняющейся интенсивности в цилиндрическом проводе.. 259
690. Связь между электродвижущей силой и полным током.. 260
691. Геометрическое среднее расстояние между двумя фигурами на плоскости.. 261
692. Частные случаи.. 263
693. Применение метода к катушке из изолированного провода.. 264

ГЛАВА XIV

КРУГОВЫЕ ТОКИ

694. Потенциал, обусловленный сферическим сосудом.. 265
695. Телесный угол, с вершиной в произвольной точке, опирающийся на окружность.. 267
696. Потенциальная энергия двух круговых токов.. 268
697. Момент пары сил, действующий между двумя катушками.. 269
698. Величина P_i'.. 270
699. Притяжение между двумя параллельными круговыми токами.. 270
700. Вычисление коэффициентов для витка конечного сечения.. 270
701. Потенциал двух параллельных окружностей, выраженный через эллиптические интегралы.. 272
702. Линии силы вокруг кругового тока. (Рис. XVIII).. 273
703. Дифференциальное уравнение для потенциала двух окружностей 274
704. Приближение, когда окружности очень близки друг к другу.. 275
705. Дальнейшее приближение.. 276
706. Катушка с максимальной самоиндукцией.. 278

ГЛАВА XV

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРИБОРЫ

707. Обычные гальванометры и чувствительные гальванометры.. 278
708. Устройство стандартной катушки.. 279
709. Математическая теория гальванометра.. 280
710. Принцип тангенсного гальванометра и синусного гальванометра 280
711. Гальванометр с одной катушкой.. 281

712. Эксцентричный подвес Гогена.. 282
713. Двойная катушка Гельмгольца. (Рис. XIX).. 282
714. Гальванометр с четырьмя катушками.. 283
715. Гальванометр с тремя катушками.. 284
716. Необходимая толщина провода гальванометра.. 284
717. Чувствительные гальванометры 285
718. Теория гальванометра максимальной чувствительности.. 285
719. Закон изменения толщины провода.. 286
720. Гальванометр с проводом однородной толщины.. 288
721. Подвешенные катушки. Способ подвешивания.. 289
722. Чувствительная катушка Томсона.. 289
723. Определение магнитной силы при помощи подвешенной катушки и тангенсного гальванометра.. 290
724. Объединение подвешенной катушки Томсона и гальванометра.. .. 290
725. Веберовский электродинамометр.. 291
726. Токовые весы Джоуля.. 293
727. Втягивание соленоидов.. 294
728. Однородная сила, нормальная к подвешенной катушке.. 294
729. Электродинамометр с крутильным рычагом.. 295

ГЛАВА XVI
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

730. Наблюдение колебаний.. 295
731. Движение по логарифмической спирали.. 296
732. Прямолинейные колебания в среде с сопротивлением.. 297
733. Значения последовательных элонгаций.. 297
734. Данные и истинные значения.. 297
735. Положение равновесия, определенное по трем последовательным элонгациям.. 297
736. Определение логарифмического декремента 298
737. Когда прекращать эксперимент.. 298
738. Определение времени колебания по трем прохождениям.. 298
739. Две серии наблюдений.. 299
740. Поправка на амплитуду и на затухание.. 300
741. Демпфированный гальванометр.. 300
742. Как измерить постоянный ток с помощью гальванометра.. 301
743. Наилучший угол отклонения тангенсного гальванометра.. 301
744. Наилучший способ подведения тока.. 302
745. Измерение тока по первой элонгации.. 303
746. Как сделать серию наблюдений постоянного тока.. 303
747. Метод умножения для слабых токов.. 303
748. Измерение переходного тока по первой элонгации.. 304
749. Поправка на затухание.. 305
750. Серии наблюдений.. 306
751. Метод умножения.. 308

ГЛАВА XVII
СРАВНЕНИЕ КАТУШЕК

752. Электрические измерения иногда более точны, чем прямые измерения 309
753. Определение G_1.. 310
754. Определение g_1.. 311
755. Определение взаимной индукции двух катушек.. 311
756. Определение самоиндукции катушки.. 313
757. Сравнение самоиндукции двух катушек.. 314

ГЛАВА XVIII
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЕДИНИЦА СОПРОТИВЛЕНИЯ

758. Определение сопротивления.. 314
759. Метод Кирхгоффа.. 314
760. Веберовский метод переходных токов.. 316
761. Веберовский метод наблюдения.. 317
762. Метод затухания Вебера.. 317
763. Томсоновский метод с использованием вращения катушки.. 320
764. Математическая теория вращающейся катушки.. 320
765. Вычисление сопротивления 321
766. Поправки.. 322
767. Калориметрический метод Джоуля.. 322

ГЛАВА XIX
СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЕДИНИЦ

768. Характер и важность исследования.. 323
769. Отношение единиц дает скорость.. 323
770. Конвективный ток.. 324
771. Метод Вебера и Кольрауша.. 324
772. Томсоновский метод отдельного электрометра и электродинамометра 325
773. Метод Максвелла объединенных электрометра и электродинамометра.. 326
774. Электромагнитное измерение емкости конденсатора. Метод Дженкина.. 326
775. Метод прерывистого тока.. 327
776. Конденсатор и сопротивление в качестве плеча мостика Уитстона 328
777. Поправка в случае, когда действие слишком быстрое.. 329
778. Сравнение емкости конденсатора с самоиндукцией катушки.. 330
779. Объединенные катушка и конденсатор.. 332
780. Сравнение электростатического измерения сопротивления с электромагнитным измерением.. 334

ГЛАВА XX
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

781. Сравнение свойств электромагнитной среды со свойствами среды в волновой теории света.. 334
782. Энергия света при его распространении.. 335
783. Уравнение распространения электромагнитного возмущения.. 336

784. Решение в случае, когда среда является непроводящей.. 337
785. Характеристики распространения волны.. 337
786. Скорость распространения электромагнитного возмущения.. 338
787. Сравнение этой скорости со скоростью света.. 338
788. Удельная индуктивная способность диэлектрика равна квадрату его показателя преломления.. 338
789. Сравнение этих величин в случае парафина.. 339
790. Теория плоских волн.. 339
791. Электрическое смещение и магнитное возмущение находятся в плоскости волнового фронта и перпендикулярны друг другу.. 340
792. Энергия и напряжение при излучении.. 341
793. Давление, оказываемое светом.. 342
794. Уравнения движения в кристаллической среде.. 342
795. Распространение плоских волн.. 343
796. Распространяются только две волны.. 343
797. Теория согласуется с теорией Френеля.. 343
798. Связь между электрической проводимостью и прозрачностью.. .. 344
799. Сравнение с фактами.. 345
800. Прозрачные металлы.. 345
801. Решение уравнений в случае, когда среда является проводником 345
802. Случай бесконечной среды, в которой задано начальное состояние 345
803. Характеристики диффузии.. 346
804. Возмущение электромагнитного поля в случае, когда начинает течь ток.. 347
805. Быстрое приближение к крайнему состоянию.. 347

ГЛАВА XXI

МАГНИТНОЕ ДЕЙСТВИЕ НА СВЕТ

806. Возможные виды связи между магнетизмом и светом.. 348
807. Вращение плоскости поляризации при магнитном действии.. .. 349
808. Законы явления.. 349
809. Открытие Вердье отрицательного вращения в ферромагнитной среде 349
810. Вращение, производимое кварцем, скипидаром и т. д. независимо от магнетизма.. 350
811. Кинематический анализ явления.. 350
812. Скорость циркулярно поляризованного луча различна в зависимости от направления его вращения.. 351
813. Право- и левовинтовые лучи.. 351
814. В средах, которые сами по себе обладают вращательным свойством, скорость различна для право- и левовинтовых конфигураций.. .. 351
815. В среде, находящейся под действием магнетизма, скорости различны для противоположных направлений вращения.. 352
816. Светоносное возмущение, рассматриваемое математически, является вектором.. 352
817. Кинематические уравнения циркулярно поляризованного света 352
818. Кинетическая и потенциальная энергия среды.. 353
819. Условие волнового распространения.. 353
820. Действие магнетизма должно зависеть от реального вращения вокруг направления магнитной силы как оси.. 354

821. Формулировка результатов анализа явления.. 354
822. Гипотеза о молекулярных вихрях.. 355
823. Изменение вихрей в соответствии с законом Гельмгольца.. 356
824. Изменение кинетической энергии в возмущенной среде.. 356
825. Выражение через ток и скорость.. 357
826. Кинетическая энергия в случае плоской волны.. 357
827. Уравнения движения.. 358
828. Скорость циркулярно поляризованного луча.. 358
829. Магнитное вращение.. 359
830. Исследования Вердье.. 359
831. Замечание о механической теории молекулярных вихрей.. 361

ГЛАВА XXII

ОБЪЯСНЕНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА И ДИАМАГНЕТИЗМА МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ТОКАМИ

832. Магнетизм — явление молекулярное.. 363
833. Действие магнитных молекул может быть имитировано молекулярными токами.. 364
834. Различие между элементарной теорией непрерывных магнитов и теорией молекулярных токов.. 364
835. Простота электрической теории.. 365
836. Теория тока в идеально проводящем контуре.. 365
837. Случай, когда ток полностью обусловлен индукцией.. 366
838. Веберовская теория диамагнетизма.. 366
839. Магнитокристаллическая индукция.. 366
840. Теория идеального проводника.. 367
841. Среда, состоящая из идеально проводящих сферических молекул 367
842. Механическое действие магнитной силы на ток, который она возбуждает.. 367
843. Теория молекулы с изначальным током.. 368
844. Видоизменения теории Вебера.. 369
845. Следствия теории.. 369

ГЛАВА XXIII

ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИЯ НА РАССТОЯНИИ

846. Величины, входящие в формулу Ампера.. 370
847. Относительное движение двух электрических частиц.. 370
848. Относительное движение четырех электрических частиц. Теория Фехнера.. 371
849. Две новых разновидности формулы Ампера.. 371
850. Два разных выражения для силы между двумя движущимися электрическими частицами.. 372
851. Они принадлежат соответственно Гауссу и Веберу.. 372
852. Все силы должны быть совместимы с принципом сохранения энергии 372
853. Формула Вебера совместима с принципом сохранения энергии, а формула Гаусса — нет.. 373
854. Выводы Гельмгольца из формулы Вебера.. 373
855. Потенциал двух токов.. 374

856. Веберовская теория индукции электрических токов 375
857. Изолирующая сила в проводнике.. 375
858. Случай движущихся проводников.. 376
859. Формула Гаусса ведет к ошибочному результату.. 377
860. Формула Вебера согласуется с явлением.. 377
861. Письмо Гаусса Веберу.. 378
862. Теория Римана.. 378
863. Теория С. Неймана.. 378
864. Теория Бетти.. 379
865. Противоречие с теорией среды.. 379
866. От идеи среды невозможно избавиться.. 380

ЧАСТЬ III
МАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МАГНЕТИЗМА

371. Некоторые тела, такие, например, как железная руда, носящая название «магнитный жалезняк», сама Земля, а также куски стали, подвергнутые специальной обработке, называются Магнитами; обнаружено, что они обладают следующими свойствами.

Если вблизи любой части земной поверхности, кроме Магнитных Полюсов, подвесить магнит, свободно вращающийся вокруг вертикальной оси, то он, вообще говоря, будет стремиться установиться по определенному азимуту, а при выведении из этого положения начнет колебаться около него. Ненамагниченное тело таких стремлений не проявляет — оно находится в равновесии одинаково при всех значениях азимута.

372. Было найдено, что сила действует на тело таким образом, чтобы некоторая линия внутри него, называемая Осью Магнита, стремилась стать параллельной некоторой линии в пространстве, называемой Направлением Магнитной Силы.

Предположим, что магнит подвешен так, что может свободно вращаться во всех направлениях около одной закрепленной точки. Чтобы исключить действие его веса, можно считать, что эта точка совпадает с центром тяжести. Пусть магнит придет в состояние равновесия. Пометим на магните две точки и установим их положения в пространстве. Затем поместим магнит в новое состояние равновесия и найдем новое положение отмеченных точек в пространстве.

Так как ось магнита в обоих состояниях совпадает с направлением магнитной силы, мы должны отыскать в магните линию, занимающую одно и то же пространственное положение до и после перемещения. Из теории движения недеформируемых тел следует, что такая линия всегда существует, причем перемещение магнита эквивалентно простому повороту вокруг нее.

Чтобы найти эту линию, построим две плоскости перпендикулярно отрезкам прямых, соединяющих начальные и конечные положения отмеченных точек и рассекающих эти отрезки пополам; пересечение этих плоскостей определит искомую линию, которая дает одновременно и направление оси магнита, и направление магнитной силы в пространстве.

Для практического определения этих направлений описанный метод неудобен; мы вернемся еще к этому вопросу при рассмотрении Магнитных Измерений.

Обнаружено, что в разных частях земной поверхности магнитная сила направлена по-разному. Если сделать метку на кончике магнита, указывающем на север, то окажется, что он устанавливается в направлении, которое в общем случае существенно отличается от направления истинного меридиана, причем в северном

полушарии этот кончик всегда отклоняется еще и вниз, а в южном полушарии — вверх.

Азимут направления магнитной силы, отсчитываемой от истинного направления на север в сторону запада, называется Вариацией или Магнитным Склонением. Угол между направлением магнитной силы с горизонтальной плоскостью называется Магнитным Наклонением. Эти два угла задают направление магнитной силы; если также известна и ее интенсивность, то магнитная сила определена полностью. Измерение этих трех элементов в различных местах земной поверхности, обсуждение характера их вариаций от места к месту и с течением времени наблюдения, а также исследование причин, порождающих магнитную силу и вызывающих ее изменения,— все это составляет содержание науки о Земном Магнетизме.

373. Предположим теперь, что определены оси нескольких магнитов и у каждого из них помечен конец, указывающий на север. Подвесим свободно один из магнитов, а другой будем к нему приближать. Окажется, что два помеченных конца отталкиваются друг от друга и два непомеченных конца тоже отталкиваются друг от друга, а отмеченный и неотмеченный концы притягиваются друг к другу.

Установлено, что для магнитов, сделанных в виде длинных однородно и продольно намагниченных стержней или проволок (см. далее п. 384), наибольшее проявление силы происходит, когда конец одного магнита находится вблизи конца другого, и что эти явления можно рассматривать, исходя из предположения о том, что однотипные концы магнита отталкиваются, разнотипные концы притягиваются, а серединные части магнитов не проявляют ощутимого взаимодействия.

Концы длинного тонкого магнита обычно принято называть его Полюсами. В случае сколь угодно тонкого магнита, однородно намагниченного по длине, его концы действуют как центры силы, а остальные его части кажутся лишенными магнитного действия. У всех реальных магнитов намагниченность отличается от однородной, так что никакие отдельные точки не могут быть выбраны в качестве полюсов. Тем не менее Кулон, используя длинные тонкие стержни, намагниченные с особой тщательностью, установил закон для силы, действующей между двумя одноименными магнитными полюсами (средой между ними был воздух) [1].

Отталкивание между двумя одноименными магнитными полюсами происходит по прямой линии, их соединяющей, и численно равно произведению мощностей (strengths) полюсов, деленному на квадрат расстояния между ними.

374. Этот закон, конечно, содержит предположение о том, что мощность каждого из полюсов измеряется с помощью некоторой единицы, величина которой может быть выражена через входящие в данный закон члены.

Единичным полюсом является такой полюс, который указывает на север и, будучи помещенным на единичном расстоянии от другого единичного полюса, отталкивается от него в воздухе с единичной силой (последняя определяется как в п. 6). Полюс, указывающий на юг, считается отрицательным.

Если мощности магнитных полюсов m_1 и m_2, расстояние между ними l и

[1] Coulomb, *Mém. de l'Acad.* 1785, p. 603 and in Biot's *Traité de Physique*, tome III.

сила отталкивания f выражены численно, то

$$f=\frac{m_1 m_2}{l^2}.$$

Но если $[m]$, $[L]$ и $[F]$ — конкретные единицы магнитного полюса, длины и силы, тогда

$$f[F]=\left[\frac{m}{L}\right]^2\frac{m_1 m_2}{l^2},$$

откуда следует, что

$$[m^2]=[L^2F]=\left[L^2\frac{ML}{T^2}\right],$$

или

$$[m]=[L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}].$$

Следовательно, единичный полюс имеет по отношению к длине размерность, равную $^3/_2$ по отношению ко времени — размерность, равную — 1 а по отношению к массе — размерность, равную $+^1/_2$; это совпадает с размерностью электростатической единицы электричества, установленной ранее в п. 41, 42 совершенно аналогичным путем.

375. Точность этого закона можно считать установленной опытами Кулона с Крутильными Весами и подтвержденной опытами Гаусса и Вебера, равно как и всеми наблюдателями в магнитных обсерваториях, осуществляющими ежедневные магнитные измерения и получающими результаты, которые должны были бы стать несовместимыми друг с другом, если бы закон для силы был принят ошибочно. Дополнительное подтверждение вытекает из его согласованности с законами электромагнитных явлений.

376. Величину, названную нами мощностью полюса, можно было бы назвать также и количеством «Магнетизма», если не приписывать «Магнетизму» никаких иных свойств, кроме тех, которые обнаруживаются в полюсах магнита.

Закон для силы между двумя заданными количествами «Магнетизма» выражается математически в той же форме, что и закон для силы между численно равнозначными количествами «Электричества», поэтому многие из математических методов теории магнетизма должны быть аналогичны методам теории электричества. Существуют, однако, и другие свойства магнитов, о которых следует помнить и которые могут в какой-то мере пролить свет на электрические свойства тел вообще.

Соотношение между полюсами магнита

377. Количество магнетизма на одном полюсе магнита всегда равно и противоположно количеству магнетизма на другом полюсе, или более обще:

В каждом Магните общее количество Магнетизма (суммируемое алгебраически) *равно нулю.*

Следовательно, в поле силы, однородной и параллельной во всем занимаемом магнитном пространстве, сила, действующая на помеченный конец магнита, в точности равна, противоположна и параллельна силе, действующей на непомеченный конец, поэтому в результате образуется статическая пара сил, стремяща-

яся установить ось магнита в определенном направлении, но никуда не сдвигающая магнит в целом.

Это можно легко доказать, пустив магнит плавать по воде на маленьком кораблике. Чтобы ось магнита и направление земной магнитной силы по возможности сблизились, кораблик будет определенным образом разворачиваться, не совершая при этом в целом никаких перемещений ни в каком направлении, так что не может появиться никакой избыточной силы, действующей в сторону севера, по отношению к силе, действующей к югу, и наоборот. Это можно также показать, исходя из того факта, что намагничивание куска стали не меняет его веса: оно изменяет лишь видимое положение центра тяжести, смещая его в наших широтах вдоль оси по направлению к северу. Центр инерции, определяемый через явления вращения, остается неизменным.

378. Если исследовать середину длинного тонкого магнита, то обнаружится, что она не обладает никакими магнитными свойствами; если же в этой точке разломать магнит, окажется, что в каждом куске появляется магнитный полюс в месте разлома, причем этот новый полюс точно равен и противоположен другому полюсу, принадлежащему данному куску. Ни намагничиванием, ни разламыванием магнитов, ни какими-либо другими способами невозможно образовать магнит с неравными полюсами.

Разломив длинный тонкий магнит на несколько коротких кусков, мы получим набор коротких магнитов, каждый из которых имеет полюса почти той же веиочины, что и полюса первоначального длинного магнита. Само размножение полюсов необязательно связано с образованием энергии, однако следует помнить, чтл после разламывания магнита необходимо совершить работу по разделению его частей вследствие их притяжения друг к другу.

379. Сложим теперь все куски магнита вместе, как было вначале. В каждой точке соединения будут существовать два одинаковых по мощности полюса противоположного типа, приведенные в соприкосновение друг с другом, так что их совместное действие на любой другой полюс будет равным нулю. Восстановленный таким образом магнит имеет, следовательно, те же свойства, что и первоначальный, а именно: у него существуют равные и противоположные полюса на каждом конце и срединная часть, не проявляющая никакого магнитного действия.

Поскольку в этом случае мы знаем, что длинный магнит составлен из маленьких коротких магнитов, а все явления происходят с ним как с неразломанным, то можно даже до разламывания считать его состоящим из маленьких частиц, каждая из которых имеет два равных и противоположных полюса. Если предположить, что все магниты образованы из таких частиц, то в силу равенства нулю количества магнетизма в каждой частице общее количество магнетизма во всем магните, очевидно, будет тоже равно нулю, или, другими словами, он будет иметь равные по величине полюса противоположного типа.

Теория магнитной «материи»

380. Поскольку законы магнитного и электрического действия по форме идентичны друг другу, то доводы, приводимые при сведении электрических явлений к действию одной «жидкости» или двух «жидкостей», могут быть высказаны также и в пользу существования одного вида магнитной материи или двух видов магнитной материи, будь то жидкость или что-либо иное. В действительности теория маг-

нитной материи, используемая в чисто математическом смысле, не может потерпеть неудачу при объяснении явлений, если для учета реальных фактов вводить в нее какие-то новые законы, допускающие некоторый произвол.

Один из этих новых законов должен заключаться в том, что магнитные жидкости не могут переходить от одной молекулы или частицы магнита к другой, а процесс намагничивания состоит в разделении двух жидкостей в пределах каждой частицы, что приводит к повышению концентрации одной из жидкостей на одном из концов, а другой — на другом. Эта теория принадлежит Пуассону.

Согласно этой теории, частица намагничивающегося тела уподобляется маленькому изолированному незаряженному проводнику, содержащему, однако (в двухжидкостном варианте теории), сколь угодно большие, точно равные друг другу количества противоположного электричества; под действием на проводник электродвижущей силы происходит разделение этих электричеств и их появление на противоположных концах проводника. Аналогично и намагничивающая сила будет — по этой теории — вызывать разделение двух разновидностей магнетизма, первоначально пребывавших в нейтрализованном состоянии, и их появление на противоположных концах намагниченной частицы.

В некоторых веществах это магнитное состояние, сходное с состоянием наэлектризованности проводника, исчезает при снятии индуцирующей силы; к ним относятся мягкое железо и магнитные вещества, которые не могут быть постоянно намагниченными. Другие вещества, такие, как, например, твердая сталь, переходят в магнитное состояние с трудом, однако после перехода сохраняют его даже при удалении индуцирующей силы. Принято говорить, что в последнем случае существует стремящаяся препятствовать изменению намагниченности Коэрцитивная Сила, которую необходимо преодолеть, прежде чем мощность магнита может быть увеличена или уменьшена. В случае электризованных тел это соответствовало бы такому виду электрического сопротивления, которое, в отличие от сопротивления, наблюдаемого в металлах, для электродвижущих сил при значениях ниже некоторого было бы эквивалентно полной изоляции.

Эта теория магнетизма, как и соответствующая теория электричества, слишком просторна для фактов и, чтобы ее ограничить, требуется введение каких-то искусственных условий; действительно, она не только не выдвигает никаких соображений, почему одно тело не может отличаться от другого за счет большего содержания обеих жидкостей, но и не позволяет нам судить, каковы были бы свойства тела при наличии избытка в нем одной из этих магнитных жидкостей. Правда, приводится соображение, почему такое тело не может существовать вообще, но оно привнесено для объяснения этого частного факта лишь после его установления и не вытекает из самой теории.

381. Мы должны поэтому найти какой-то иной способ описания, который не вбирал бы в себя слишком многое, оставляя место для введения новых идей по мере их выявления из новых фактов. Я думаю, мы придем к этому, начав с высказывания о том, что частицы магнита Поляризованы.

Смысл термина «Поляризация»

Если частица какого-то тела обладает некоторыми свойствами, связанными с определенной линией или направлением внутри тела, а тело, сохраняющее эти свойства, поворачивается, обращая это направление на противоположное, то,

если эти свойства частицы по отношению к другим телам тоже обращаются, про частицу говорят, что она поляризована относительно этих свойств, а про сами свойства — что они составляют определенный вид поляризации.

Так, мы можем сказать, что вращение тела вокруг оси относится к одному из видов поляризации, потому что, если, не прекращая вращения, повернуть ось так, что ее концы поменяются местами, то направление вращения тела относительно пространства изменится на противоположное.

Можно назвать поляризованной и проводящую частицу, через которую протекает ток электричества, так как если бы частица повернулась вокруг себя, а ток относительно ее сохранил свое направление, то его направление в пространстве оказалось бы обращенным.

Короче говоря, если любая математическая или физическая величина имеет векторную природу, как было определено в п. 11, то любое тело или частица, к которым относится эта направленная величина или вектор, может быть названа поляризованной [2], поскольку она имеет противоположные свойства в двух противоположных направлениях или на двух противоположных полюсах направленной величины.

Полюса Земли, например, связаны с ее вращением и носят соответственно разные названия.

Смысл термина «Магнитная Поляризация»

382. Когда мы говорим о состоянии, в котором пребывают частицы магнита, как о магнитной поляризации, то подразумеваем, что каждая из самых маленьких порций, на какие только можно разделить магнит, обладает определенными свойствами по отношению к определенному направлению, проходящему через частицу и называемому Осью Намагниченности; причем эти свойства противоположны для разных концов оси.

Свойства, приписываемые нами частице, относятся к свойствам того же типа, что и наблюдаемые для всего цельного магнита; принимая, что частицы обладают этими свойствами, мы тем самым делаем лишь такие предположения, которые можем доказать, разламывая магнит на мелкие кусочки, ибо каждый из этих кусочков оказывается магнитом.

Свойства намагниченной частицы

383. Предположим, что элемент $dxdydz$ является частицей магнита и обладает магнитными свойствами магнита, имеющего мощность положительного полюса m

[2] Слово Поляризация употреблено здесь в таком значении, которое не согласуется с термином, используемым в Оптике. Там луч света называют поляризованным, если он обладает свойствами, связанными с его боковыми сторонами, и притом такими, которые на взаимно противоположных сторонах одинаковы. Этот вид поляризации относится к другому типу Направленной Величины, которая может быть названа Диполярной, в противоположность величине прежнего типа, которая может быть названа δ-униполярной.

Когда диполярная величина поворачивается, меняя местами свои концы, она остается той же, как и до поворота. Натяжение и давление в твердых телах, растяжение, сжатие и изгиб, а также большинство оптических, электрических и магнитных свойств кристаллических тел являются диполярными величинами.

Эффект, производимый магнетизмом в прозрачных телах и состоящий в повороте плоскости поляризации падающего света, как и сам магнетизм, относится к униполярным свойствам. Вращательное свойство, отмеченное в п. 303, также является униполярным.

и длину ds. Тогда в произвольной точке пространства P, отстоящей на расстоянии r от положительного полюса и на расстоянии r' от отрицательного, магнитный потенциал V будет состоять из потенциала m/r, создаваемого положительным полюсом, и потенциала — m/r', создаваемого отрицательным полюсом, т. е.

$$V=\frac{m}{rr'}(r'-r). \qquad (1)$$

Если расстояние между полюсами ds очень мало, можно положить

$$r'-r=ds\cos\varepsilon, \qquad (2)$$

где ε — угол между вектором, направленным от магнита в точку P, и осью магнита. В пределе получим

$$V=\frac{mds}{r^2}\cos\varepsilon. \qquad (3)$$

Магнитный момент

384. Произведение длины стержневого магнита, однородно и продольно намагниченного, на мощность его положительного полюса называется Магнитным Моментом магнита.

Интенсивность намагниченности

Интенсивность намагниченности магнитной частицы определяется как отношение ее магнитного момента к объему. Мы будем обозначать ее буквой I.

Намагниченность в любой точке магнита может быть определена по ее интенсивности и направлению. Направление можно задать с помощью направляющих косинусов λ, μ, ν.

Составляющие намагниченности

Намагниченность в какой-либо точке магнита, будучи вектором или направленной величиной, может быть выражена через три ее составляющих, отнесенных к осям координат. Назовем их A, B, C:

$$A=I\lambda, \quad B=I\mu, \quad C=I\nu. \qquad (4)$$

Абсолютное или численное значение величины I задается уравнением

$$I^2=A^2+B^2+C^2. \qquad (5)$$

385. Если рассматриваемая нами часть магнита есть дифференциальный элемент объема $dxdydz$, а I — интенсивность намагниченности этого элемента, то его магнитный момент равен $Idxdydz$. Подставляя его вместо mds в уравнение (3) и помня, что

$$r\cos\varepsilon=\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)+\nu(\zeta-z), \qquad (6)$$

где ξ, η, ζ — координаты конца вектора r, выходящего из точки (x, y, z), для потенциала в точке (ξ, η, ζ), обусловленного намагниченным элементом, находящимся в (x, y, z), найдем

$$\{A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)\}\frac{1}{r^3}\,dx\,dy\,dz. \qquad (7)$$

Чтобы получить потенциал, создаваемый в точке (ξ, η, ζ) магнитом конечных размеров, необходимо найти интеграл от этого выражения по всем элементам объема, входящим в пространство, занятого магнитом, т. е.

$$V=\iiint \{A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)\}\frac{1}{r^3}\,dx\,dy\,dz. \tag{8}$$

После интегрирования по частям получаем

$$V=\iint A\frac{1}{r}\,dy\,dz+\iint B\frac{1}{r}\,dz\,dx+\iint C\frac{1}{r}\,dx\,dy-$$
$$-\iiint\frac{1}{r}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

где двойной интеграл в первых трех членах берется по поверхности магнита, а тройной интеграл в четвертом члене — по его объему.

Обозначим через l, m, n направляющие косинусы нормали, направленной из элемента поверхности dS наружу, тогда, как и в п. 21, для суммы первых трех членов можно написать

$$\iint (lA+mB+nC)\ (1/r)\ dS,$$

где интегрирование распространяется на всю поверхность магнита.

Если ввести теперь новые обозначения σ и ρ, определив их с помощью равенств

$$\sigma=lA+mB+nC,\quad \rho=-\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right),$$

то выражение для потенциала может быть записано в виде

$$V=\iint\frac{\sigma}{r}\,dS+\iiint\frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

386. Это совпадает с выражением для электрического потенциала, создаваемого телом, на поверхности которого существует электризация с поверхностной плотностью σ и одновременно во всем веществе которого имеется объемная электризация с объемной плотностью ρ. Следовательно, если считать величины σ и ρ поверхностной и объемной плотностями распределения некоторого воображаемого вещества, названного нами «магнитной материей», то потенциал, обусловленный ими, будет равен потенциалу, создаваемому истинной намагниченностью всех элементов объема.

Поверхностная плотность σ есть составляющая намагниченности вдоль направления внешней нормали к поверхности, а объемная плотность ρ есть «конвергенция» (см. п. 25) намагниченности в данной точке магнита.

Этот метод представления действия магнита как действия, обусловленного распределением «магнитной материи», очень удобен, однако всегда следует помнить, что он является лишь искусственным приемом описания действия, создаваемого некоторой системой поляризованных частиц.

О действии одной магнитной молекулы на другую

387. Если, как и в п. 129 б главы о сферических гармониках, положить

$$\frac{d}{dh} = l\frac{d}{dx} + m\frac{d}{dy} + n\frac{d}{dz}, \tag{1}$$

где l, m, n — направляющие косинусы оси h; то потенциал, обусловленный магнитной молекулой с магнитным моментом m_1 и осью, параллельной h_1, помещенной в начало координат, будет равен

$$V_1 = -\frac{d}{dh_1}\frac{m_1}{r} = \frac{m_1}{r^2}\lambda_1, \tag{2}$$

где λ_1 — косинус угла между h_1 и r.

Если имеется вторая магнитная молекула с моментом m_2 и осью, параллельной h_2, помещенная в точке, где оканчивается радиус-вектор r, то потенциальная энергия, обусловленная действием одного магнита на другой, будет равна

$$W = m_2\frac{dV_1}{dh_2} = -m_1 m_2\frac{d^2}{dh_1\,dh_2}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{r^3}(\mu_{12} - 3\lambda_1\lambda_2), \tag{4}$$

где μ_{12} — косинус угла между осями, а λ_1 и λ_2 — косинусы углов между радиус-вектором и осями.

Определим далее момент пары сил, с которым первый магнит стремится повернуть второй вокруг его центра.

Предположим, что второй магнит повернулся на угол $d\varphi$ в плоскости, перпендикулярной некоторой третьей оси h_3; тогда работа, совершенная против магнитных сил, будет равна $(dW/d\varphi)\,d\varphi$, а момент сил, действующий на магнит в этой плоскости,

$$-\frac{dW}{d\varphi} = -\frac{m_1 m_2}{r^3}\left(\frac{d\mu_{12}}{d\varphi} - 3\lambda_1\frac{d\lambda_2}{d\varphi}\right). \tag{5}$$

Истинный момент, действующий на второй магнит, можно, следовательно, рассматривать как результирующую двух пар сил: первая действует в плоскости, параллельной осям обоих магнитов, и стремится увеличить угол между ними; ее момент равен

$$(m_1 m_2/r^3)\,\sin\,(h_1 h_2), \tag{6}$$

в то время как вторая действует в плоскости, проходящей через r и ось второго магнита, и стремится уменьшить угол между этими направлениями; она имеет момент

$$3(m_1 m_2/r^3)\cos(rh_1)\sin(rh_2), \tag{7}$$

где через (rh_1), (rh_2), $(h_1 h_2)$ обозначены углы между линиями r, h_1, h_2.

Для определения силы, действующей на второй магнит в направлении, параллельном линии h_3, необходимо вычислить

$$-\frac{dW}{dh_3}=m_1m_2\frac{d^3}{dh_1\,dh_2\,dh_3}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{8}$$

$$=-m_1m_2\frac{3!\,Y_3}{r^4}\quad \text{(по п. 129в)},$$

$$=3\frac{m_1m_2}{r^4}\{\lambda_1\mu_{23}+\lambda_2\mu_{31}+\lambda_3\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}\quad \text{(по п. 133)}, \tag{9}$$

$$=3\lambda_3\frac{m_1m_2}{r^4}(\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2)+3\mu_{13}\frac{m_1m_2}{r^4}\lambda_2+3\mu_{23}\frac{m_1m_2}{r^4}\lambda_1. \tag{10}$$

Предположим, что истинная сила состоит из трех сил — R, H_1 и H_2, действующих соответственно в направлениях r, h_1 и h_2, тогда сила в направлении h_3 будет равна

$$\lambda_3R+\mu_{13}H_1+\mu_{23}H_2. \tag{11}$$

Поскольку направление h_3 произвольно, мы должны иметь

$$R=\frac{3m_1m_2}{r^4}(\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2),\ H_1=\frac{3m_1m_2}{r^4}\lambda_2,\ H_2=\frac{3m_1m_2}{r^4}\lambda_1. \tag{12}$$

Сила R является отталкивающей — она стремится увеличить r; силы H_1 и H_2 действуют на второй магнит в направлении осей первого и второго магнита соответственно.

Этот анализ сил, действующих между двумя маленькими магнитами, был впервые проведен профессором Тэтом в терминах кватернионного анализа в *Quarterly Math. Journ.* за январь 1860. См. также его работу по кватернионам (*Quaternions*, Arts 442—443, 2nd Edition).

Частные случаи расположения магнитов

388. (1). Если λ_1 и λ_2 одинаковы и равны единице, т. е. оси магнитов лежат на одной прямой и направлены вдоль нее, то $\mu_{12}=1$ и сила отталкивания между магнитами будет равна

$$R+H_1+H_2=-(6m_1m_2)/r^4. \tag{13}$$

Отрицательный знак указывает на притяжение.

(2). Если λ_1 и λ_2 равны нулю, а μ_{12} — единице, т. е. оси магнитов параллельны друг другу и перпендикулярны r, то сила окажется отталкивающей и равной

$$3m_1m_2/r^4; \tag{14}$$

ни в одном из этих случаев не возникает никаких вращающих моментов.

(3). Если $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=0$, то $\mu_{12}=0$. (15)

Сила $3\,m_1m_2/r^4$ будет действовать на второй магнит в направлении его оси, а пара сил с моментом $2\,m_1m_2/r^3$ будет стремиться развернуть его параллельно первому магниту. Это эквивалентно действию одной силы $3\,m_1m_2/r^4$, параллельной оси второго магнита и пересекающей радиус-вектор r в точке, отстоящей от m_2 на расстоянии двух третей его длины.

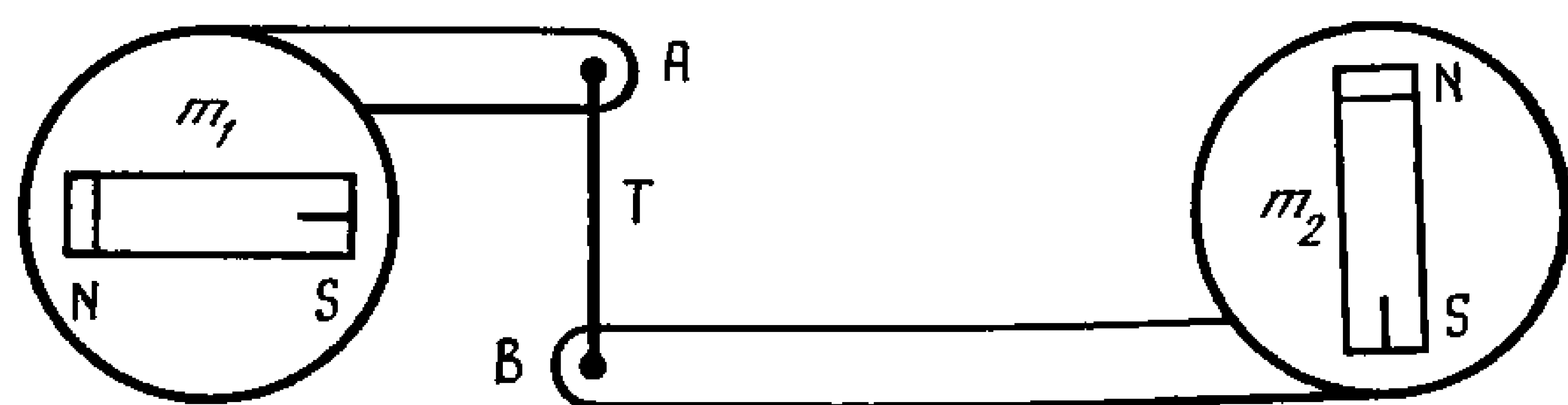


Рис. 1

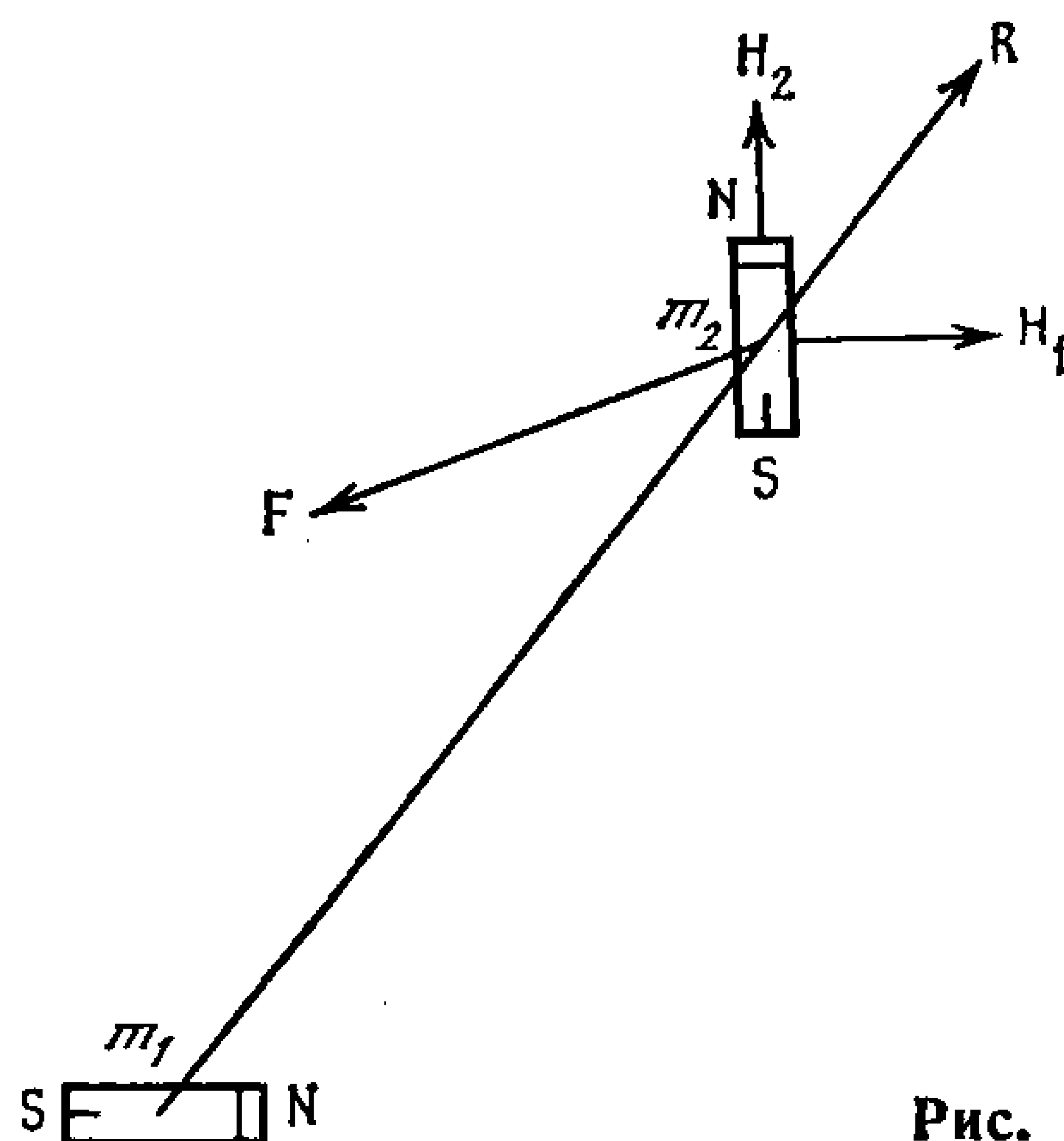


Рис. 2

На рис. 1 показаны плавающие на воде два магнита: магнит m_2 расположен на оси магнита m_1, а его собственная ось перпендикулярна оси m_1; две точки A и B, жестко связанные соответственно с m_1 и m_2, соединены между собой нитью T. Система будет находиться в равновесии, если T пересечет линию m_1m_2 под прямым углом в точке, отстоящей от m_1 на одну треть расстояния между m_1 и m_2.

(4) Если позволить второму магниту свободно вращаться вокруг своего центра, пока он не придет в положение устойчивого равновесия, то при этом энергия W окажется минимальной по h_2 и, следовательно, созданная магнитом m_2 составляющая силы в направлении h_1 будет иметь максимум. Таким образом, если мы хотим с помощью магнитов с фиксированным положением центров создать в данной точке и вдоль заданного направления максимально возможную магнитную силу, то для определения нужных направлений осей магнитов, при которых достигается этот эффект, необходимо: поместить один из магнитов в заданную точку, установив его в требуемом направлении; поместить центр другого магнита в любую из остальных задаваемых точек и установить положение его оси в состоянии устойчивого равновесия. После этого следует разместить все магниты так, чтобы их оси были установлены в направлениях, указанных вторым магнитом [рис. 2].

Разумеется, при выполнении этого опыта мы должны принимать во внимание земной магнетизм, если он существен.

Пусть второй магнит находится в положении устойчивого равновесия относительно своего направления, тогда действующая на него пара сил исчезает, и поэтому его ось должна располагаться в одной плоскости с осью первого магнита. Следовательно,

$$h_1h_2=(h_1r)+(rh_2), \tag{16}$$

и момент пары сил, равный

$$(m_1m_2/r^3)(\sin(h_1h_2) - 3\cos(h_1r)\,\sin(rh_2)) \tag{17}$$

обращается в нуль, как мы видим, при условии

$$\operatorname{tg}(h_1 r)=2\operatorname{tg}(rh_2), \tag{18}$$

или

$$\operatorname{tg} H_1 m_2 R=2\operatorname{tg} Rm_2 H_2. \tag{19}$$

Когда второй магнит занимает это положение, значение W становится равным $m_2(dV_1/dh_2)$, где h_2 — направление силовой линии в точке m_2, определяемое действием магнита m_1. Следовательно,

$$W=-m_2\sqrt{\left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV_1}{dz}\right)^2}, \tag{20}$$

т. е. второй магнит будет стремиться двигаться туда, где результирующая сила больше.

Сила, действующая на второй магнит, может быть разложена на силу R, которая в этом случае всегда является силой притяжения к первому магниту, и силу H_1, параллельную оси первого магнита:

$$R=3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{4\lambda_1^2+1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}},\quad H_1=3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}. \tag{21}$$

На рис. XIV в конце этого тома нарисованы силовые линии и эквипотенциальные поверхности в двумерном случае. Предполагается, что они создаются магнитами в виде двух длинных цилиндрических поперечно намагниченных стержней, сечения которых показаны полыми кружками, а направление намагниченности — стрелками.

Если вспомнить о наличии натяжения вдоль силовых линий, то легко понять, что каждый из магнитов будет стремиться повернуться в направлении движения часовой стрелки.

Кроме того, в целом правый магнит будет стремиться смещаться вверх по странице, а левый магнит — вниз.

О потенциальной энергии магнита, помещенного в магнитное поле

389. Пусть V — магнитный потенциал, создаваемый любой системой магнитов, действующих на данный рассматриваемый магнит. Будем называть его потенциалом внешней магнитной силы.

Если маленький магнит длиной ds расположен так, что его положительный полюс величины m находится в точке с потенциалом V, а отрицательный — в точке с потенциалом V', то потенциальная энергия этого магнита будет равна $m(V-V')$ или, если ds измеряется от отрицательного полюса к положительному,

$$m(dV/ds)ds. \tag{1}$$

Если I — величина намагниченности, λ, μ, ν — ее направляющие косинусы, то можно написать

$$m\,ds=I\,dx\,dy\,dz \text{ и } \frac{dV}{ds}=\lambda\frac{dV}{dx}+\mu\frac{dV}{dy}+\nu\frac{dV}{dz},$$

и, наконец, если A, B, C — составляющие намагниченности, то $A=\lambda I$, $B=\mu I$, $C=\nu I$, так что выражение (1) для потенциальной энергии элемента магнита станет таким:

$$\left(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Чтобы получить потенциальную энергию магнита конечных размеров, необходимо проинтегрировать это выражение по всем элементам магнита. Таким образом получим

$$W=\iiint\left(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

Это и есть потенциальная энергия магнита относительно магнитного поля, в которое он помещен.

Она выражена здесь через составляющие намагниченности и магнитной силы, возникающей от внешних источников.

Интегрируя по частям, мы можем выразить ее через распределение магнитной материи и магнитного потенциала:

$$W=\iint(Al+Bm+Cn)V\,dS-\iiint V\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали к элементу поверхности dS. Подстановка в это уравнение выражений для поверхностной и объемной плотностей магнитной материи, приведенных в п. 385, дает

$$W=\iint V\sigma dS+\iiint V\rho dxdydz. \tag{5}$$

Уравнение (3) можно переписать в виде

$$W=-\iiint(A\alpha+B\beta+C\gamma)\ dxdydz, \tag{6}$$

где α, β и γ — составляющие внешней магнитной силы.

О магнитном моменте и оси магнита

390. Если во всем пространстве, занятом магнитом, внешняя магнитная сила однородна и по направлению, и по величине, то составляющие α, β, γ постоянны. Записав

$$\iiint Adxdydz=lK,\quad \iiint Bdxdydz=mK,\quad \iiint Cdxdydz=nK \tag{7}$$

и распространив интегрирование на все вещество магнита, величину W можно представить в виде

$$W=-K(l\alpha+m\beta+n\gamma). \tag{8}$$

В этом выражении l, m, n — направляющие косинусы оси магнита, K — его магнитный момент. Если обозначить через ε угол между осью магнита и направлением магнитной силы $\mathfrak{H}$. то величину W можно переписать так:

$$W=-K\mathfrak{H}\cos\varepsilon. \tag{9}$$

Если магнит подвешен таким образом, что он может свободно вращаться, как обычная компасная стрелка, вокруг своей вертикальной оси, то, предположив, что он имеет азимут φ и наклонен на угол θ относительно горизонтальной плоскости, а направление силы земного магнетизма имеет азимут δ и наклонение ζ, получим

$$\alpha = \mathfrak{H}\cos\zeta\cos\delta, \quad \beta = \mathfrak{H}\cos\zeta\sin\delta, \quad \gamma = \mathfrak{H}\sin\zeta; \tag{10}$$

$$l = \cos\theta\cos\varphi, \quad m = \cos\theta\sin\varphi, \quad n = \sin\theta; \tag{11}$$

Откуда следует

$$W = -K\mathfrak{H}\{\cos\zeta\cos\theta\cos(\varphi-\delta) + \sin\zeta\sin\theta\}. \tag{12}$$

Момент силы, стремящейся повернуть магнит вокруг вертикальной оси и увеличить угол φ, равен

$$-\frac{dW}{d\varphi} = -K\mathfrak{H}\cos\zeta\cos\theta\sin(\varphi-\delta). \tag{13}$$

О разложении потенциала магнита по пространственным гармоникам

391. Пусть V — потенциал, создаваемый единичным полюсом, помещенным в точку (ξ, η, ζ), его значение в точке x, y, z равно

$$V = \{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2\}^{-1/2}. \tag{1}$$

Это выражение можно разложить по сферическим гармоникам с центром в начале координат. Будем иметь тогда

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \text{ и т. д.}, \tag{2}$$

где $V_0 = (1/r)$, (3)

r — расстояние до точки (ξ, η, ζ) от начала координат,

$$V_1 = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r^3}, \tag{4}$$

$$V_2 = \frac{3(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2r^5}, \tag{5}$$

и т. д.

Для того чтобы определить величину потенциальной энергии магнита, помещенного в поле силы, определяемой этим потенциалом, необходимо проинтегрировать выражение для W в уравнении (3) п. 389 по x, y и z, считая ξ, η, ζ и r постоянными.

Если рассмотреть только члены, представляемые гармониками V_0, V_1 и V_2, то результат будет зависеть от следующих объемных интегралов:

$$lK = \iiint A\,dx\,dy\,dz, \quad mK = \iiint B\,dx\,dy\,dz, \quad nK = \iiint C\,dx\,dy\,dz; \tag{6}$$

$$L = \iiint Ax\,dx\,dy\,dz, \quad M = \iiint By\,dx\,dy\,dz, \quad N = \iiint Cz\,dx\,dy\,dz; \tag{7}$$

$$P = \iiint (Bz + Cy)\,dx\,dy\,dz, \quad Q = \iiint (Cx + Az)\,dx\,dy\,dz,$$

$$R = \iiint (Ay + Bx)\,dx\,dy\,dz. \tag{8}$$

Таким образом, для величины потенциальной энергии магнита в присутствии единичного полюса, находящегося в точке (ξ, η, ζ), находим

$$W = K\frac{l\xi+m\eta+n\zeta}{r^3}+$$
$$+\frac{\xi^2(2L-M-N)+\eta^2(2M-N-L)+\zeta^2(2N-L-M)+3(P\eta\zeta+Q\zeta\xi+R\xi\eta)}{r^5}+\text{ и т. д.} \qquad (9)$$

Это выражение можно также рассматривать как потенциальную энергию единичного полюса в присутствии магнита или просто как создаваемый магнитом потенциал в точке (ξ, η, ζ).

О центре магнита
и о главной и побочных осях магнита

392. Это выражение можно упростить, изменив направление координатных осей и положение начала координат. Прежде всего направим ось x параллельно оси магнита. Это эквивалентно тому, что

$$l=1,\quad m=0,\quad n=0. \qquad (10)$$

Если перенести начало координат в точку (x', y', z'), сохранив направление осей, то объемные интегралы lK, mK и nK останутся неизменными, а остальные изменятся следующим образом:

$$L'=L-lKx',\qquad M'=M-mKy',\qquad N'=N-nKz' \qquad (11)$$
$$P'=P-K(mz'+ny'),\qquad Q'=Q-K(nx'+lz'),\qquad R'=R-K(ly'+mx'). \qquad (12)$$

Если сделать направление оси x параллельным оси магнита и положить

$$x'=(2L-M-N)/2K,\qquad y'=R/K,\qquad z'=Q/K, \qquad (13)$$

то для новых осей значения M и N останутся прежними, а значение L' окажется равным $(M+N)/2$; не изменится также и величина P, в то время как Q и R обратятся в нуль. Следовательно, мы можем для потенциала записать

$$K\frac{\xi}{r^3}+\frac{\frac{3}{2}(\eta^2-\zeta^2)(M-N)+3P\eta\zeta}{r^5}+\ldots\,. \qquad (14)$$

Мы нашли, следовательно, фиксированную относительно магнита точку, такую, что если ее выбрать в качестве начала координат, второй член в разложении потенциала выразится в наиболее простой форме; поэтому эту точку можно определить как центр магнита, а проведенную через нее ось в направлении, ранее названном направлением магнитной оси, определить как главную ось магнита.

Мы можем упростить результат еще больше, повернув оси y и z вокруг оси x на половину угла, тангенс которого равен $P/(M-N)$. Тогда P станет равным нулю, и окончательное выражение для потенциала примет вид

$$K\frac{\xi}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{(\eta^2-\zeta^2)(M-N)}{r^5}+\text{ и т. д.} \qquad (15)$$

Это есть простейшая форма представления первых двух членов потенциала магнита. Оси y и z, направленные таким образом, могут быть названы побочными осями магнита.

Центр магнита мы можем определить и иначе, отыскав такое положение начала координат, при котором поверхностный интеграл от квадрата второго члена в разложении потенциала, взятый по сфере единичного радиуса, минимален.

Величина, которую следует сделать минимальной, согласно п. 141 равна

$$4(L^2+M^2+N^2-MN-NL-LM)+3(P^2+Q^2+R^2). \tag{16}$$

Изменения значений этой величины, вызванные изменением положения начала координат, можно вывести из уравнений (11) и (12). Условия минимума следующие:

$$\begin{aligned} &2l(2L-M-N)+3nQ+3mR=0,\\ &2m(2M-N-L)+3lR+3nP=0,\\ &2n(2N-L-M)+3mP+3lQ=0. \end{aligned} \tag{17}$$

Если положить $l=1$, $m=0$, $n=0$, то эти условия станут такими:

$$2L-M-N=0, \quad Q=0, \quad R=0, \tag{18}$$

т. е. они совпадут с условиями, использованными в предыдущем рассмотрении.

Это исследование можно сравнить с тем, которое проводится при разложении потенциала системы, состоящей из гравитирующей материи. Там наиболее удобной точкой при выборе начала координат является центр тяжести системы, а наиболее удобными осями — проходящие через эту точку главные оси инерции.

В случае магнита точка, соответствующая центру тяжести, бесконечно удалена в направлении оси, и то, что мы назвали центром магнита, по своим свойствам отличается от центра тяжести. Величины L, M, N соответствуют моментам инерции, а P, Q, R — произведениям инерции материального тела с той разницей, что L, M, N не должны быть обязательно положительными.

Когда центр магнита взят в качестве начала координат, то сферическая гармоника второго порядка становится секторной, а ее ось совпадает с осью магнита; ни для какой другой точки это не справедливо.

Когда магнит, как в случае тела вращения, симметричен по всем направлениям относительно этой оси, что член, содержащий гармонику второго порядка, полностью исчезает.

393. Во всех частях земной поверхности, кроме некоторых участков Полярных областей, один конец магнита показывает на север, или, по крайней мере, в северном направлении, а другой — в южном. Следуя распространенному способу образования наименований, мы, говоря о концах магнита, будем называть конец, указывающий на север, его северным концом. Если, однако, прибегать к языку теории магнитных жидкостей, мы должны использовать слова Борейный и Аустральный (boreal — северный, austral — южный). Борейный магнетизм — это воображаемый вид материи, который предполагается более распространенным в северных частях Земли, а Аустральный магнетизм — воображаемая магнитная материя, преобладающая в южных областях Земли. Магнетизм северного конца магнита является Аустральным, а магнетизм южного конца — Борейным . Сле-

довательно, когда мы говорим о северном и южном концах магнита, мы не сравниваем его с Землей, как с большим магнитом, а просто обозначаем направление, которое он стремится принять при своем свободном движении. С другой стороны, когда мы хотим сравнить распределение воображаемой магнитной жидкости в магните с распределением в Земле, мы будем применять эти более величественные слова — Борейный и Аустральный магнетизм.

394. Говоря о поле магнитной силы, мы будем использовать выражение Магнитный Север для обозначения направления, в котором указывает северный конец стрелки компаса, помещенного в поле силы.

Говоря о линии магнитной силы, мы всегда будем считать ее проведенной от магнитного юга к магнитному северу и называть это направление положительным. Аналогично направление намагниченности магнита обозначается линией, проведенной от южного конца магнита к северному, а конец магнита, указывающий на север, называется положительным.

Мы будем считать Аустральный магнетизм, т. е. магнетизм конца магнита, указывающего на север, положительным. Обозначив его численное значение через m, для магнитного потенциала будем иметь $V=\sum(m/r)$, и положительным является такое направление силовой линии, в котором V убывает.

ГЛАВА II

МАГНИТНАЯ СИЛА И МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

395. Магнитный потенциал данной точки, обусловленный магнитом с заданной всюду внутри его вещества намагниченностью, был уже определен нами в п. 385. Мы показали, что математически этот результат может быть выражен как через истинную намагниченность каждого из элементов магнита, так и через некоторое воображаемое распределение «магнитной материи», часть которой рассеяна по веществу внутри магнита, а часть сосредоточена на его поверхности.

Определенный таким образом магнитный потенциал вычисляется с помощью одной и той же математической процедуры для точек, заданных внутри магнита и вне его. Сила, испытываемая единичным магнитным полюсом, помещенным в произвольную точку вне магнита, получается из потенциала аналогичным дифференцированием, что и в соответствующей электрической задаче. Если составляющие этой силы равны α, β, γ, то

$$\alpha=-dV/dx, \quad \beta=-dV/dy, \quad \gamma=-dV/dz. \tag{1}$$

Для экспериментального определения магнитной силы в точке внутри магнита необходимо прежде всего удалить часть намагниченного вещества, чтобы образовать полость для внесения в нее магнитного полюса. Сила, действующая на полюс, будет, вообще говоря, зависеть от формы этой полости и от наклона ее стенок по отношению к направлению намагниченности. Поэтому во избежание неоднозначности, говоря о магнитной силе в магните, необходимо уточнять форму и положение полости, внутри которой следует измерять магнитную силу. Ясно, что когда форма и положение полости заданы, точку внутри нее, куда помещает-

ся магнитный полюс, уже не следует считать принадлежащей веществу магнита; это делает сразу же применимыми к ней обычные методы определения магнитной силы.

396. Рассмотрим теперь часть магнита, намагниченность внутри которой однородна по направлению и величине. Образуем внутри нее полость в виде цилиндра, ось которого параллельна направлению намагниченности, и на оси в центре поместим магнитный полюс.

Поскольку образующие цилиндра параллельны направлению намагниченности, на его боковой поверхности не возникнет поверхностного распределения магнетизма, а на круглых торцах, поскольку они перпендикулярны направлению намагниченности, появится однородное поверхностное распределение с поверхностной плотностью I на отрицательном конце и $-I$ — на положительном.

Обозначим длину цилиндра через $2b$, а радиус через a. Сила, действующая со стороны этих поверхностных распределений на магнитный полюс в центральной точке оси, будет обусловлена притяжением к положительному концу диска и отталкиванием от отрицательного конца диска. По величине и по направлению обе силы одинаковы, а сумма их равна

$$R = 4\pi I\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right). \tag{2}$$

Из этого выражения следует, что сила зависит не от абсолютных размеров полости, а от отношения длины цилиндра к его диаметру. Следовательно, какой бы малой ни делать полость, сила, связанная с поверхностным распределением магнетизма на ее стенках, остается, вообще говоря, конечной.

397. Выше мы предполагали, что намагниченность той части магнита, из которой удаляется цилиндрический кусок, однородна и одинаково направлена. В общем случае, при отсутствии этого ограничения, во всем веществе магнита должно появиться объемное распределение воображаемой магнитной материи, часть которой, вырезая цилиндр, мы удаляем. Однако поскольку в геометрически подобных объемных телах силы в соответствующих точках пропорциональны линейным размерам тел, то изменение силы, действующей на магнитный полюс, обусловленное объемной плотностью магнитной материи, будет неограниченно убывать с уменьшением размера полости, в то время как эффект, обусловленный поверхностной плотностью на стенках полости, остается, вообще говоря, конечным.

Таким образом, если размеры цилиндра настолько малы, что намагниченность удаленной части можно считать всюду параллельной оси цилиндра и имеющей постоянную величину I, сила, действующая на магнитный полюс, помещенный в среднюю точку на оси цилиндрической полости, будет состоять из двух сил. Первая обусловлена распределением магнитной материи как на внешней поверхности магнита, так и по всему его объему, за исключением удаленной части. Составляющие этой силы равны величинам α, β и γ, полученным из потенциала с помощью уравнений (1). Вторая часть — это сила R, действующая вдоль оси цилиндра в направлении намагниченности. Величина этой силы зависит от отношения длины цилиндрической полости к ее диаметру.

398. *Случай I*. Пусть это отношение очень велико, т. е. диаметр цилиндра мал по сравнению с его длиной. Разлагая выражение для R в ряд по степеням a/b,

находим

$$R=4\pi I\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}-\frac{3}{8}\frac{a^4}{b^4}+\text{ и т. д.}\right\},\qquad(3)$$

величина R обращается в нуль, когда отношение b/a становится бесконечным.

Следовательно, если полость имеет форму очень тонкого цилиндра с осью, параллельной направлению намагниченности, то поверхностное распределение на торцах цилиндра не сказывается на магнитной силе, и ее составляющие просто равны величинам α, β и γ:

$$\alpha=-dV/dX,\quad \beta=-dV/dy,\quad \gamma=-dV/dz.\qquad(4)$$

Силу внутри такой полости мы определим как магнитную силу внутри магнита. Сэр Уильям Томсон назвал это Полярным определением магнитной силы. Когда нам представится случай рассматривать эту силу как вектор, мы будем обозначать ее через $\mathfrak{H}$.

399. *Случай II*. Пусть длина цилиндра очень мала по сравнению с его диаметром, так что цилиндр становится тонким диском. Выражение для R после разложения в ряд по степеням b/a принимает вид

$$R=4\pi I\left\{1-\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{b^3}{a^3}-\text{ и т. д.}\right\},\qquad(5)$$

предельное значение при стремлении отношения a/b к бесконечности равно $4\pi I$.

Следовательно, когда полость имеет вид тонкого диска, плоскость которого перпендикулярна направлению намагниченности, на единичный полюс, находящийся на ее оси в центре, действует в направлении намагниченности сила $4\pi I$, возникающая из-за поверхностного магнетизма, распределенного на круговых поверхностях диска [1].

Так как намагниченность I имеет составляющие A, B и C, компоненты этой силы равны $4\pi A$, $4\pi B$ и $4\pi C$. Это следует объединить с силой, имеющей составляющие α, β, γ,

400. Пусть реальная сила, действующая на магнитный полюс, обозначена вектором $\mathfrak{B}$, а ее составляющие — a, b и c, тогда

$$a=\alpha+4\pi A,\quad b=\beta+4\pi B,\quad c=\gamma+4\pi C.\qquad(6)$$

Мы определим силу внутри полого диска, плоские стороны которого ортогональны намагниченности, как Магнитную Индукцию внутри магнита. Сэр Уильям Томсон назвал это Электромагнитным определением магнитной силы.

[1] *О силах внутри полостей других конфигураций*

1. Произвольная узкая пещерка (crevasse). Сила, обусловленная поверхностным магнетизмом, равна $4\pi I\cos\varepsilon$ и направлена по нормали к поверхности пещерки; ε — угол между этой нормалью и направлением намагниченности. Когда пещерка параллельна направлению намагниченности, сила совпадает с магнитной силой $\mathfrak{H}$; если пещерка перпендикулярна направлению намагниченности, сила совпадает с магнитной индукцией $\mathfrak{B}$.

2. В бесконечно вытянутом цилиндре, ось которого образует угол ε с направлением намагниченности, сила, обусловленная поверхностным магнетизмом, равна $2\pi I\sin\varepsilon$; она перпендикулярна оси и лежит в плоскости, содержащей ось цилиндра и направление намагниченности.

3. В сфере сила, обусловленная поверхностным магнетизмом, равна $(4/3)\,\pi I$ и направлена вдоль намагниченности.

Три вектора: намагниченность $\mathfrak{I}$, магнитная сила $\mathfrak{H}$ и магнитная индукция $\mathfrak{B}$, связаны векторным равенством

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I}. \tag{7}$$

Криволинейный интеграл от магнитной силы

401. Поскольку магнитная сила, определенная в п. 398, обусловлена свободным магнетизмом, распределенным как на поверхности магнита, так и внутри него, и не зависит от поверхностного магнетизма полости, ее можно вычислить непосредственно из общего выражения для потенциала магнита; криволинейный интеграл от магнитной силы, взятый вдоль произвольной кривой между точками A и B, равен

$$\int_A^B \left(\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds}\right) ds = V_A - V_B, \tag{8}$$

где через V_A и V_B обозначены потенциалы в точках A и B соответственно.

Поверхностный интеграл от магнитной индукции

402. Поток магнитной индукции через поверхность S определяется как величина интеграла

$$Q = \iint \mathfrak{B} \cos\varepsilon\, dS, \tag{9}$$

где $\mathfrak{B}$ — величина магнитной индукции на элементе поверхности dS, ε — угол между направлением индукции и нормалью к элементу поверхности; интегрирование распространяется на всю поверхность, которая может быть либо замкнутой поверхностью, либо поверхностью, ограниченной некоторой замкнутой кривой.

Если обозначить составляющие магнитной индукции через a, b, c и направляющие косинусы нормали через l, m, n, то поверхностный интеграл может быть записан в виде

$$Q = \iint (la + mb + nc)\, dS. \tag{10}$$

Выражая составляющие магнитной индукции через составляющие намагниченности и магнитной силы, как в п. 400, получим

$$Q = \iint (l\alpha + m\beta + n\gamma) dS + 4\pi \iint (lA + mB + nC)\, dS. \tag{11}$$

Предположим теперь, что поверхность, по которой производится интегрирование, замкнута, и исследуем значения величин двух членов в правой части этого уравнения.

Математическая форма связи между магнитной силой и свободным магнетизмом такая же, как между электрической силой и свободным электричеством, поэтому мы можем применить результаты п. 77 к первому члену выражения для Q, заменив составляющие электрической силы X, Y, Z в п. 77 на составляющие магнитной силы α, β, γ, а алгебраическую сумму свободного электричества e на алгебраическую сумму свободного магнетизма M.

Таким образом, получаем уравнение

$$\iint (l\alpha+m\beta+n\gamma)dS=4\pi M. \tag{12}$$

Так как каждая магнитная частица имеет два полюса одинаковой величины и противоположных знаков, алгебраическая сумма магнетизма частицы равна нулю. Поэтому частицы, которые целиком находятся внутри замкнутой поверхности S, не могут дать вклада в алгебраическую сумму магнетизма внутри S, т. е. величина M должна зависеть только от магнитных частиц, которые рассечены поверхностью S.

Рассмотрим маленький элемент магнита длиной s с поперечным сечением k^2, намагниченный в направлении его длины так, что мощность его полюсов равна m. Момент этого небольшого магнита равен ms, а намагниченность, равная отношению магнитного момента к объему,

$$I=m/k^2. \tag{13}$$

Пусть этот маленький магнит так рассечен поверхностью S, что направление намагниченности образует с наружной нормалью к поверхности угол ε'; тогда, если обозначить через dS площадь сечения,

$$k^2=dS\cos\varepsilon'. \tag{14}$$

Отрицательный полюс этого магнита $-m$ находится внутри поверхности S.

Следовательно, если обозначить через dM вклад этого маленького магнита в ту часть свободного магнетизма, которая находится внутри S, то

$$dM=-m=-Ik^2=-I\cos\varepsilon' dS. \tag{15}$$

Для того чтобы найти алгебраическую сумму свободного магнетизма M внутри замкнутой поверхности S, необходимо проинтегрировать это выражение по замкнутой поверхности S:

$$M=-\iint I\cos\varepsilon' dS,$$

или через составляющие намагниченности A, B, C и направляющие косинусы наружной нормали l, m, n:

$$M=-\iint (lA+mB+nC)\,dS. \tag{16}$$

Это дает значение интеграла во втором члене правой части уравнения (11). Величину Q в (11) можно, таким образом, найти, используя уравнения (12) и (16):

$$Q=4\pi M-4\pi M=0, \tag{17}$$

или *интеграл от магнитной индукции, взятый по произвольной замкнутой поверхности, равен нулю.*

403. Если предположить, что замкнутая поверхность есть поверхность дифференциального элемента объема $dx\,dy\,dz$, мы получим уравнение

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \tag{18}$$

Это есть условие соленоидальности, которому всегда удовлетворяют составляющие магнитной индукции.

Так как распределение магнитной индукции соленоидально, то поток индукции через любую поверхность, ограниченную замкнутой кривой, зависит только от формы и положения этой замкнутой кривой и не зависит от формы и положения самой поверхности.

404. Поверхности, во всех точках которых

$$la+mb+nc=0, \tag{19}$$

называются поверхностями с нулевым потоком индукции, а пересечение двух этих поверхностей называется линией индукции. Условия, при которых некоторая кривая s может быть линией индукции, таковы:

$$\frac{1}{a}\frac{dx}{ds}=\frac{1}{b}\frac{dy}{ds}=\frac{1}{c}\frac{dz}{ds}. \tag{20}$$

Совокупность линий индукции, проведенных через каждую точку замкнутой кривой, образует трубчатую поверхность, называемую трубкой индукции.

Поток индукции через любое сечение такой трубки одинаков. Если поток индукции в трубке равен единице, она называется единичной трубкой индукции.

Все, что Фарадей[2] говорит о магнитных силовых линиях и магнитных «спондилоидах» (sphondiloids), математически верно, если под ними понимать линии и трубки магнитной индукции.

Вне магнита магнитная сила и магнитная индукция совпадают, однако внутри вещества магнита их следует тщательно различать.

В случае прямого однородно намагниченного стержня магнитная сила, создаваемая самим магнитом, направлена от конца, указывающего на север (мы называем его положительным полюсом), к южному концу (отрицательному полюсу) как внутри магнита, так и вне его.

С другой стороны, магнитная индукция вне магнита тоже направлена от положительного полюса к отрицательному, но внутри магнита — от отрицательного полюса к положительному, так что линии и трубки индукции образуют сами в себя входящие, или замкнутые, кривые.

Важность магнитной индукции как физического понятия будет видна более отчетливо при изучении электромагнитных явлений. Когда магнитное поле создается движущимся проводом, как в опытах Фарадея {*Exp. Res.* 3076), непосредственно измеряемой величиной является именно магнитная индукция, а не магнитная сила.

Вектор-потенциал магнитной индукции

405. Как показано в п. 403, поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную замкнутой кривой, зависит от этой кривой, но не зависит от формы ограничиваемой ею поверхности; поэтому должен существовать способ определения потока индукции внутри замкнутой кривой с помощью процедуры, зависящей только от характера кривой и не включающей конструкцию поверхности, которая диафрагмирует эту кривую.

Это можно сделать, отыскав вектор $\mathfrak{A}$, связанный с магнитной индукией $\mathfrak{B}$

[2] *Exp. Res.*, series XXVIII.

таким образом, чтобы линейный интеграл от $\mathfrak{A}$ по замкнутой кривой был равен поверхностному интегралу от $\mathfrak{B}$ по поверхности, ограниченной этой кривой.

Обозначив, как и в п. 24, через F, G, H составляющие $\mathfrak{A}$, через a, b, c составляющие $\mathfrak{B}$, получим между ними следующую связь:

$$a=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}, \quad b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}, \quad c=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}. \tag{21}$$

Вектор $\mathfrak{A}$ с составляющими F, G, H называется вектор-потенциалом магнитной индукции.

Поместим в начало координат магнитную молекулу с моментом m и направлением оси намагниченности (λ, μ, ν). Согласно п. 387, ее потенциал в точке (x, y, z), на расстоянии r от начала координат будет равен

$$-m\left(\lambda\frac{d}{dx}+\mu\frac{d}{dy}+\nu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r};$$

$$c=m\left(\lambda\frac{d^2}{dx\,dz}+\mu\frac{d^2}{dy\,dz}+\nu\frac{d^2}{dz^2}\right)\frac{1}{r}.$$

С помощью уравнения Лапласа последнему выражению можно придать вид

$$m\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d}{dz}-\nu\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{r}-m\frac{d}{dy}\left(\nu\frac{d}{dy}-\mu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r}.$$

Аналогично можно преобразовать величины a, b.

Следовательно,

$$F=m\left(\nu\frac{d}{dy}-\mu\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{r}=\frac{m(\mu z-\nu y)}{r^3}.$$

Составляющие G, H можно получить из этого выражения, руководствуясь симметрией. Таким образом, вектор-потенциал в данной точке, создаваемый намагниченной частицей, помещенной в начало координат, численно равен магнитному моменту этой частицы, деленному на квадрат радиус-вектора и умноженному на синус угла между осью намагниченности и радиус-вектором; направление вектор-потенциала перпендикулярно плоскости оси намагниченности и радиус-вектора, причем если смотреть в положительном направлении оси намагниченности, то вектор-потенциал указывает в направлении движения часовой стрелки.

Следовательно, для магнита произвольной формы с составляющими намагниченности A, B, C в точке (x, y, z) составляющие вектор-потенциала в точке (ξ, η, ζ) равны

$$\begin{aligned} F&=\iiint\left(B\frac{dp}{dz}-C\frac{dp}{dy}\right)dx\,dy\,dz,\\ G&=\iiint\left(C\frac{dp}{dx}-A\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz,\\ H&=\iiint\left(A\frac{dp}{dy}-B\frac{dp}{dx}\right)dx\,dy\,dz, \end{aligned} \tag{22}$$

где через p для краткости обозначено обратное расстояние между точками (ξ, η, ζ) и (x, y, z), а интегрирование распространяется на весь объем, занятый магнитом.

406. Скалярный, или обычный, потенциал магнитной силы, введенный в п. 385, в этих обозначениях принимает вид

$$V=\iiint\left(A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \tag{23}$$

Помня, что $(dp/dx)=-(dp/d\xi)$ и что интеграл

$$\iiint A\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz$$

равен $-4\pi(A)$, когда точка (ξ, η, ζ) находится внутри объема интегрирования, и нулю, когда она вне его, где (A) — значение A в точке (ξ, η, ζ), получаем для x-составляющей магнитной индукции

$$\begin{aligned}\alpha=\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}&=\iiint\left\{A\left(\frac{d^2p}{dy\,d\eta}+\frac{d^2p}{dz\,d\zeta}\right)-B\frac{d^2p}{dx\,d\eta}-C\frac{d^2p}{dx\,d\zeta}\right\}dx\,dy\,dz=\\&=-\frac{d}{d\xi}\iiint\left\{A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right\}dx\,dy\,dz-\\&\quad-\iiint A\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{24}$$

Первый член этого выражения равен, очевидно,— $dV/d\xi$ или составляющей магнитной силы α.

Величина же, стоящая под знаком интеграла во втором члене, равна нулю для любого элемента объема, кроме того, в котором находится точка (ξ, η, ζ). Легко показать, что второй член равен $4\pi(A)$, где (A) — значение A в точке (ξ, η, ζ); во всех точках вне магнита величина (A) равна нулю.

Теперь можно x-составляющую магнитной индукции записать в виде

$$a=\alpha+4\pi(A), \tag{25}$$

что равнозначно первому из уравнений, приведенных в п. 400; уравнения для b и c также совпадают с соответствующими уравнениями п. 400.

Как мы уже видели, магнитная сила вычисляется через скалярный потенциал V путем применения к нему оператора Гамильтона ∇; следуя п. 17, можно записать

$$\mathfrak{H}=-\nabla V, \tag{26}$$

это уравнение справедливо как вне, так и внутри магнита.

Из проведенных сейчас исследований явствует, что магнитная индукция вычисляется через вектор-потенциал $\mathfrak{A}$ путем применения к нему того же самого оператора; и этот результат справедлив внутри магнита так же, как вне его.

Применение этого оператора к векторной функции может дать в общем случае и скалярную и векторную величину. Однако скалярная часть, названная нами конвергенцией векторной функции, исчезает, если векторная функция удовлетворяет условию соленоидальности

$$\frac{dF}{d\xi}+\frac{dG}{d\eta}+\frac{dH}{d\zeta}=0. \tag{27}$$

Дифференцируя выражения (22) для F, G, H, убеждаемся, что эти величины удовлетворяют условию соленоидальности.

Таким образом, мы можем записать между магнитной индукцией и ее вектор-потенциалом:

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A},$$

которую можно выразить такими словами: магнитная индукция является вихрем (ротором) своего вектор-потенциала, см. п. 25.

ГЛАВА III

МАГНИТНЫЕ СОЛЕНОИДЫ И МАГНИТНЫЕ ОБОЛОЧКИ[1]

О частных формах магнитов

407. Если длинная тонкая нить из магнитной материи, напоминающая проволоку, всюду является намагниченной в продольном направлении, то произведение любого ее поперечного сечения на интенсивность намагниченности, среднюю по этому сечению, называется мощностью магнита в этом сечении. Если бы нить оказалась разрезанной на две части без изменения ее намагниченности, то на двух поверхностях разреза после их разделения обнаружилось бы наличие равных и противоположных величин поверхностной намагниченности, численно совпадающих с мощностью магнита в данном сечении.

Нить магнитной материи, намагниченная таким образом, что ее мощность в любом произвольно по длине нити проведенном сечении одинакова, называется Магнитным Соленоидом.

Если m — мощность соленоида, ds — элемент его длины, причем s отсчитывается от отрицательного полюса магнита к положительному, r — расстояние от данной точки до этого элемента, ε — угол, который образует r с осью намагниченности элемента, то потенциал, обусловленный элементом магнита в данной точке, равен

$$\frac{m\,ds \cos\varepsilon}{r^2} = -\frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}ds.$$

Чтобы учесть все элементы соленоида, проинтегрируем это выражение по s; потенциал будет равен

$$V = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния от положительного и отрицательного концов соленоида до точки, где измеряется V.

Таким образом, обусловленный соленоидом потенциал и, следовательно, все связанные с ним магнитные эффекты зависят только от его мощности и положе-

---

[1] См. работу сэра У. Томсона «Математическая теория магнетизма» (W. Thomson «Mathematical Theory of Magnetism»). См. *Phil. Trans.*, June 1849 and June 1850 или *Reprint* of Papers on Electrostatics and Magnetism, p. 340.

ния концов соленоида и совсем не зависят от формы соленоида между конечными точками, т. е. от того, является ли он прямым или изогнутым.

Поэтому концы соленоида можно назвать его полюсами в строгом смысле этого слова.

Если соленоид образует замкнутую кривую, то обусловленный им потенциал равен нулю в любой точке; такой соленоид не проявляет никакого магнитного действия, и его намагниченность нельзя обнаружить без разламывания его в какой-либо точке и разнесения концов.

Если магнит можно разделить на отдельные соленоиды, каждый из которых либо образует замкнутую кривую, либо выходит своими концами на внешнюю поверхность магнита, то про его намагниченность говорят, что она является соленоидальной; поскольку действие магнита целиком определяется концами соленоидов, распределение воображаемой магнитной материи будет чисто поверхностным.

Следовательно, условие соленоидальности намагниченности будет таким:

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}=0,$$

где A, B, C — составляющие намагниченности в произвольной точке магнита.

408. Продольно намагниченную нить, мощность которой различна на разных участках ее длины, можно считать изготовленной из пучка соленоидов различной длины; при этом сумма мощностей всех соленоидов, проходящих через данное сечение нити, является магнитной мощностью нити в этом сечении. Поэтому любую продольно намагниченную нить можно назвать Сложным Соленоидом.

Если мощность сложного соленоида в произвольном сечении равна m, то потенциал, обусловленный его действием, равен

$$V=-\int\frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}ds, \quad \text{где } m \text{ — переменная величина,}$$

$$=\frac{m_1}{r_1}-\frac{m_2}{r_2}-\int\frac{1}{r}\frac{dm}{ds}ds.$$

Отсюда видно, что кроме действия двух концов, которые в этом случае могут иметь разные мощности, появляется еще и действие, связанное с распределением воображаемой магнитной материи вдоль нити с линейной плотностью: $\lambda=-(dm/ds)$.

Магнитные оболочки

409. Если тонкая оболочка магнитного вещества намагничена повсюду в направлении, нормальном к ее поверхности, то произведение интенсивности намагниченности в произвольном месте на толщину пленки в том же месте называется Мощностью магнитной оболочки в этом месте.

Если мощность оболочки повсюду одинакова, то она называется Простой магнитной оболочкой; если же мощность меняется от точки к точке, то такую оболочку можно считать составленной из нескольких наложенных друг на друга перекрывающихся простых оболочек. Поэтому она называется Сложной магнитной оболочкой.

Пусть dS является элементом поверхности оболочки мощности Φ, находящимся в точке Q; тогда потенциал в произвольной точке P, обусловленный этим элементом, равен

$$dV = \Phi \frac{1}{r^2} dS \cos \varepsilon,$$

где ε — угол между вектором QP (или r) и внешней нормалью, выходящей из положительной стороны оболочки.

Но если $d\omega$ есть телесный угол с вершиной в точке P, опирающийся на элемент dS, то $r^2 d\omega = dS \cos \varepsilon$, отсюда $dV = \Phi\, d\omega$, и, следовательно, в случае простой магнитной оболочки имеем $V = \Phi\omega$, или потенциал в произвольной точке, обусловленный магнитной оболочкой, равен произведению ее мощности на телесный угол с вершиной в этой точке, опирающийся на край оболочки [2].

410. Этот же результат можно получить другим путем, предположив, что магнитная оболочка помещена в произвольное поле магнитной силы, и определив потенциальную энергию, связанную с положением оболочки.

Если V — потенциал на элементе dS, то энергия, связанная с этим элементом, равна

$$\Phi \left(l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz} \right) dS,$$

или *произведению мощности оболочки на часть поверхностного интеграла от* $dV/d\nu$, *связанную с элементом* dS *оболочки.*

Следовательно, интегрируя по всем таким элементам, мы получим, что энергия, обусловленная положением оболочки в поле, равна произведению мощности оболочки на поверхностный интеграл от магнитной индукции, взятый по поверхности оболочки.

Так как для любых двух поверхностей, имеющих одну и ту же границу и не содержащих между собой какого-нибудь центра силы, поверхностный интеграл одинаков, то действие магнитной оболочки зависит только от формы ее границы.

Предположим теперь, что поле силы создается магнитным полюсом мощности m. Мы уже видели (п. 76), что поверхностный интеграл по поверхности, ограниченной заданной кривой, равен произведению мощности полюса на телесный угол с вершиной в точке полюса, опирающийся на эту границу. Поэтому энергия взаимодействия полюса и оболочки равна $\Phi m\omega$, а это, по теореме Грина, равно произведению мощности полюса на потенциал, обусловленный оболочкой в точке полюса. Таким образом, потенциал обусловленный оболочкой, равен $\Phi\omega$.

411. Если магнитный полюс m из точки, находящейся на отрицательной стороне поверхности, начинает перемещаться по произвольному пути в пространстве и, обогнув край оболочки, возвращается в точку близкую к начальной, но уже находящуюся на положительной стороне оболочки, то телесный угол будет непрерывно меняться и возрастет в процессе обхода на 4π. Работа, совершенная полюсом, окажется равной $4\pi\Phi m$, а потенциал в произвольной точке на положительной стороне оболочки будет превышать потенциал в соседней к ней точке, находящейся на отрицательной стороне, на величину $4\pi\Phi$.

---

[2] Этой теоремой мы обязаны Гауссу,— *General Theory of Terrestrial* Magnetism, § 38.

Если магнитная оболочка образует замкнутую поверхность, потенциал вне ее всюду равен нулю, а в пространстве внутри нее — всюду равен $4\pi\Phi$, будучи положительным, когда оболочка обращена внутрь положительной стороной. Следовательно, такая оболочка не оказывает действия на магнит, помещенный внутри нее или снаружи.

412. Если магнит можно разделить на простые магнитные оболочки, либо замкнутые, либо выходящие своими краями на поверхность магнита, то распределение магнетизма называется Слоистым (ламеллярным). Если φ — сумма мощностей всех оболочек, пересекаемых движущейся точкой при ее перемещении по линии, расположенной внутри магнита, от заданной точки до точки (x, y, z), то условия ламеллярности таковы: $A=d\varphi/dx$, $B=d\varphi/dy$, $C=d\varphi/dz$.

Величину φ, которая таким образом, полностью определяет намагниченность в любой точке, можно назвать Потенциалом Намагниченности. Его следует тщательно отличать от Магнитного Потенциала.

413. Про магнит, который можно разделить на сложные магнитные оболочки, говорят, что он имеет сложное ламеллярное распределение магнетизма. Условие такого распределения состоит в том, чтобы линии намагниченности допускали построение системы поверхностей, пересекающих их под прямым углом; это выражается хорошо известным уравнением

$$A\left(\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dz}\right)+B\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)+C\left(\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}\right)=0.$$

Вид потенциалов соленоидальных и ламеллярных магнитов

414. Общее выражение для скалярного потенциала магнита имеет вид

$$V=\iiint\left(A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

где p обозначает потенциал, создаваемый в точке (x, y, z) единичным магнитным полюсом, помещенным в (ξ, η, ζ), или, другими словами, обратное расстояние между точкой (ξ, η, ζ), в которой измеряется потенциал, и точкой (x, y, z), в которой расположен элемент магнита, создающий этот потенциал.

Это выражение можно проинтегрировать по частям, как в п. 96, 386:

$$V=\iint p(Al+Bm+Cn)\,dS-\iiint p\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали, проведенной наружу от элемента поверхности магнита dS.

В случае соленоидального магнита выражение под знаком интеграла во втором члене равно нулю для всех точек внутри магнита, так что тройной интеграл равен нулю, а скалярный потенциал в любой точке как вне, так и внутри магнита задается поверхностным интегралом, стоящим в первом члене.

Таким образом, скалярный потенциал соленоидального магнита полностью определен, если в каждой точке поверхности известна нормальная составляющая намагниченности, и этот потенциал не зависит от формы соленоидов внутри магнита.

415. В случае ламеллярного магнита намагниченность определяется потенциалом намагниченности φ, так что $A=d\varphi/dx$, $B=d\varphi/dy$, $C=d\varphi/dz$.

Выражение для V можно поэтому переписать в виде

$$V=\iiint\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dp}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

Интегрируя это выражение по частям, находим

$$V=\iint\varphi\left(l\frac{dp}{dx}+m\frac{dp}{dy}+n\frac{dp}{dz}\right)dS-\iiint\varphi\left(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Второй член равен нулю, если точка (ξ, η, ζ) не принадлежит магниту, в противном случае он равен $4\pi\varphi$, где φ — значение φ в точке (ξ, η, ζ). Поверхностный интеграл можно выразить через величину r, равную длине отрезка между точками (x, y, z) и (ξ, η, ζ), и через угол ϑ, который этот отрезок образует с внешней нормалью к элементу поверхности dS, так что потенциал можно записать в виде

$$V=\iint\frac{1}{r^2}\varphi\cos\vartheta\,dS+4\pi(\varphi),$$

где второй член, конечно, равен нулю, если точка (ξ, η, ζ), не принадлежит веществу магнита.

Потенциал V, выражаемый этим уравнением, непрерывен даже на поверхности магнита, где значение φ скачком обращается в нуль, потому что, если записать

$$\Omega=\iint\frac{1}{r^2}\varphi\cos\vartheta\,dS$$

и обозначить через Ω_1 значение Ω в точке, непосредственно находящейся на поверхности, а Ω_2— значение Ω в точке, близкой к первой, но вне поверхности, то

$$\Omega_2=\Omega_1+4\pi(\varphi),\quad \text{или}\quad V_2=V_1.$$

Величина Ω не является непрерывной на поверхности магнита.

Составляющие магнитной индукции связаны с Ω уравнениями

$$a=-(d\Omega/dx),\qquad b=-(d\Omega/dy),\qquad c=-(d\Omega/dz).$$

416. В случае ламеллярного распределения магнетизма мы можем упростить также и вектор-потенциал магнитной индукции.

Его x-составляющую можно записать:

$$F=\iiint\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{dp}{dz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{dp}{dy}\right)dx\,dy\,dz.$$

Интегрируя по частям, мы можем представить это в виде поверхностного интеграла:

$$F=\iint\varphi\left(m\frac{dp}{dz}-n\frac{dp}{dy}\right)dS,$$

или

$$F=-\iint p\left(m\frac{d\varphi}{dz}-n\frac{d\varphi}{dy}\right)dS.$$

Остальные составляющие вектор-потенциала можно получить, сделав соответствующие замены в этих выражениях.

О телесных углах

417. Мы уже доказали, что потенциал, создаваемый магнитной оболочкой в произвольной точке P, равен мощности оболочки, умноженной на телесный угол, опирающийся на ее край. Поскольку нам придется еще раз обратиться к телесным углам в теории электрических токов, мы сейчас объясним, как их можно измерять.

Определение. Телесный угол с вершиной в данной точке, опирающийся на замкнутую кривую, измеряется площадью сферической поверхности единичного радиуса с центром в данной точке, границей которой служит след пересечения сферы с радиус-вектором при его движении по замкнутой кривой. Эта площадь должна считаться положительной или отрицательной в соответствии с тем, лежит ли она по левую или по правую сторону относительно движения радиус-вектора, видимого из данной точки.

Обозначим заданную точку через (ξ, η, ζ), а точку на замкнутой кривой через (x, y, z). Координаты x, y, z являются функциями длины кривой s, отсчитываемой от некоторой точки, причем периодическими функциями s, восстанавливающими свои значения при увеличении s на полную длину замкнутой кривой.

Мы можем вычислить телесный угол непосредственно из его определения следующим образом. Используя сферические координаты с центром в (ξ, η, ζ) и полагая

$$x-\xi=r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y-\eta=r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z-\zeta=r\cos\vartheta,$$

найдем путем интегрирования площадь внутри произвольной кривой на сфере: $\omega=\int(1-\cos\vartheta)\,d\varphi$, или в прямоугольных координатах

$$\omega=\int d\varphi-\int\limits_0^s\frac{z-\zeta}{r\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}}\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds}-(y-\eta)\frac{dx}{ds}\right]ds,$$

где интегрирование производится по замкнутой кривой s.

Если ось z проходит один раз сквозь замкнутую кривую, то первый член равен 2π. Если же ось z не проходит сквозь нее, первый член равен нулю.

418. Этот метод вычисления телесного угла содержит произвольный до некоторой степени выбор оси и не зависит только лишь от вида замкнутой кривой. Поэтому для геометрической строгости уместно предложить следующий метод, в котором не предусматривается построение никаких поверхностей. Пусть по мере того как радиус-вектор, выходящий из данной точки, описывает замкнутую кривую, плоскость, проходящая через эту точку, катится по замкнутой кривой таким образом, что последовательно становится касательной плоскостью в каждой точке кривой. Проведем из данной точки перпендикулярно этой плоскости отрезок единичной длины. При качении плоскости по замкнутой кривой конец перпендикуляра описывает вторую замкнутую кривую, полярную по отношению к первой. Пусть ее длина равна σ, тогда телесный угол, опирающийся на первую кривую, будет равен $\omega=2\pi-\sigma$.

Это следует из хорошо известной теоремы о том, что площадь, ограниченная замкнутой кривой на сфере единичного радиуса, вместе с периметром полярной кривой численно равны длине большой окружности сферы.

Такое построение удобно иногда для вычисления телесного угла, опирающе-

гося на контур, составленный из отрезков прямых. Для нашей цели, которая состоит в формировании ясных представлений о физических явлениях, более предпочтителен метод, излагаемый далее, поскольку в нем не используется никаких построений, не вытекающих непосредственно из физических данных о проблеме.

419. Замкнутая кривая s задана в пространстве, и мы должны найти телесный угол с вершиной в точке P, опирающийся на s.

Если рассматривать телесный угол как потенциал магнитной оболочки, край которой совпадает с замкнутой кривой и мощность которой равна единице, мы должны определить этот угол как работу, совершаемую единичным магнитным полюсом против магнитной силы при его перемещении из бесконечности в точку P. Следовательно, потенциал должен быть результатом криволинейного интегрирования вдоль пути σ, по которому полюс приближается к точке P. Но он также должен быть результатом криволинейного интегрирования по замкнутой кривой s. Поэтому соответствующее выражение для телесного угла должно иметь вид двойного интеграла по двум кривым s и σ.

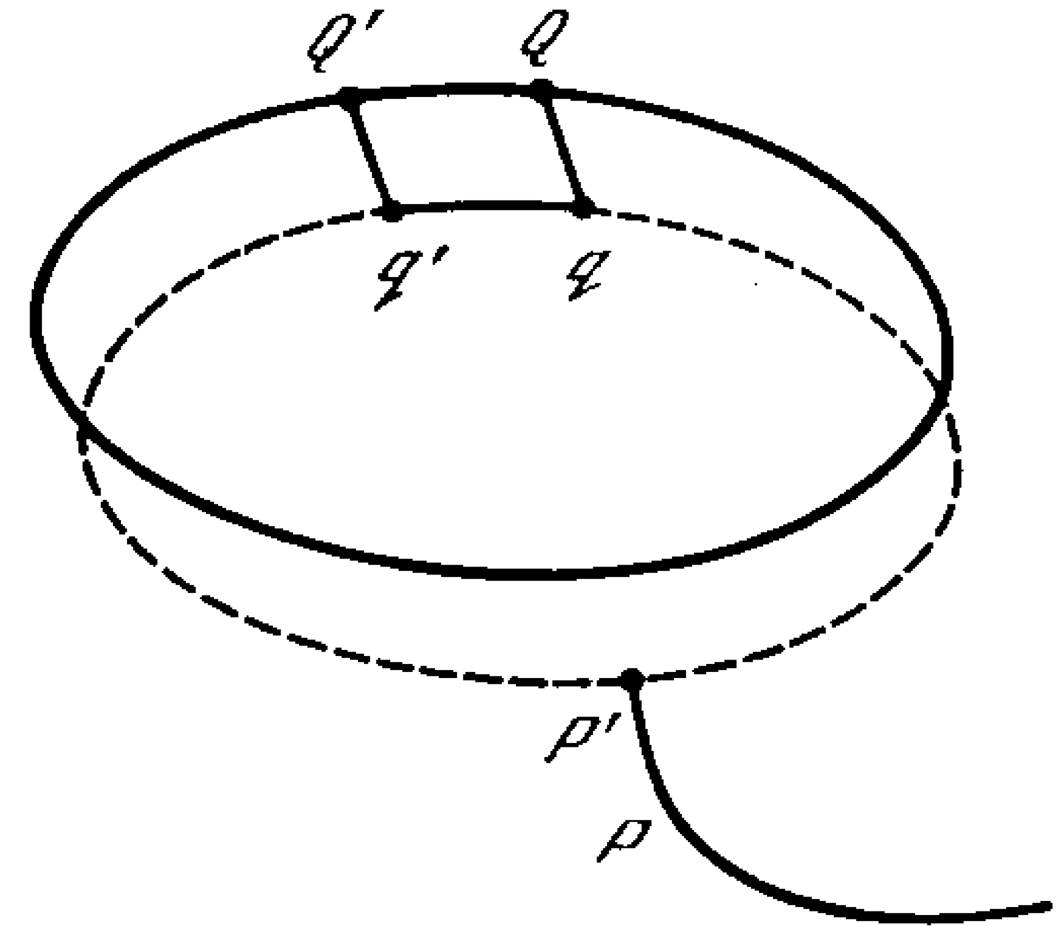


Рис. 3

Когда точка P находится на бесконечном расстоянии, телесный угол, очевидно, равен нулю. По мере приближения точки P замкнутая кривая, если смотреть на нее из движущейся точки, будет казаться раскрывающейся, и можно представлять себе, что полный телесный угол образуется в результате кажущегося перемещения различных элементов замкнутой кривой по мере приближения к ней движущейся точки P.

При движении точки P от P к P' вдоль элемента $d\sigma$ элемент замкнутой кривой QQ', который мы обозначим через ds, будет изменять свое положение относительно P, и линия на единичной сфере, соответствующая QQ', прочертит на сферической поверхности некоторую площадь, которую можно записать так [рис. 3]:

$$d\omega = \Pi\, ds d\sigma. \tag{1}$$

Чтобы найти Π, предположим, что точка P неподвижна, а замкнутая кривая перемещается параллельно самой себе на расстояние $d\sigma$, равное PP', но в противоположном направлении. При этом относительное движение точки P будет таким же, как и в действительности.

Во время этого движения элемент QQ' прочертит площадь в виде параллелограмма, стороны которого параллельны и равны QQ' и PP'. Если, взяв этот параллелограмм в качестве основания, построить пирамиду с вершиной в точке P, то телесный угол этой пирамиды будет равен искомому приращению $d\omega$.

Для того чтобы определить значение этого телесного угла, обозначим через ϑ и ϑ' углы, которые образуют соответственно ds и $d\sigma$ с PQ, через φ — угол между плоскостями этих углов. Тогда площадь проекции параллелограмма $ds\, d\sigma$ на плоскость, перпендикулярную PQ или r, будет равна $ds\, d\sigma \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin\varphi$, и, поскольку она равна $r^2\, d\omega$, находим

$$d\omega = \Pi ds d\sigma = (1/r^2) \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin\varphi\, ds d\sigma. \tag{2}$$

Откуда

$$\Pi=(1/r^2)\sin\vartheta\sin\vartheta'\sin\varphi. \qquad (3)$$

420. Мы можем выразить углы ϑ, ϑ' и φ через r и его производные по s и σ:

$$\cos\vartheta=\frac{dr}{ds},\qquad \cos\vartheta'=\frac{dr}{d\sigma},\qquad \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi=r\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}. \qquad (4)$$

Для Π^2, таким образом, находим следующее выражение:

$$\Pi^2=\frac{1}{r^4}\left[1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right]-\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}\right)^2. \qquad (5)$$

Третье выражение для Π через прямоугольные координаты можно вывести, исходя из того соображения, что объем пирамиды с телесным углом $d\omega$ и стороной r равен

$$\frac{1}{3}r^3d\omega=\frac{1}{3}r^3\Pi\,ds\,d\sigma.$$

Но объем этой же пирамиды можно выразить также через проекции r, ds и $d\sigma$ на оси x, y, и z: он равен одной трети детерминанта, образованного из этих девяти проекций. Таким образом, для значения Π находим

$$\Pi=-\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix}\xi-x & \eta-y, & \zeta-z,\\ \frac{d\xi}{d\sigma}, & \frac{d\eta}{d\sigma}, & \frac{d\zeta}{d\sigma},\\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds}.\end{vmatrix} \qquad (6)$$

Это выражение дает значение Π, лишенное неоднозначности в выборе знака, внесенной уравнением (5).

421. Теперь для телесного угла ω с вершиной в точке P, опирающегося на замкнутую кривую, можно записать

$$\omega=\iint\Pi\,ds\,d\sigma+\omega_0, \qquad (7)$$

где интегрирование по s производится по всей замкнутой кривой, а по σ — от некоторой фиксированной точки A до точки P. Константа ω_0 равна значению телесного угла в точке A. Она обращается в нуль, если точка A находится на бесконечном расстоянии от замкнутой кривой.

Значение ω в произвольной точке P не зависит от формы кривой между точками A и P при условии, что эта кривая не проходит через саму магнитную оболочку. Если оболочка предполагается бесконечно тонкой, а точки P и P' расположенными рядом, но P — на положительной стороне оболочки, а P' — на отрицательной, то кривые AP и AP' должны лежать по разные стороны от края оболочки, так что линия PAP' вместе с бесконечно короткой линией $P'P$ образует замкнутый контур, охватывающий край оболочки. Значение ω в точке P превышает значение ω в точке P' на 4π, т. е. на величину поверхности сферы единичного радиуса.

Поэтому, если замкнутая кривая проведена так, что она проходит сквозь оболочку один раз, или, другими словами, является однократно сцепленной с ее

краем, то значение интеграла $\iint \Pi ds d\sigma$, взятого по обеим замкнутым кривым, равно 4π.

Следовательно, этот интеграл, зависящий только от замкнутой кривой s и произвольной кривой AP, является примером многозначной функции, так как, если переходить из A в P различными путями, интеграл будет принимать различные значения в соответствии с тем, сколько раз кривая AP обернется вокруг кривой s.

Если одна кривая между точками A и P может быть трансформирована в другую непрерывным ее перемещением без пересечения кривой s, то интеграл будет иметь одинаковые значения для обеих кривых; если же в процессе трансформации она пересечет замкнутую кривую n раз, значения интеграла будут отличаться на $4\pi n$.

Таким образом, для двух произвольных замкнутых в пространстве кривых s и σ, не сцепленных друг с другом, интеграл, взятый однократно по обеим кривым, равен нулю.

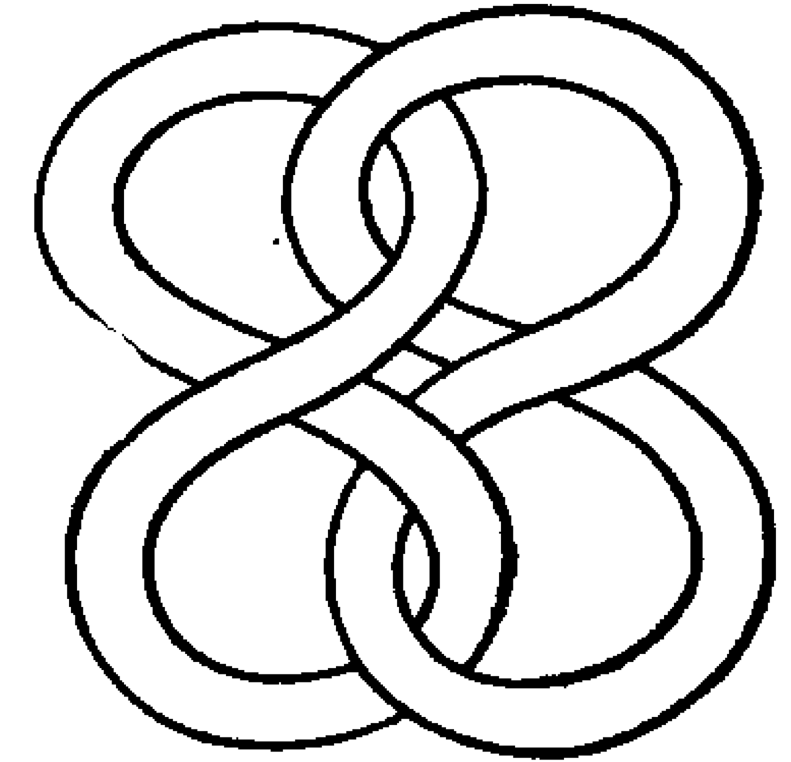


Рис. 4

Если же кривые охватывают друг друга n раз в одном и том же направлении, значение интеграла равно $4\pi n$. Возможно, однако, что две кривые охватывают друг друга попеременно в противоположных направлениях, оставаясь неразделимо сцепленными друг с другом при равном нулю значении интеграла, см. рис. 4.

Открытие Гауссом этого интеграла, выражающего работу, совершаемую магнитным полюсом при его движении по замкнутой кривой в присутствии замкнутого электрического тока, и характеризующего геометрическую связанность двух замкнутых кривых, побудило его сетовать на слабое развитие Геометрии Положений (топологии) со времен Лейбница, Эйлера и Вандермонда. Сейчас, однако, мы уже можем говорить о некотором прогрессе, обязанном Риману, Гельмгольцу и Листингу.

422. Исследуем теперь результат интегрирования по s вдоль замкнутой кривой. Один из членов, определяющих Π в уравнении (7), равен

$$-\frac{\xi-x}{r^3}\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{dz}{ds}=\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\right). \tag{8}$$

Для краткости запишем

$$F=\int\frac{1}{r}\frac{dx}{ds}ds, \quad G=\int\frac{1}{r}\frac{dy}{ds}ds, \quad H=\int\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}ds, \tag{9}$$

где интегралы берутся однократно по замкнутой кривой s; тогда этот член в выражении для Π можно представить в виде $(d\eta/d\sigma)\cdot(d^2H/d\xi ds)$, а соответствующий ему член в $\int \Pi ds$ будет $(d\eta/d\sigma)\,(dH/d\xi)$.

Собрав все члены, входящие в Π, мы можем теперь записать

$$-\frac{d\omega}{d\sigma}=-\int\Pi ds=\left(\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}\right)\frac{d\xi}{d\sigma}+\left(\frac{dF}{d\zeta}-\frac{dH}{d\xi}\right)\frac{d\eta}{d\sigma}+\left(\frac{dG}{d\xi}\quad\frac{dF}{d\eta}\right)\frac{d\zeta}{d\sigma}. \tag{10}$$

Эта величина является, очевидно, скоростью уменьшения магнитного потенциала ω при прохождении вдоль кривой σ, или, другими словами, она представляет собой магнитную силу в направлении $d\sigma$.

Полагая элемент $d\sigma$ поочередно направленным вдоль осей x, y и z, для значений составляющих магнитной силы получим

$$\alpha=-\frac{d\omega}{d\xi}=\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}, \qquad \beta=-\frac{d\omega}{d\eta}=\frac{dF}{d\zeta}-\frac{dH}{d\xi}, \qquad \gamma=-\frac{d\omega}{d\zeta}=\frac{dG}{d\xi}-\frac{dF}{d\eta}. \tag{11}$$

Величины F, G, H являются составляющими вектор-потенциала магнитной оболочки единичной мощности, краем которой служит кривая s. В отличие от скалярного потенциала ω, они не относятся к функциям, принимающим целый ряд значений, а являются совершенно определенными для каждой точки пространства.

Вектор-потенциал, создаваемый в точке P магнитной оболочкой, ограниченной замкнутой кривой, можно найти путем следующих геометрических построений.

Пусть точка Q движется вдоль замкнутой кривой со скоростью, численно равной ее расстоянию от точки P, а вторая точка R выходит из некоторой фиксированной точки A и движется с единичной скоростью в направлении, всюду параллельном направлению движения Q. Когда точка Q обойдет один раз замкнутую кривую, соединим точки A и R отрезком прямой. Отрезок AR по направлению и по величине представляет собой вектор-потенциал, создаваемый замкнутой кривой в точке P.

Потенциальная энергия магнитной оболочки, помещенной в магнитное поле

423. Мы уже показали в п. 410, что потенциальная энергия оболочки с мощностью φ, помещенной в магнитное поле с потенциалом V, равна

$$M=\varphi\iint\left(l\frac{dV}{dx}+m\frac{dV}{dy}+n\frac{dV}{dz}\right)dS, \tag{12}$$

где l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к оболочке, проведенной наружу с положительной стороны; поверхностный интеграл берется по всей оболочке.

Этот поверхностный интеграл можно теперь преобразовать в криволинейный с помощью вектор-потенциала магнитного поля, записав

$$M=-\varphi\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{13}$$

где интегрирование производится однократно по замкнутой кривой s, ограничивающей магнитную оболочку, а ds направлено против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оболочки.

Если предположить теперь, что магнитное поле создается второй магнитной оболочкой, имеющей мощность φ', то можно определить величину F непосредственно из результатов п. 416 или из п. 405.

Если l', m', n' — направляющие косинусы нормали к элементу второй оболочки, то мы имеем

$$F=\varphi'\iint\left(m'\frac{d}{dz'}\frac{1}{r}-n'\frac{d}{dy'}\frac{1}{r}\right)dS',$$

где r — расстояние между элементом dS' и точкой на границе первой оболочки.

Далее этот поверхностный интеграл также можно преобразовать в криволинейный, взятый по границе второй оболочки, а именно

$$\varphi'\int\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'}ds'. \tag{14}$$

Аналогично $G=\varphi'\int\frac{1}{r}\frac{dy'}{ds'}ds'$, $H=\varphi'\int\frac{1}{r}\frac{dz'}{ds'}ds'$.

Подставляя эти величины в выражение для M, находим

$$M=-\varphi\varphi'\iint\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)dsds', \tag{15}$$

где интегрирование выполняется однократно по кривой s и однократно по s'. Это выражение дает потенциальную энергию, обусловленную взаимодействием двух оболочек, и, как это и должно быть, оно не изменяется от перестановки s и s'. Взятое с обратным знаком при мощности обеих оболочек, равной единице, это выражение называется потенциалом двух замкнутых кривых s и s'. Оно имеет большое значение в теории электрических токов. Если обозначить через ε угол между направлениями элементов ds и ds', можно записать потенциал s и s' в виде

$$\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}dsds'. \tag{16}$$

Очевидно, что эта величина имеет размерность длины.

ГЛАВА IV

ИНДУЦИРОВАННАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ

424. Среди исследуемых величин мы рассматривали до сих пор истинное распределение намагниченности в магните, как распределение, заданное в явном виде. При этом мы не делали никаких предположений относительно того, является ли эта намагниченность постоянной или временной, кроме тех мест в наших рассуждениях, где допускалось, что магнит разламывается на малые доли, или где считалось, что небольшие участки магнита удаляются из него таким способом, при котором намагниченность других его частей остается неизменной.

Теперь мы должны рассмотреть намагниченность тел с точки зрения способов ее создания или изменения. Установлено, что железный стержень, удерживаемый параллельно направлению земной магнитной силы, становится магнитом с полюсами, повернутыми противоположно полюсам Земли, т. е. направленными так же, как полюса стрелки компаса в устойчивом равновесии.

Обнаружено, что любой кусок мягкого железа, помещенный в магнитное поле, проявляет магнитные свойства. Если его поместить в такой участок поля, где магнитная сила велика, как, например, между полюсами подковообразного маг-

нита, то намагниченность железа становится интенсивной. При удалении железа из магнитного поля его магнитные свойства сильно ослабевают или исчезают полностью. Если магнитные свойства железа целиком определяются магнитной силой поля, в которое оно помещено, и исчезают при удалении из этого поля, то такое железо называют Мягким. Железо, мягкое в магнитном смысле, является мягким и буквально тоже: оно легко сгибается, принимает заданную форму, но с трудом разламывается.

Железо, сохраняющее магнитные свойства при удалении из магнитного поля, называется твердым. Оно не переходит в магнитное состояние с той податливостью, которая характерна для мягкого железа, но ковка или любой другой вид вибрации позволяет твердому железу под влиянием магнитной силы легче осуществлять переход в магнитное состояние и легче расставаться с этим состоянием при удалении намагничивающей силы. Магнитно-твердое железо обладает одновременно большей сопротивляемостью к изгибам и большей способностью к разломам.

Процессы ковки, прокатывания, растягивания и быстрого охлаждения способствуют повышению твердости железа, а процесс отжига способствует его размягчению.

И магнитные, и механические различия между сталью твердой и мягкой закалки гораздо больше, чем между твердым и мягким железом. Мягкая сталь намагничивается и размягчается почти так же легко, как железо, зато самая твердая сталь служит наилучшим материалом для магнитов, которые мы хотели бы сделать постоянными.

Чугун, хотя и содержит больше углерода, чем сталь, не так хорошо сохраняет магнетизм.

Если бы удалось сделать такой магнит, у которого распределение намагниченности не изменялось бы под действием любой приложенной магнитной силы, этот магнит можно было бы назвать жестко намагниченным телом. Единственным известным телом, удовлетворяющим этому условию, является проводящий контур, в котором поддерживается постоянный электрический ток.

Такой контур проявляет магнитные свойства, и поэтому он может быть назван электромагнитом; эти магнитные свойства не подвержены влиянию со стороны других магнитных сил в поле. К этому вопросу мы вернемся еще в IV части.

Все же реальные магниты независимо от того, изготовлены ли они из закаленной стали или магнитного железняка, подвержены, как выяснилось, влиянию любой магнитной силы, приложенной к ним.

Для научных целей удобно различать постоянную и временную намагниченность, определив постоянную намагниченность, как существующую независимо от магнитной силы, а временную намагниченность, как зависящую от этой силы. Следует заметить, однако, что это различие не основано на знании внутренней природы намагничивающихся веществ — это только выражение гипотезы, введенной ради выполнения расчетов, относящихся к данному явлению. Мы вернемся к физической теории намагниченности в главе VI.

425. Сейчас мы будем исследовать временную намагниченность в предположении, что намагниченность любой частицы вещества зависит только от магнитной силы, действующей на эту частицу. Эта магнитная сила может быть частично обусловлена внешними причинами, а частично временной намагниченностью соседних частиц.

Про тело, намагниченное посредством действия магнитной силы, говорят, что оно намагничено через индукцию, а про намагниченность такого тела говорят, что она индуцирована намагничивающей силой.

Намагниченность, индуцированная данной намагничивающей силой, в разных веществах различна. Она максимальна в самом чистом и мягком железе, где отношение намагниченности к магнитной силе может достигать значения 32 или даже 45 [1].

Другие вещества, такие, как металлы никель и кобальт, плохо поддаются намагничиванию, и все же под действием достаточно большой магнитной силы все вещества, как это было обнаружено, проявляют признаки полярности.

Когда направление намагниченности совпадает с направлением магнитной силы, как это имеет место в железе, никеле, кобальте и т. д., то такое вещество называется Парамагнитным, Ферромагнитным или просто Магнитным. Когда индуцированная намагниченность направлена противоположно магнитной силе, как это имеет место в висмуте и др., то про такое вещество говорят, что оно является Диамагнитным.

Во всех этих диамагнитных веществах отношение намагниченности к создающей ее магнитной силе чрезвычайно мало: в случае висмута, являющегося наиболее сильным диамагнитным веществом из числа известных, оно равно около 1/400 000.

В кристаллических, напряженных и органических веществах направление намагниченности не всегда совпадает с направлением создающей ее магнитной силы. Связь между составляющими намагниченности вдоль осей, связанных с телом, и составляющими магнитной силы можно выразить системой трех линейных уравнений. Мы покажем, что из девяти коэффициентов, входящих в эти уравнения, только шесть являются независимыми. Явления в телах такого рода фигурируют под названием Магнитокристаллических явлений.

При помещении в поле магнитной силы кристаллы стремятся установиться так, чтобы ось максимальной парамагнитной (или минимальной диамагнитной) индукции была параллельна линиям магнитной силы, см. п. 436.

В мягком железе направление намагниченности совпадает с направлением магнитной силы в точке, и при малых величинах магнитной силы намагниченность примерно пропорциональна ей. Однако с увеличением магнитной силы намагниченность возрастает более медленно и, как следует, по-видимому, из экспериментов, описанных в гл. VI, существует предельное значение намагниченности, которое она не может превысить при любой магнитной силе.

В приводимых далее некоторых элементах теории индуцированного магнетизма мы начнем с предположения о том, что намагниченность пропорциональна магнитной силе и направлена по одной линии с ней.

Определение коэффициента индуцированной намагниченности

426. Пусть $\mathfrak{H}$ — магнитная сила, определенная, как в п. 398, в каждой точке тела, а $\mathfrak{I}$ — намагниченность в этой точке; отношение $\mathfrak{I}$ к $\mathfrak{H}$ называется коэффициентом индуцированной намагниченности.

---

[1] Thalén, *Nova Acta, Reg. Soc. Sc.*, Upsal, 1863.

Обозначив этот коэффициент через $\varkappa$, запишем основное уравнение индуцированного магнетизма:

$$\mathfrak{I}=\varkappa\mathfrak{H}. \tag{1}$$

Коэффициент $\varkappa$ положителен для железа и парамагнитных веществ и отрицателен для висмута и диамагнитных веществ. В железе он достигает значения 1600, по некоторым сведениям он велик также для никеля и кобальта, но во всех остальных случаях это очень маленькая величина, не превышающая 0,00 001.

Сила $\mathfrak{H}$ возникает частично благодаря действию магнитов, внешних по отношению к телу, намагничиваемому по индукции, а частично благодаря индуцированной намагниченности самого этого тела. И обе эти составляющие удовлетворяют условию существования потенциала.

427. Пусть V является потенциалом, обусловленным внешним относительно тела магнетизмом, а Ω — потенциалом, связанным с индуцированной намагниченностью, тогда если U есть истинный потенциал, обусловленный обеими этими причинами, то

$$U=V+\Omega. \tag{2}$$

Пусть проекции магнитной силы $\mathfrak{H}$ на оси x, y, z равны α, β, γ, а проекции намагниченности $\mathfrak{I}$ — A, B, C, тогда согласно уравнению (1)

$$A=\varkappa\alpha,\quad B=\varkappa\beta,\quad C=\varkappa\gamma. \tag{3}$$

Умножив эти уравнения соответственно на dx, dy, dz и сложив, найдем

$$Adx+Bdy+Cdz=\varkappa\,(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz).$$

Но, поскольку α, β и γ получаются из потенциала U, мы можем записать второй член как $-\varkappa dU$.

Следовательно, если коэффициент $\varkappa$ всюду внутри вещества постоянен, то первый член также должен быть полным дифференциалом некоторой функции x, y и z, которую мы назовем φ, после чего уравнение принимает вид

$$d\varphi=-\varkappa dU, \tag{4}$$

где

$$A=d\varphi/dx,\qquad B=d\varphi/dy,\qquad C=d\varphi/dz. \tag{5}$$

Следовательно, по определению, принятому в п. 412, намагниченность является ламеллярной.

В п. 385 было показано, что объемная плотность свободного магнетизма ρ равна

$$\rho=-\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right),$$

или с учетом уравнений (3)

$$\rho=-\varkappa\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right).$$

Но из п. 77

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=-4\pi\rho.$$

Поэтому $(1+4\pi\varkappa)\rho=0$, откуда следует, что

$$\rho=0. \tag{6}$$

внутри всего вещества, и поэтому намагниченность оказывается и соленоидальной, и ламеллярной, см. п. 407.

Таким образом, свободного магнетизма нет нигде, кроме поверхности, ограничивающей тело. Если обозначить через ν нормаль, проведенную внутрь от поверхности, то магнитная поверхностная плотность будет равна

$$\sigma=-d\varphi/d\nu. \tag{7}$$

Поэтому потенциал Ω в произвольной точке, создаваемый этой намагниченностью, можно найти из поверхностного интеграла

$$\Omega=\iint(\sigma/r)dS. \tag{8}$$

Значения Ω всюду конечны, непрерывны и удовлетворяют уравнению Лапласа в каждой точке внутри и вне поверхности. Если пометить штрихом потенциал Ω вне поверхности и обозначить через ν' нормаль, проведенную наружу, то на поверхности будем иметь

$$\Omega'=\Omega; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{d\nu}+\frac{d\Omega'}{d\nu'}&=-4\pi\sigma \quad \text{(см. п. 78б)},\\ &=4\pi\frac{d\varphi}{d\nu} \quad \text{(см. (7))},\\ &=-4\pi\varkappa\frac{dU}{d\nu} \quad \text{(см. (4))},\\ &=-4\pi\varkappa\left(\frac{dV}{d\nu}+\frac{d\Omega}{d\nu}\right) \quad \text{(см. (2))}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем записать второе условие на поверхности:

$$(1+4\pi\varkappa)\frac{d\Omega}{d\nu}+\frac{d\Omega'}{d\nu'}+4\pi\varkappa\frac{dV}{d\nu}=0. \tag{10}$$

Итак, определение магнетизма, индуцированного в однородном изотропном ограниченном поверхностью S теле, находящемся под действием внешних магнитных сил, потенциал которых равен V, может быть сведено к следующей математической задаче.

Мы должны найти две функции Ω и Ω', удовлетворяющие следующим условиям.

Внутри поверхности S функция Ω должна быть конечной, непрерывной и должна удовлетворять уравнению Лапласа.

Вне поверхности S Ω' должна быть конечной и непрерывной, она должна обращаться в нуль при бесконечном удалении от S и удовлетворять уравнению Лапласа.

В каждой точке самой поверхности должно выполняться равенство $\Omega=\Omega'$, а производные от функции Ω, Ω' и V по нормали должны удовлетворять уравнению (10).

Такой подход к формулировке задачи об индуцированном магнетизме принадлежит Пуассону. Величина k, которую он использует в своих трудах, отличается от величины $\varkappa$ — они связаны между собой следующим соотношением:

$$4\pi\varkappa\ (k-1)+3k=0. \tag{11}$$

Коэффициент $\varkappa$, который мы здесь использовали, был введен Ф. Е. Нейманом.

428. Проблему индуцированного магнетизма можно рассматривать и другим способом, введя величину, которую мы, следуя Фарадею, назвали Магнитной Индукцией.

Связь между магнитной индукцией $\mathfrak{B}$, магнитной силой $\mathfrak{H}$ и намагниченностью $\mathfrak{I}$ выражается уравнением

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{I}. \tag{12}$$

Индуцированная намагниченность выражается через магнитную силу следующим уравнением:

$$\mathfrak{I}=\varkappa\mathfrak{H}. \tag{13}$$

Отсюда, исключая $\mathfrak{I}$, находим

$$\mathfrak{B}=(1+4\pi\varkappa)\mathfrak{H}, \tag{14}$$

что и является связью между магнитной индукцией и магнитной силой в веществах, намагниченность которых индуцирована магнитной силой.

В самом общем случае $\varkappa$ может быть функцией не только положения точки в веществе, но и направления вектора $\mathfrak{H}$, однако в случае, который мы сейчас рассматриваем, $\varkappa$ является числом.

Если далее записать

$$\mu=1+4\pi\varkappa, \tag{15}$$

то можно определить μ как отношение магнитной индукции к магнитной силе и называть это отношение магнитной индуктивной способностью вещества, отличая ее, таким образом, от коэффициента индуцированной намагниченности $\varkappa$.

Если обозначить через U полный магнитный потенциал, составленный из потенциала внешних источников V и потенциала Ω, обусловленного индуцированной намагниченностью, то можно выразить составляющие a, b, c магнитной индукции и составляющие α, β, γ магнитной силы следующим образом:

$$\begin{aligned} a&=\mu\alpha=-\mu\frac{dU}{dx}, \\ b&=\mu\beta=-\mu\frac{dU}{dy}, \\ c&=\mu\gamma=-\mu\frac{dU}{dz}. \end{aligned} \tag{16}$$

Составляющие a, b, c удовлетворяют условию соленоидальности:

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \qquad (17)$$

Следовательно, потенциал U должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0 \qquad (18)$$

в любой точке, где величина μ постоянна, т. е. в каждой точке внутри однородного вещества или в пустом пространстве.

Если обозначить через ν нормаль, проведенную внутрь вещества магнита, а через ν' — нормаль, проведенную наружу, и вообще все величины вне вещества отмечать штрихами, то условие непрерывности магнитной индукции на самой поверхности будет таким:

$$a\frac{dx}{d\nu}+b\frac{dy}{d\nu}+c\frac{dz}{d\nu}+a'\frac{dx}{d\nu'}+b'\frac{dy}{d\nu'}+c'\frac{dz}{d\nu'}=0, \qquad (19)$$

или с учетом уравнений (16)

$$\mu\frac{dU}{d\nu}+\mu'\frac{dU}{d\nu'}=0, \qquad (20)$$

где μ' — коэффициент индукции вне магнита, равный единице, если окружающая среда не является магнитной или диамагнитной.

Выражая U через V и Ω и μ через $\varkappa$, получим то же самое уравнение (10), к которому мы пришли методом Пуассона.

Задача об индуцированном магнетизме, рассматриваемая с точки зрения связи между магнитной индукцией и магнитной силой, в точности соответствует задаче о протекании электрических токов в разнородной среде, рассмотренной в п. 310.

Магнитная сила выражается через магнитный потенциал точно так же, как электрическая сила выражается через электрический потенциал.

Магнитная индукция является величиной, имеющей природу потока, и она удовлетворяет тем же условиям непрерывности, что и электрический ток.

В изотропных средах зависимость магнитной индукции от магнитной силы точно соответствует зависимости электрического тока от электродвижущей силы.

Удельная магнитная индуктивная способность в первой задаче соответствует удельной проводимости во второй. Поэтому Томсон в своей «Теории индуцированного магнетизма» (*Reprint*, 1872, p. 484) назвал эту величину *проницаемостью* среды.

Теперь мы уже готовы к рассмотрению теории индуцированного магнетизма с той точки зрения, которой, как я полагаю, придерживался Фарадей.

Когда магнитная сила действует на произвольную среду, магнитную, диамагнитную или нейтральную, внутри нее возникает явление, называемое *Магнитной Индукцией*.

Магнитная индукция — это направленная величина, имеющая природу потока; она удовлетворяет тем же условиям непрерывности, что и электрический ток и другие потоки.

В изотропных средах магнитная сила и магнитная индукция одинаково направлены, причем магнитная индукция равна произведению магнитной силы на величину, называемую коэффициентом индукции, которую мы обозначили через μ.

В пустом пространстве коэффициент индукции равен единице. В телах, способных к индуцированному намагничиванию, коэффициент индукции равен $\mu=1+4\pi\varkappa$, где $\varkappa$ — величина, уже определенная как коэффициент индуцированной намагниченности.

429. Пусть μ и μ' — значения μ по разные стороны от поверхности, разделяющей две среды, а V и V' — потенциалы в этих двух средах, тогда проекции магнитной силы на нормаль к поверхности в этих средах равны $dV/d\nu$ и $dV'/d\nu'$.

Величины потоков магнитной индукции через элемент поверхности dS в направлении этого элемента dS равны соответственно в двух средах μ $(dV/d\nu)dS$ и μ' $(dV'/d\nu')dS$.

Поскольку общий поток, направленный к dS, равен нулю, то

$$\mu\frac{dV}{d\nu}+\mu'\frac{dV'}{d\nu'}=0.$$

Но из теории потенциала следует, что вблизи поверхности с плотностью σ

$$\frac{dV}{d\nu}+\frac{dV'}{d\nu'}+4\pi\sigma=0.$$

Поэтому

$$\frac{dV}{d\nu}\left(1-\frac{\mu}{\mu'}\right)+4\pi\sigma=0.$$

Если $\varkappa_1$ есть отношение поверхностной намагниченности к силе, действующей по нормали в первой среде, коэффициент индукции которой равен μ, то мы имеем

$$4\pi\varkappa_1=\frac{\mu-\mu'}{\mu'}.$$

Отсюда следует, что $\varkappa_1$ будет положительным или отрицательным в зависимости от того, превышает или не превышает величина μ величину μ'. Если подставить $\mu=4\pi\varkappa+1$ и $\mu'=4\pi\varkappa'+1$, то

$$\varkappa_1=\frac{\varkappa-\varkappa'}{4\pi\varkappa'+1}.$$

В этом выражении $\varkappa$ и $\varkappa'$ — коэффициенты индуцированной намагниченности первой и второй сред, подсчитанные на основании экспериментов, проделанных в воздухе, а $\varkappa_1$ — коэффициент индуцированной намагниченности первой среды, окруженной второй средой.

Если коэффициент $\varkappa'$ больше, чем $\varkappa$, то $\varkappa_1$ отрицателен, т. е. кажущаяся намагниченность первой среды противоположна по направлению намагничивающей силе.

Поэтому, если взять сосуд, содержащий слабый водный раствор парамагнитной соли железа, и, погрузив его в более сильный раствор той же соли, подействовать магнитом, то этот сосуд будет двигаться как намагниченный в направле

нии, противоположном тому, в котором установился бы помещенный в это место какой-либо магнит.

Это может быть объяснено, если выдвинуть гипотезу, что раствор в сосуде на самом деле намагничен вдоль направления магнитной силы, но окружающий его раствор намагничен в том же направлении еще сильнее. Сосуд поэтому подобен слабому магниту, помещенному между двумя сильными магнитами при условии, что все они намагничены в одном и том же направлении, а их противоположные полюса находятся в контакте друг с другом. Северный полюс слабого магнита указывает в том же направлении, что и северные полюсы сильных магнитов, но при наличии контакта с южным полюсом одного из сильных магнитов около него образуется избыток южного магнетизма, который и является причиной того, что слабый магнит кажется намагниченным в противоположном направлении.

У некоторых веществ, однако, кажущаяся намагниченность отрицательна даже при погружении их в так называемый вакуум.

Если мы положим для вакуума $\varkappa=0$, то для этих веществ коэффициент $\varkappa$ будет отрицателен. Однако веществ, для которых отрицательное значение $\varkappa$ численно превышает $1/4\pi$, не обнаружено; поэтому для всех известных веществ величина μ положительна.

Вещества, для которых $\varkappa$ отрицательно и, следовательно, меньше единицы, называются Диамагнитными. Вещества, для которых величина $\varkappa$ положительна и μ больше единицы, называются Парамагнитными, Ферромагнитными или просто магнитными.

Мы рассмотрим физическую теорию диамагнитных и парамагнитных свойств, когда перейдем к электромагнетизму (п. 832—845).

430. Математическая теория магнитной индукции впервые была дана Пуассоном [2]. Физической гипотезой, на которой он основал свою теорию, служило допущение о наличии двух магнитных жидкостей; эта гипотеза обладала теми же математическими преимуществами и сталкивалась с теми же физическими трудностями, что и теория двух электрических жидкостей. Однако для объяснения того факта, что кусок мягкого железа хотя и может быть намагничен по индукции, но не может быть заряженным неравными количествами одного из двух видов магнетизма, Пуассон предположил, что, вообще говоря, вещество является непроводящим для обеих жидкостей и только в некоторых малых его объемах жидкости пребывают в условиях свободного подчинения действующим на них силам. Причем каждый из этих маленьких магнитных элементов веществ содержит точно равные количества обеих жидкостей, и, свободно перемещаясь внутри каждого элемента, эти жидкости никогда не могут переходить от одного элемента к другому. Поэтому задача оказывается однотипной с задачей о большом числе маленьких проводников электричества, распределенных в диэлектрической изолирующей среде. Проводники могут иметь любую форму при условии, что они малы и не касаются друг друга.

Если они являются вытянутыми телами, повернутыми в одном общем для них направлении, или если в одном из направлений они уплотнены сильнее, чем в другом, то среда, как показал сам Пуассон, не будет изотропной. Поэтому, чтобы избежать бесполезной запутанности, Пуассон рассматривает случай, когда все

---

[2] *Mémoires de l'Institut*, 1824, p. 247.

элементы являются сферическими и равномерно распределенными по всем направлениям. Он предполагает, что полный объем всех магнитных элементов в единице объема вещества равен k.

В п. 314 мы уже рассмотрели электрическую проводимость среды, внутри которой распределены маленькие сферы другой среды.

Для случая, когда проводимость среды равна μ_1, а проводимость сфер μ_2, мы получили, что проводимость составной среды равна

$$\mu=\mu_1\frac{2\mu_1+\mu_2+2k(\mu_2-\mu_1)}{2\mu_1+\mu_2-k(\mu_2-\mu_1)}.$$

При $\mu_1=1$ и $\mu_2=\infty$ это дает $\mu=\frac{1+2k}{1-k}$.

Эта величина μ определяет электрическую проводимость среды, состоящей из идеально проводящих сфер, распределенных в среде с единичной проводимостью, причем суммарный — агрегатный — объем всех сфер в единице объема равен k.

Величина μ также представляет собой коэффициент магнитной индукции среды, состоящей из сфер с бесконечной проницаемостью, рассеянных в среде с проницаемостью, равной единице.

Величина k, которую мы будем называть Магнитным Коэффициентом Пуассона, представляет собой отношение объема магнитных элементов к полному объему вещества.

Величина $\varkappa$ известна как Коэффициент Индуцированной Намагниченности Неймана. Она более удобна, чем коэффициент Пуассона.

Величину μ мы будем называть Коэффициентом Магнитной Индукции. Ее преимущество состоит в том, что она облегчает преобразование магнитных задач в соответствующие электрические и тепловые.

Соотношения между этими величинами таковы:

$$k=\frac{4\pi\varkappa}{4\pi\varkappa+3},\qquad k=\frac{\mu-1}{\mu+2},\qquad \varkappa=\frac{\mu-1}{4\pi},$$

$$\varkappa=\frac{3k}{4\pi(1-k)},\qquad \mu=\frac{1+2k}{1-k},\qquad \mu=4\pi\varkappa+1.$$

Если положить $\varkappa=32$ (именно такое значение дают эксперименты Талена [3] с мягким железом), то получим $k=134/135$. Но по теории Пуассона эта величина должна быть равна отношению объема, занимаемого магнитными молекулами, к полному объему железа. Однако ведь невозможно заполнить какое-либо пространство одинаковыми сферами так плотно, чтобы отношение их объема к объему этого пространства было бы столь близко к единице. И совершенно невероятно, чтобы такая большая доля объема железа была занята твердыми молекулами, какую бы форму они ни имели. В этом состоит одна из причин, по которой мы должны отказаться от гипотезы Пуассона. Другие будут приведены в главе VI. Но, конечно, при этом полностью сохраняется значение математических исследований Пуассона, ибо они основаны не на его гипотезе, а на экспериментальном факте наличия индуцированной намагниченности.

---

[3] *Recherches sur les propriétés magnétiques du fer, Nova Acta*, Upsal, 1863.

ГЛАВА V
ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Полая сферическая оболочка

431. Первый пример полного решения задачи о магнитной инудукции был дан Пуассоном для случая полой сферической оболочки, находящейся под воздействием произвольных магнитных сил.

Для простоты будем считать, что источник магнитной силы расположен во внешнем по отношению к оболочке пространстве.

Если обозначить через V потенциал, создаваемый внешней магнитной системой, то его можно будет разложить в ряд по пространственным гармоникам следующего вида:

$$V = C_0S_0 + C_1S_1r + \text{и т. д.} + C_iS_ir^i, \tag{1}$$

где r — расстояние от центра оболочки, S_i — поверхностная гармоника i-го порядка, C_i — коэффициент.

Этот ряд будет сходящимся при условии, что r меньше расстояния до ближайшего из магнитов, создающих данный потенциал. Следовательно, для полой сферической оболочки он сходится и на самой оболочке, и в области внутри нее.

Обозначим через a_2 внешний радиус оболочки, через a_1 — внутренний радиус и через Ω — потенциал, создаваемый индуцированной в ней намагниченностью. Во внутреннем пространстве, внутри вещества оболочки, и во внешнем пространстве вид функции Ω, вообще говоря, различен. Разложив эти функции в ряды по гармоникам и сосредоточив свое внимание на членах, содержащих поверхностную гармонику S_i, мы увидим, что потенциал Ω_1, относящийся к полости внутри оболочки, следует разлагать по положительным гармоникам вида $A_1S_ir^i$, поскольку внутри сферы радиуса a_1 он не должен обращаться в бесконечность.

В веществе оболочки, где значения r лежат между a_1 и a_2, ряд может содержать как положительные, так и отрицательные степени r вида $A_2S_ir^i + B_2S_ir^{-(i+1)}$.

Вне оболочки, где r больше a_2, разложение должно сходиться при сколь угодно больших r, и поэтому мы должны брать только отрицательные степени r вида $B_3S_ir^{-(i+1)}$.

Функция Ω должна удовлетворять следующим условиям: (1°) быть конечной, (2°) быть непрерывной, (3°) обращаться в нуль на бесконечном расстоянии и (4°) везде удовлетворять уравнению Лапласа.

Из условия (1°) следует

$$B_1 = 0.$$

Из условия (2°) при $r = a_1$

$$(A_1 - A_2)\, a_1^{2i+1} - B_2 = 0 \tag{2}$$

и при $r = a_2$

$$(A_2 - A_3)\, a_2^{2i+1} + B_2 - B_3 = 0. \tag{3}$$

Из условия (3°) следует $A_3 = 0$, а условие (4°) выполнено всюду, так как все эти функции являются гармоническими.

Помимо этих условий, существуют и другие, которым в силу уравнения (10) п. 427 необходимо удовлетворить на внешней и внутренней сторонах оболочки.

На внутренней поверхности при $r=a_1$

$$(1+4\pi\varkappa)\frac{d\Omega_2}{dr}-\frac{d\Omega_1}{dr}+4\pi\varkappa\frac{dV}{dr}=0. \tag{4}$$

на внешней поверхности при $r=a_2$

$$-(1+4\pi\varkappa)\frac{d\Omega_2}{dr}+\frac{d\Omega_3}{dr}-4\pi\varkappa\frac{dV}{dr}=0. \tag{5}$$

Из этих условий получаем уравнения

$$(1+4\pi\varkappa)\{iA_2a_1^{2i+1}-(i+1)B_2\}-iA_1a_1^{2i+1}+4\pi\varkappa iC_ia_1^{2i+1}=0, \tag{6}$$

$$(1+4\pi\varkappa)\{iA_2a_2^{2i+1}-(i+1)B_2\}+(i+1)B_3+4\pi\varkappa iC_ia_2^{2i+1}=0; \tag{7}$$

из которых, обозначив

$$N_i=\frac{1}{(1+4\pi\varkappa)(2i+1)^2+(4\pi\varkappa)^2i(i+1)\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)}, \tag{8}$$

находим

$$A_1=-(4\pi\varkappa)^2i(i+1)\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)N_iC_i, \tag{9}$$

$$A_2=-4\pi\varkappa i\left[2i+1+4\pi\varkappa(i+1)\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)\right]N_iC_i, \tag{10}$$

$$B_2=4\pi\varkappa i(2i+1)a_1^{2i+1}N_iC_i, \tag{11}$$

$$B_3=-4\pi\varkappa i\{2i+1+4\pi\varkappa(i+1)\}(a_2^{2i+1}-a_1^{2i+1})N_iC_i. \tag{12}$$

Эти величины при подстановке в ряды по гармоникам дают ту часть потенциала, которая обусловлена намагниченностью оболочки. Величина N_i всегда положительна, так как множитель $(1+4\pi\varkappa)$ никогда не может быть отрицательным. Следовательно, A_1 всегда принимает отрицательные значения, или, другими словами, действие намагниченной оболочки в точке внутри нее всегда противоположно действию внешней магнитной силы, независимо от того, является ли оболочка парамагнитной или диамагнитной. Истинное значение результирующего потенциала внутри оболочки равно $(C_i+A_1)S_ir^i$, или

$$(1+4\pi\varkappa)(2i+1)^2N_iC_iS_ir^i. \tag{13}$$

432. Если $\varkappa$ является большим числом, как в случае мягкого железа, то для не слишком тонкой оболочки магнитная сила внутри нее составляет малую долю внешней силы.

Именно таким способом сэр У. Томсон, поместив свой морской гальванометр в трубу из мягкого железа, сделал его независящим от внешней магнитной силы.

433. Наибольшую практическую ценность представляет случай $i=1$, для

которого имеем

$$N_1 = \frac{1}{9(1+4\pi\varkappa)+2(4\pi\varkappa)^2\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)}, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -2(4\pi\varkappa)^2\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)N_1C_1,\\ A_2 &= -4\pi\varkappa\left[3+8\pi\varkappa\left(-1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right]N_1C_1,\\ B_2 &= 12\pi\varkappa a_1^3 N_1C_1,\\ B_3 &= -4\pi\varkappa(3+8\pi\varkappa)(a_2^3-a_1^3)\,N_1C_1. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В этом случае магнитная сила внутри полой оболочки является однородной, а ее величина равна

$$C_1+A_1 = \frac{9(1+4\pi\varkappa)}{9(1+4\pi\varkappa)+2(4\pi\varkappa)^2\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)}C_1. \tag{16}$$

Если мы хотим определить $\varkappa$ путем сравнения магнитной силы, измеренной внутри полой оболочки, с внешней магнитной силой, то наилучшее значение толщины оболочки можно найти из уравнения

$$1-\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{9}{2}\,\frac{1+4\pi\varkappa}{2(4\pi\varkappa)^2}. \tag{17}$$

Магнитная сила внутри оболочки при этом составляет половину значения магнитной силы вне оболочки.

Поскольку для железа значения $\varkappa$ лежат между 20 и 30, то толщина оболочки должна составлять около двух сотых долей ее радиуса. Этот метод применим только при больших значениях $\varkappa$. Если же они очень малы, то и величина A_1 становится неощутимо малой, так как она пропорциональна квадрату $\varkappa$.

Для случая почти сплошной сферы с очень маленькой сферической полостью

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2(4\pi\varkappa)^2}{(3+4\pi\varkappa)(3+8\pi\varkappa)}C_1,\\ A_2 &= -\frac{4\pi\varkappa}{3+4\pi\varkappa}C_1,\\ B_3 &= -\frac{4\pi\varkappa}{3+4\pi\varkappa}C_1a_2^3. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Это исследование можно было полностью провести, непосредственно исходя из решения задачи о протекании тока через сферическую оболочку, рассмотренную в п. 312. Для этого в приведенных там выражениях следует положить $k_1 = (1+4\pi\varkappa)k_2$ и учесть, что величины A_1 и A_2 в задаче о протекании тока эквивалентны величинам C_1+A_1 и C_1+A_2 в задаче о магнитной индукции.

434. Соответствующее двумерное решение представлено графически на рис. XV в конце этого тома. Там показано, как линии индукции, почти горизонтальные вдали от центра, искажаются поперечно намагниченным цилиндрическим стержнем, помещенным в положение устойчивого равновесия. Линии, пересекающие

это семейство под прямыми углами, изображают эквипотенциальные поверхности, одна из которых является цилиндром. Большой пунктирный круг соответствует сечению цилиндра из парамагнитного вещества, а пунктирные горизонтальные линии внутри него изображают линии индукции в веществе, непрерывно переходящие во внешние линии индукции. Вертикальные пунктирные линии представляют собой внутренние эквипотенциальные поверхности, неразрывно связанные с внешней системой эквипотенциалей.

Следует отметить, что линии индукции сгущаются внутри вещества, а эквипотенциальные поверхности раздвигаются парамагнитным цилиндром, который, выражаясь языком Фарадея, проводит линии индукции лучше, чем окружающее вещество.

Если считать систему вертикальных линий линиями индукции, а горизонтальную систему — эквипотенциальными поверхностями, то получится, во-первых, случай поперечно намагниченного цилиндра, помещенного в неустойчивое равновесие среди раздвинутых им силовых линий; во-вторых, если считать, что большой пунктирный круг соответствует сечению диамагнитного цилиндра, пунктирные линии внутри него вместе с внешними линиями будут представлять действие диамагнитного вещества, состоящее в разрежении линий индукции и сближении эквипотенциальных поверхностей, ибо такое вещество является худшим проводником магнитной индукции, чем окружающая среда.

Случай сферы с коэффициентами намагниченности, различными в разных направлениях

435. Пусть α, β, γ — составляющие магнитной силы, а A, B, C — составляющие намагниченности в произвольной точке, тогда наиболее общее линейное соотношение между этими величинами дается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A&=r_1\alpha+p_3\beta+q_2\gamma,\\ B&=q_3\alpha+r_2\beta+p_1\gamma,\\ C&=p_2\alpha+q_1\beta+r_3\gamma,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где r, p, q — девять коэффициентов намагниченности.

Предположим теперь, что условия намагниченности внутри сферы радиуса a именно таковы и что намагниченность в каждой точке вещества однородна и одинаково направлена, а ее составляющие равны A, B, C.

Предположим также, что внешняя намагничивающая сила также однородна и параллельна какому-нибудь направлению и имеет составляющие X, Y, Z.

Тогда значение V будет равно

$$V=-(Xx+Yy+Zz), \qquad (2)$$

а для значения потенциала Ω' вне сферы намагниченности, согласно п. 391, получим

$$\Omega'=\frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r^3}(Ax+By+Cz). \qquad (3)$$

Значение потенциала Ω внутри сферы намагниченности равно

$$\Omega=\frac{4\pi}{3}(Ax+By+Cz). \qquad (4)$$

Истинный потенциал внутри сферы равен $V+\Omega$, т. е. для составляющих магнитной силы внутри сферы имеем

$$\alpha = X - \frac{4}{3}\pi A, \qquad \beta = Y - \frac{4}{3}\pi B, \qquad \gamma = Z - \frac{4}{3}\pi C. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{4}{3}\pi r_1\right)A + \frac{4}{3}\pi p_3 B + \frac{4}{3}\pi q_2 C &= r_1 X + p_3 Y + q_2 Z,\\
\frac{4}{3}\pi q_3 A + \left(1+\frac{4}{3}\pi r_2\right)B + \frac{4}{3}\pi p_1 C &= q_3 X + r_2 Y + p_1 Z,\\
\frac{4}{3}\pi p_2 A + \frac{4}{3}\pi q_1 B + \left(1+\frac{4}{3}\pi r_3\right)C &= p_2 X + q_1 Y + r_3 Z.
\end{aligned} \tag{6}$$

Решая эти уравнения, находим

$$\left.\begin{aligned}
A &= r_1' X + p_3' Y + q_2' Z,\\
B &= q_3' X + r_2' Y + p_1' Z,\\
C &= p_2' X + q_1' Y + r_3' Z,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
D' r_1' &= r_1 + \frac{4}{3}\pi(r_3 r_1 - p_2 q_2 + r_1 r_2 - p_3 q_3) + \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 D,\\
D' p_1' &= p_1 - \frac{4}{3}\pi(q_2 q_3 - p_1 r_1),\\
D' q_1' &= q_1 - \frac{4}{3}\pi(p_2 p_3 - q_1 r_1)
\end{aligned} \tag{8}$$

и т. д.

Здесь D — определитель из коэффициентов в правой части уравнения (6), а D' — определитель из коэффициентов в левой части.

Новая система коэффициентов p', q', r' будет симметричной только для симметричной системы p, q, r, т. е. когда коэффициенты типа p равны соответствующим коэффициентам типа q.

436. Момент пары сил, стремящийся повернуть сферу вокруг оси x в направлении от y к z, находится путем вычисления моментов, действующих на элементарные объемы, и их суммирования по всей сфере. Результат следующий:

$$L = (4/3)\pi a^3(\gamma B - \beta C) = (4/3)\pi a^3\{p_1' Z^2 - q_1' Y^2 + (r_2' - r_3')YZ + X(q_3' Z - p_2' Y)\}. \tag{9}$$

Если положить $X=0$, $Y=F\cos\vartheta$, $Z=F\sin\vartheta$, то это будет соответствовать магнитной силе F, лежащей в плоскости yz и наклоненной под углом ϑ к оси y. Будем теперь поворачивать сферу, сохраняя силу постоянной, тогда работа, совершаемая при вращении сферы на каждый полный оборот, окажется равной $\int_0^{2\pi} L\,d\vartheta$. Но эта работа равна

$$(4/3)\pi^2 a^3 F^2 (p_1' - q_1'). \tag{10}$$

Следовательно, чтобы вращающаяся сфера не могла стать неисчерпаемым источником энергии, необходимо выполнение равенства $p_1'=q_1'$ и, аналогично, $p_2'=q_2'$, $p_3'=q_3'$.

Эти условия показывают, что в первоначальных уравнениях (6) коэффициент при B в третьем уравнении равен коэффициенту при C во втором и т. д. Система уравнений, таким образом, оказывается симметричной и после приведения к главным осям намагниченности становится такой:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{r_1}{1+\frac{4}{3}\pi r_1} X, \\ B &= \frac{r_2}{1+\frac{4}{3}\pi r_2} Y, \\ C &= \frac{r_3}{1+\frac{4}{3}\pi r_3} Z. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Момент пары сил, стремящийся повернуть сферу вокруг оси x, равен

$$L = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{\left(1+\frac{4}{3}\pi r_2\right)\left(1+\frac{4}{3}\pi r_3\right)} YZ. \qquad (12)$$

В большинстве случаев различия между коэффициентами намагниченности в различных направлениях очень малы и, считая r средним значением для этих коэффициентов, можно положить

$$L = \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{\left(1+\frac{4}{3}\pi r\right)^2} F^2 \sin 2\vartheta. \qquad (13)$$

Эта сила стремится развернуть кристаллическую сферу вокруг оси x в направлении от y к z. Она всегда старается направить ось, соответствующую наибольшему магнитному (или наименьшему диамагнитному) коэффициенту параллельно линии магнитной силы.

Соответствующий двумерный случай представлен на рис. XVI.

Если предположить, что верхняя сторона рис. XVI смотрит на север, то там будут представлены силовые линии и эквипотенциальные поверхности, возмущенные поперечно намагниченным цилиндром, северная сторона которого направлена на восток. Результирующая сила стремится повернуть цилиндр с востока на север. Большая пунктирная окружность представляет сечение цилиндра из кристаллического вещества, у которого коэффициент индукции вдоль оси, направленной с северо-востока на юго-запад, больше, чем вдоль оси, направленной с северо-запада на юго-восток. Пунктирные линии внутри окружности изображают линии индукции и эквипотенциальные поверхности, которые теперь уже пересекаются не под прямым углом друг к другу. Действующая на цилиндр результирующая сила, очевидно, стремится повернуть его с востока на север.

437. Задача об эллипсоиде, помещенном в поле однородной и параллельной магнитной силы, очень изобретательно была решена Пуассоном.

Если потенциал в точке (x, y, z), обусловленный гравитацией тела произвольной формы с однородной плотностью ρ, равен V, то потенциал магнетизма, создаваемый тем же телом при однородной намагниченности в направлении оси x с интенсивностью $I=\rho$, равен $-(dV/dx)$.

Действительно, значение $-(dV/dx)\delta x$ в произвольной точке есть превышение потенциала тела V над потенциалом V' того же тела, смещенного на расстояние $-\delta x$ в направлении x.

Предположим, что тело смещено на расстояние $-\delta x$, а его плотность вместо ρ стала $-\rho$ (как будто тело сделано из отталкивающей материи вместо притягивающей), тогда величина $-(dV/dx)\delta x$ будет потенциалом, создаваемым этими двумя телами.

Рассмотрим теперь элементарную порцию тела с объемом δv и массой ρdv, а также соответствующий объем смещенного на расстояние $-\delta x$ тела с массой $-\rho\delta v$. Действие этих двух элементов эквивалентно действию магнита с мощностью $\rho\delta v$ и длиной δx. Интенсивность намагниченности находится делением магнитного момента элемента на его объем. Результат равен $\rho\delta x$.

Следовательно, величина $-(dV/dx)\delta x$ есть магнитный потенциал тела, намагниченного с интенсивностью $\rho\delta x$ в направлении x, а $-(dV/dx)$ — потенциал тела, намагниченного с интенсивностью ρ.

Этот потенциал можно рассматривать и в ином свете. Тело было смещено на расстояние — δx, и его плотность изменена на $-\rho$. В той области пространства, которая является общей для двух положений тела, плотность равна нулю, так как две равные и противоположные плотности уничтожают друг друга (пока речь идет о притяжении). Таким образом, остается оболочка из положительной материи на одной стороне тела и оболочка из отрицательной материи на другой. Можно считать, что ими и создается результирующий потенциал. Толщина оболочки в точке, где нормаль, проведенная наружу, образует угол ε с осью x, равна $\delta x \cos \varepsilon$; и поэтому при объемной плотности ρ поверхностная плотность равна $\rho\delta x \cos \varepsilon$. Если потенциал записан в виде $-(dV/dx)$, то поверхностная плотность окажется равной $\rho \cos \varepsilon$.

Таким способом мы можем найти магнитный потенциал любого тела, однородно намагниченного параллельно данному направлению. Но если эта однородная намагниченность обусловлена магнитной индукцией, то магнитная сила во всех точках внутри тела также должна быть однородной и параллельной.

Эта сила состоит из двух частей: одна связана с внешними источниками, другая — с намагниченностью тела. Поэтому при однородной и параллельной внешней магнитной силе магнитная сила, связанная с намагниченностью, также должна быть однородной и параллельной во всех точках внутри тела.

Таким образом, чтобы данный метод привел к решению задачи о магнитной индукции, производная dV/dx должна быть внутри тела линейной функцией координат x, y, z и, следовательно, потенциал V — квадратичной функцией этих координат.

Но единственными из числа известных нам примерами, когда потенциал V представлялся бы внутри тела квадратичной функцией координат, служат тела, ограниченные полной поверхностью второго порядка, и единственным случаем, в котором такое тело обладало бы ограниченными размерами, является эллипсоид. Поэтому мы применим этот метод к случаю эллипсоида.

Пусть уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

будет уравнением эллипсоида, а Φ_0 обозначает следующий определенный интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a^2+\varphi^2)(b^2+\varphi^2)(c^2+\varphi^2)}}\,. \qquad (2)^1$$

Тогда, если положить

$$L=4\pi abc\frac{d\Phi_0}{d(a^2)}, \qquad M=4\pi abc\frac{d\Phi_0}{d(b^2)}, \qquad N=4\pi abc\frac{d\Phi_0}{d(c^2)}, \tag{3}$$

то значение потенциала внутри эллипсоида будет равно

$$V_0=-\frac{\rho}{2}(Lx^2+My^2+Nz^2)+\text{const}. \tag{4}$$

Если эллипсоид намагничен однородно с интенсивностью I в направлении, которое относительно осей x, y, z имеет направляющие косинусы l, m, n, так что составляющие намагниченности этого эллипсоида равны $A=Il$, $B=Im$, $C=In$, то потенциал, обусловленный такой намагниченностью внутри соленоида, будет

$$\Omega=-I\,(Llx+Mmy+Nnz). \tag{5}$$

Если внешняя магнитная сила равна $\mathfrak{H}$, а ее составляющие — X, Y, Z, то ее потенциал будет равен

$$V=-(Xx+Yy+Zz). \tag{6}$$

Поэтому составляющие истинной намагничивающей силы в произвольной точке тела равны

$$X+AL, \qquad Y+BM, \qquad Z+CN. \tag{7}$$

Наиболее общая связь между намагниченностью и намагничивающей силой задается тремя линейными уравнениями, содержащими девять коэффициентов. Для выполнения закона сохранения энергии в случае магнитной индукции необходимо, однако, чтобы три из них были бы соответственно равны трем другим, т. е. чтобы мы имели

$$\begin{aligned} A&=\varkappa_1(X+AL)+\varkappa_3'(Y+BM)+\varkappa_2'(Z+CN),\\ B&=\varkappa_3'(X+AL)+\varkappa_2(Y+BM)+\varkappa_1'(Z+CN),\\ C&=\varkappa_2'(X+AL)+\varkappa_1'(Y+BM)+\varkappa_3(Z+CN). \end{aligned} \tag{8}$$

Из этих уравнений можно выразить A, B, C через X, Y, Z и получить наиболее общее решение задачи.

Потенциал вне эллипсоида будет складываться из потенциала, обусловленного намагниченностью эллипсоида, и потенциала внешней магнитной силы.

[1] См. Томсон и Тэт «Натуральная философия» (Thomson and Tait's *Natural Philosophy*, § 525, 2nd Edition).

438. Единственным практически важным является случай, в котором

$$\varkappa_1'=\varkappa_2'=\varkappa_3'=0. \tag{9}$$

Тогда мы имеем

$$A=\frac{\varkappa_1}{1-\varkappa_1 L}X, \qquad B=\frac{\varkappa_2}{1-\varkappa_2 M}Y, \qquad C=\frac{\varkappa_3}{1-\varkappa_3 N}Z. \tag{10}$$

Если эллипсоид имеет две одинаковых оси и является эллипсоидом планетарной или сплюснутой формы, то

$$b=c=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} L&=-4\pi\left(\frac{1}{e^2}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e\right),\\ M=N&=-2\pi\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e-\frac{1-e^2}{e^2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если эллипсоид имеет яйцевидную или вытянутую форму, то

$$a=b=\sqrt{1-e^2}\,c, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} L=M&=-2\pi\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}\right),\\ N&=-4\pi\left(\frac{1}{e^2}-1\right)\left(\frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}-1\right).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

В случае сферы, когда $e=0$,

$$L=M=N=-\frac{4}{3}\pi. \tag{15}$$

В случае очень плоского планетоида величина L в пределе становится равной -4π а величины M и N равными $-\pi^2 a/c$.

В случае очень вытянутого овалоида (ovoid) L и M стремятся к значению -2π, а N приближается к выражению

$$-4\pi\frac{a^2}{c^2}\left(\ln\frac{2c}{a}-1\right)$$

и обращается в нуль при $e=1$.

Из этих результатов следует:

(1). Когда коэффициент намагниченности $\varkappa$ очень мал, будучи положительным или отрицательным, индуцированная намагниченность приблизительно равна намагничивающей силе, умноженной на $\varkappa$, и почти не зависит от формы тела.

(2). Когда $\varkappa$ является большой положительной величиной, намагниченность существенно зависит от формы тела и почти не зависит от точного значения $\varkappa$, кроме случая продольной силы, действующей на такой вытянутый овалоид, в котором даже при больших $\varkappa$ величина $N\varkappa$ остается малой.

(3). Если бы коэффициент $\varkappa$ мог стать отрицательным и равным $1/4\pi$, то в случае намагничивающей силы, действующей перпендикулярно плоской пластинке или диску, мы имели бы бесконечное значение для намагниченности. Абсурдность этого результата подтверждает сказанное в п. 428.

Таким образом, эксперименты по определению $\varkappa$ можно проводить на телах любой формы, но при условии, что $\varkappa$ очень малы, как это имеет место для всех диамагнитных тел и всех магнитных тел, кроме железа, никеля и кобальта.

Если, однако, как в случае железа, $\varkappa$ представляет собой большое число, то эксперименты со сферами и плоскими фигурами непригодны для определения $\varkappa$; например, для сферы с $\varkappa=30$ (отдельные сорта железа) намагниченность относится к намагничивающей силе как 1 к 4,22, а при бесконечных $\varkappa$ это отношение равно 1 : 4,19, т. е. очень маленькая ошибка при определении намагниченности приводила бы к очень большой ошибке в $\varkappa$.

Воспользовавшись, однако, куском железа в форме очень вытянутого овалоида, можно при умеренных по сравнению с единицей значениях $N\varkappa$ вычислить значения $\varkappa$ по найденной величине намагниченности, причем тем точнее, чем меньше величина N.

Действительно, если сделать $N\varkappa$ достаточно малым, то малая ошибка в определении самой величины N не внесет большой погрешности, и вместо овалоида можно взять любое вытянутое тело, например проволоку или длинный стержень.

Следует, однако, помнить, что такая замена допустима только в случае, когда произведение $N\varkappa$ мало по сравнению с единицей. На самом деле распределение магнетизма вдоль длинного цилиндра с плоскими концами не напоминает соответствующее распределение вдоль длинного овалоида, так как свободный магнетизм очень сильно концентрируется к концам цилиндра, в то время как в случае овалоида его концентрация меняется прямо пропорционально расстоянию от экватора.

Распределения же электричества, как мы уже видели в п. 152, вдоль цилиндра и вдоль овалоида фактически сходны.

Эти результаты позволяют понять также, почему магнитный момент у постоянных магнитов вытянутой формы может быть заметно увеличен. Если намагнитить диск перпендикулярно его поверхности до интенсивности I и затем предоставить самому себе, то на внутренние частицы этого диска начала бы действовать постоянная размагничивающая сила, равная $4\pi I$. И даже если этой силы самой по себе было бы не достаточно для разрушения части намагниченности, вскоре это все же произошло бы под действием вибраций или изменений температуры.

При намагничении цилиндра в поперечном направлении, размагничивающая сила будет равна всего лишь $2\pi I$, а в сферическом магните $(4/3)\pi I$.

В поперечно намагниченном диске размагничивающая сила равна $\pi^2(a/c)I$, а в продольно намагниченном вытянутом овалоиде она имеет наименьшее из всех значений, равное $4\pi\,(a^2/c^2)I\ \ln\,(2c/a)$.

Следовательно, вытянутый магнит не так охотно теряет свой магнетизм, как короткий и толстый магнит.

Для эллипсоида с различными магнитными коэффициентами вдоль трех осей момент сил, действующий на него и стремящийся повернуть его вокруг оси x, равен

$$\frac{4}{3}\pi abc(BZ-CY)=\frac{4}{3}\pi abcYZ\frac{\varkappa_2-\varkappa_3+\varkappa_2\varkappa_3(M-N)}{(1-\varkappa_2 M)(1-\varkappa_3 N)}.$$

Следовательно, если $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ малы, то этот момент в принципе зависит от кристаллических свойств тела, а не от его формы, при условии, что размеры тела не

различаются слишком сильно; если же $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ значительны (как в случае железа), то сила будет существенно зависеть от формы тела, стремясь устанавливать большую ось параллельно линиям силы.

Если бы могло быть получено достаточно большое, но все же еще однородное поле магнитной силы, то вытянутое изотропно диамагнитное тело тоже стремилось бы установиться так, чтобы его наибольший размер оказывался бы параллельным линиям магнитной силы.

439. Вопрос о распределении намагниченности в эллипсоиде вращения под действием произвольных магнитных сил был исследован И. Нейманом [2]. Кирхгофф [3] распространил его метод на случай бесконечно длинного цилиндра, находящегося под воздействием произвольной силы.

Грин в 17-м разделе своего Сочинения привел исследование распределения магнетизма в цилиндре конечной длины под действием однородной внешней силы X, параллельной его оси. Хотя отдельные этапы этого исследования и не очень строги, однако в данном наиболее важном случае его результаты, по-видимому, приближенно соответствуют реальной намагниченности, и они, конечно, очень четко выражают переход от цилиндра с большим $\varkappa$ к цилиндру с очень малыми $\varkappa$, хотя совершенно непригодны в случае отрицательных $\varkappa$, т. е. для диамагнитных веществ.

Грин нашел, что линейная плотность свободного магнетизма для цилиндра с радиусом a и длиной $2l$ на расстоянии x от его середины равна

$$\lambda = \pi\varkappa X p a \frac{e^{px/a} - e^{-px/a}}{e^{pl/a} + e^{-pl/a}},$$

где p есть численная величина, определяемая из уравнения

$$0{,}231863 - 2\ln p + 2p = \frac{1}{\pi\varkappa p^2}.$$

Ниже приводятся несколько соответствующих значений $\varkappa$ и p:

$\varkappa$	p	$\varkappa$	p	$\varkappa$	p	$\varkappa$	p
∞	0	29,475	0,04	11,802	0,07	0,1427	1,00
336,4	0,01	20,185	0,05	9,137	0,08	0,0002	10,00
62,02	0,02	14,794	0,06	7,517	0,09	0	∞
48,416	0,03			6,319	0,10	Отрицательное	Мнимое

Когда длина цилиндра велика по сравнению с его радиусом, полное количество свободного магнетизма по любую сторону от середины магнита, как это и должно быть, равно $M = \pi a^2 \varkappa X$, причем часть этого магнетизма, равная $pM/2$, сосредоточена на плоском торце цилиндра, а центр тяжести всего распределения расположен от торца на расстоянии a/p.

Когда $\varkappa$ очень мало, то p велико, и почти весь свободный магнетизм сосредоточен на торцах цилиндра. С увеличением $\varkappa$ величина p убывает, и свободный магнетизм рассредоточивается на больших расстояниях от концов. При бесконечном $\varkappa$ свободный магнетизм в любой точке цилиндра просто пропорционален расстоя-

[2] *Crelle*, Bd. XXXVII (1848).
[3] *Crelle*, Bd. XLVIII (1854).

нию от средней точки; подобное распределение имеет свободное электричество на проводнике в поле однородной силы.

440. Во всех веществах, кроме железа, никеля и кобальта, коэффициенты намагниченности так малы, что индуцированная намагниченность тела приводит лишь к небольшому изменению силы в магнитном поле. Следовательно, в первом приближении мы можем считать, что внутри тела действует такая же магнитная сила, как в отсутствие тела. Поверхностная намагниченность тела, таким образом, в первом приближении равна $\varkappa\,(dV/d\nu)$, где $dV/d\nu$— скорость роста магнитного потенциала, созданного внешним магнитом, вдоль внутренней нормали к поверхности. Вычислив потенциал, обусловленный этим поверхностным распределением, мы можем затем использовать его при переходе ко второму приближению.

Чтобы в этом первом приближении найти механическую энергию, обусловленную поверхностным распределением магнетизма, мы должны найти поверхностный интеграл

$$E=\frac{1}{2}\iint \varkappa V\frac{dV}{d\nu}\,dS,$$

взятый по всей поверхности тела. Но в п. 100 мы показали, что он равен объемному интегралу

$$E=-\frac{1}{2}\iiint \varkappa\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz,$$

взятому по области, занятой телом, или, если обозначить через R результирующую магнитную силу,

$$E=-\frac{1}{2}\iiint \varkappa R^2\,dx\,dy\,dz.$$

Далее, так как работа, совершаемая магнитной силой над телом при смещении на δx, равна $X\delta x$ (где X — механическая сила в направлении x) и так как $\int X\delta x+$ $+E=\text{const}$, то

$$X=-\frac{dE}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\iiint \varkappa R^2\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\iiint \varkappa\frac{dR^2}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда следует, что на тело действует такая сила, при которой каждая его часть стремится перемещаться из областей меньших R^2 в область больших R^2; при этом сила, действующая на каждый единичный элемент объема, равна $(\varkappa/2)dR^2/dx$.

Если величина $\varkappa$ отрицательна, как это имеет место для диамагнитных тел, то данная сила (это впервые установил Фарадей) направлена из области сильных в область слабых магнитных полей. Большинство эффектов, наблюдаемых с диамагнитными телами, зависит от этого свойства.

Корабельный магнетизм

441. Почти каждая отрасль науки о магнетизме находит применение в навигации. Непосредственное воздействие земного магнетизма на стрелку компаса является единственным методом определения курса корабля в условиях, когда солнце и звезды скрыты. Вначале казалось, что отклонение стрелки от направления истинного меридиана служит помехой для использования компаса в навигации, од-

нако, после того как были составлены магнитные карты, эта трудность была преодолена и стало очевидным, что магнитное склонение само по себе может даже помочь моряку в определении местонахождения его корабля.

Наибольшую трудность в навигации всегда вызывало определение долготы. Но так как склонение различно в разных точках одной и той же широтной параллели, то его наблюдение при наличии известной широты предоставляет возможность моряку определить свое положение на магнитной карте.

Однако в последнее время при конструировании кораблей настолько широко применяется железо, что стало вообще невозможно пользоваться компасом без учета того действия, которое оказывает на его стрелку сам корабль, представляющий собой некоторое магнитное тело.

Определение распределения магнетизма в массе железа произвольной формы под влиянием земной магнитной силы, даже не подверженного механическим напряжениям и другим возмущениям, составляет, как мы видели, очень сложную задачу.

В рассматриваемом случае эта задача все же упрощается благодаря следующим обстоятельствам.

Считается, что центр компаса расположен в фиксированной точке корабля, достаточно удаленной от любого железа, так что сама стрелка компаса не индуцирует в корабле заметного магнетизма. Размеры стрелки предполагаются настолько малыми, что во всех ее точках магнитную силу можно считать одинаковой.

Корабль предполагается состоящим из железа только двух сортов.

(1). Твердого железа с постоянной намагниченностью.

(2). Мягкого железа с намагниченностью, индуцированной Землей или другими магнитами.

Для строгости следует допустить, что даже самое твердое железо способно не только к индукции, но и к потере — теми или иными способами — части своей так называемой постоянной намагниченности.

Самое же мягкое железо способно сохранять свою так называемую остаточную намагниченность. Реальные свойства железа нельзя точно представлять, предполагая его состоящим из железа твердого и железа мягкого, определение которых было дано нами выше. Однако было установлено, что когда корабль подвергается действию только силы земного магнетизма и не находится в каких-то условиях непогоды, то допущение того, что его магнетизм обусловлен лишь частично постоянной и частично временной намагниченностью, приводит к достаточно точным результатам применительно к коррекции компаса.

Уравнения, на которых основана теория вариации компаса, были даны Пуассоном в пятом томе *Mémoires de l'Institut*, p. 533 (1824).

При их выводе было сделано единственное предположение, касающееся индуцированного магнетизма, а именно: если магнитная сила X, обусловленная внешним магнетизмом, создает в железе корабля индуцированную намагниченность и если эта индуцированная намагниченность воздействует на стрелку компаса с возмущающей силой, имеющей составляющие X', Y', Z', то при изменении внешней магнитной силы в заданное число раз составляющие возмущающей силы изменятся в то же самое число раз.

В действительности при воздействии на железо очень больших магнитных сил

индуцированная намагниченность уже не пропорциональная действующей силе, однако в случае магнитных сил, величина которых обусловлена земным магнетизмом, отсутствие пропорциональности незаметно.

Таким образом, на практике мы можем считать, что если единичная магнитная сила создает через посредство корабельного железа действующую на стрелку компаса возмущающую силу с составляющими a — в направлении x, d — в направлении y, g — в направлении z, то составляющие возмущающей силы, обусловленной внешней силой X, направленной по x, будут соответственно равны aX, dX, gX.

Следовательно, если мы введем оси, фиксированные относительно корабля, направив ось x к носу корабля, ось y — к правому борту, а ось z — к килю, и обозначим через X, Y, Z составляющие земной магнитной силы в этих направлениях, то X', Y', Z' — составляющие комбинированной силы, действующей на стрелку компаса со стороны Земли и корабля, будут равны

$$\begin{aligned} X' &= X + aX + bY + cZ + P, \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q, \\ Z' &= Z + gX + hY + kZ + R. \end{aligned} \tag{1}$$

В этих уравнениях a, b, c, d, e, f, g, h, k — девять постоянных коэффициентов, зависящих от количества, расположения и восприимчивости к индукции мягкого железа корабля; P, Q, R — константы, определяемые постоянной намагниченностью корабля.

Очевидно, что эти уравнения обладают достаточной общностью в условиях, когда магнитная индукция является линейной функцией магнитной силы, поскольку они представляют собой ни больше ни меньше как самое общее выражение для любого вектора, являющегося линейной функцией другого вектора.

Можно тем не менее показать, что они не слишком общие, поскольку соответствующим размещением железа можно любой из коэффициентов изменять независимо от других.

Так, длинный и тонкий железный прут под действием продольной магнитной силы приобретает полюса, мощность которых численно равна сечению прута, умноженному на магнитную силу и на коэффициент индуцированной намагниченности. Магнитная сила, перпендикулярная этому стержню, производит гораздо более слабую намагниченность, действие которой почти незаметно на расстоянии нескольких диаметров.

Если расположить длинный железный стержень вдоль корабля и поместить один его конец на расстоянии x от стрелки компаса, измеряя это расстояние в сторону носа корабля, то, обозначив сечение стержня через A, а его коэффициент намагниченности через $\varkappa$, для мощности полюса получим $A\varkappa X$; при значении $A = ax^2/\varkappa$ сила, действующая со стороны этого полюса на стрелку компаса, будет равна aX. При этом стержень можно считать достаточно длинным и действием на компас со стороны другого полюса пренебречь.

Таким образом, мы получили способ задания любого требуемого значения коэффициента a.

Если взять другой стержень с сечением B, поместить один его конец в ту же самую точку, отстоящую от компаса на расстоянии x, измеряемом в направлении

носа судна, и развернуть его в сторону правого борта, удалив второй полюс на такое расстояние, где бы он не оказывал заметного влияния на компас, то возмущающая сила, создаваемая этим стержнем, будет направлена по x и равна $B\varkappa Y/x^2$, или при $B=bx^2/\varkappa$ сила окажется равной bY.

Таким образом, этот стержень вводит коэффициент b.

Третий стержень, направленный из той же самой точки вниз, введет коэффициент c.

Коэффициенты d, e, f можно получать с помощью трех стержней, вытянутых к носу, к правому борту и книзу из точки, смещенной от компаса к правому борту, а коэффициенты g, h, k — с помощью трех стержней, вытянутых в направлениях, параллельных этим, из точки, расположенной под компасом.

Следовательно, любой из девяти коэффициентов можно менять отдельно с помощью нужным образом размещаемых железных стержней.

Величины P, Q, R являются просто составляющими силы, действующей на компас и возникающей из-за постоянной намагниченности корабля, а также из-за той части индуцированной намагниченности, которая обусловлена действием этой постоянной намагниченности.

Полное обсуждение уравнений (1) и связи между истинным магнитным курсом корабля и курсом, указываемым компасом, дано Арчибальдом Смитом в адмиралтейском «Руководстве по девиации компаса» (*Manual of the Deviation of the Compass*).

Там приведен важный графический метод исследования задачи. Из начала координат, взятого в произвольной фиксированной точке, проводится отрезок линии, представляющий по величине и по направлению горизонтальную составляющую реальной магнитной силы, действующей на стенку компаса. По мере того как корабль поворачивается, ставя свой нос последовательно по разным азимутам, конец этой линии описывает кривую, каждая точка которой соответствует определенному азимуту.

Такая кривая, с помощью которой направление и величина силы, действующей на компас, определяется через магнитный курс корабля, называется Дигограммой.

Есть две разновидности Дигограмм. В одной из них кривая вычерчивается на плоскости, фиксированной в пространстве, в то время как корабль поворачивается. В другом случае кривая вычерчивается на плоскости, фиксированной по отношению к кораблю.

Дигограммы первого вида являются Улитками Паскаля, дигограммы второго вида — эллипсами. О построении и использовании этих кривых и о многих теоремах, представляющих интерес для математиков в той мере, в какой они важны для навигаторов, читатель может узнать из «Руководства по девиации компаса».

ГЛАВА VI
ВЕБЕРОВСКАЯ ТЕОРИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНЕТИЗМА

442. Как мы уже знаем, Пуассон предполагал, что намагниченность железа состоит в разделении магнитных жидкостей внутри каждой магнитной молекулы. При желании избежать допущения о существовании магнитных жидкостей можно выдвинуть ту же самую теорию в иной форме, приняв, что каждая молекула железа под действием на нее намагничивающей силы становится магнитом.

Теория Вебера отличается от нее предположением о том, что молекулы железа являются магнитами всегда, даже до приложения намагничивающей силы, но у обыкновенного железа магнитные оси молекул расположены безразлично по отношению к любому направлению, и железо в целом никаких магнитных свойств не проявляет.

Когда магнитная сила действует на железо, она стремится повернуть оси всех молекул в одном направлении, что и является причиной превращения железа, как целого, в магнит.

Если бы оси всех молекул выстроились параллельно друг другу, то железо обладало бы наибольшей интенсивностью намагниченности, на какую оно только способно вообще. Следовательно, теория Вебера устанавливает существование некоторой предельной интенсивности намагниченности, и поэтому для нее необходимы экспериментальные свидетельства наличия такого предела. Проведенные Джоулем [1], И. Мюллером [2] (J. Muller), Эвингом и Лоу [3] (Ewing and Low) опыты показали, что намагниченность приближается к некоторому предельному значению.

Наиболее полные подтверждения существования этого предела представлены экспериментами Бетца [4] (Beetz) с электролитическим железом, выделяемым под действием магнитной силы.

Серебряная проволока покрывалась лаком, на котором делалась тонкая продольная царапина, обнажавшая узкую полоску металла. Затем проволока погружалась в раствор железа, и все это помещалось в магнитное поле таким образом, чтобы царапина была в направлении линии магнитной силы. Для протекающего через раствор электрического тока проволока служила катодом, и железо, молекула за молекулой, откладывалось на узкой открытой части ее поверхности. Полученная таким способом нитка железа подвергалась затем проверке на магнетизм. Для столь небольшой массы железа ее магнитный момент оказался очень значительным, приложение мощной намагничивающей силы, действующей в том же направлении, приводило лишь к небольшому увеличению индуцированной намагниченности, в то время как постоянная намагниченность не менялась. При-

---

[1] *Annals of Electricity*, IV, p. 131, 1839; *Phil. Mag.*, (4)III, p. 32.
[2] *Pogg. Ann.*, LXXIX, p. 337, 1850.
[3] *Phil. Trans.* 1889, A, p. 221.
[4] *Pogg.* CXI, 1860.

ложение же намагничивающей силы в противоположном направлении тотчас приводило нить в состояние, свойственное железу, намагниченному обычным путем.

Теория Вебера, предполагающая, что в данном случае магнитная сила поворачивает в момент отложения молекул их оси в одном направлении, очень хорошо согласуется с этими наблюдениями.

Бетц нашел, что если продолжать электролиз под действием намагничивающей силы, то интенсивность намагниченности последовательно осаждаемого железа будет уменьшаться. Вероятно, оси молекул отклоняются от линии намагничивающей силы по мере того, как они откладываются бок о бок с уже осажденными ранее молекулами, т. е. предельная параллельность осей может быть получена только для случая очень тонкой нити железа.

Если, как предположил Вебер, молекулы железа являются готовыми магнитами, то любая магнитная сила, достаточная при электролитическом осаждении для параллельного установления их осей, будет достаточной и для создания в образованной нити наивысшей интенсивности намагниченности.

С другой стороны, если молекулы железа не являются магнитами, а лишь обнаруживают способность к намагничиванию, то намагниченность образующейся нити будет зависеть от намагничивающей силы так же, как в общем случае она зависит и в обычном мягком железе. Эксперименты Бетца не оставляют места для второй гипотезы.

443. Следуя Веберу, мы будем сейчас считать, что в каждом единичном объеме железа имеется n магнитных молекул и магнитный момент каждой из них равен m. Если бы оси всех молекул расположились бы параллельно, магнитный момент единичного объема оказался бы равным $M=nm$, и это была бы наибольшая интенсивность намагниченности, на которую способно железо.

У обыкновенного железа в ненамагниченном состоянии, согласно предположению Вебера, оси молекул располагаются безразлично во всех направлениях.

Чтобы описать это, можно вообразить некоторую вычерченную сферу, у которой из центра проведен радиус-вектор параллельно направлению оси каждой из n молекул. Распределение кончиков радиус-векторов по сфере будет представлять распределение осей молекул. В случае обыкновенного железа эти n точек равномерно распределены на любом участке поверхности сферы, и число молекул, оси которых составляют с осью x углы меньше α, равно $(n/2)(1-\cos\alpha)$, следовательно, число молекул, оси которых составляют с осью углы, лежащие в интервале α, $\alpha+d\alpha$, окажется равным $(n/2)\sin\alpha\, d\alpha$.

Таково расположение молекул в куске железа, ранее ни разу не подвергавшегося намагничиванию.

Допустим теперь, что на железо в направлении оси x действует магнитная сила X, и рассмотрим молекулу, ось которой была первоначально отклонена от оси x на угол α.

Если эта молекула может поворачиваться совершенно свободно, она займет положение, в котором ее ось параллельна оси x. Если бы все молекулы были такими, то самой слабой намагничивающей силы оказалось бы достаточно для достижения самой наивысшей степени намагниченности. Однако это не так.

Молекулы не поворачиваются в положение, в котором их оси параллельны оси x, что обусловлено либо воздействием на каждую молекулу некоторой

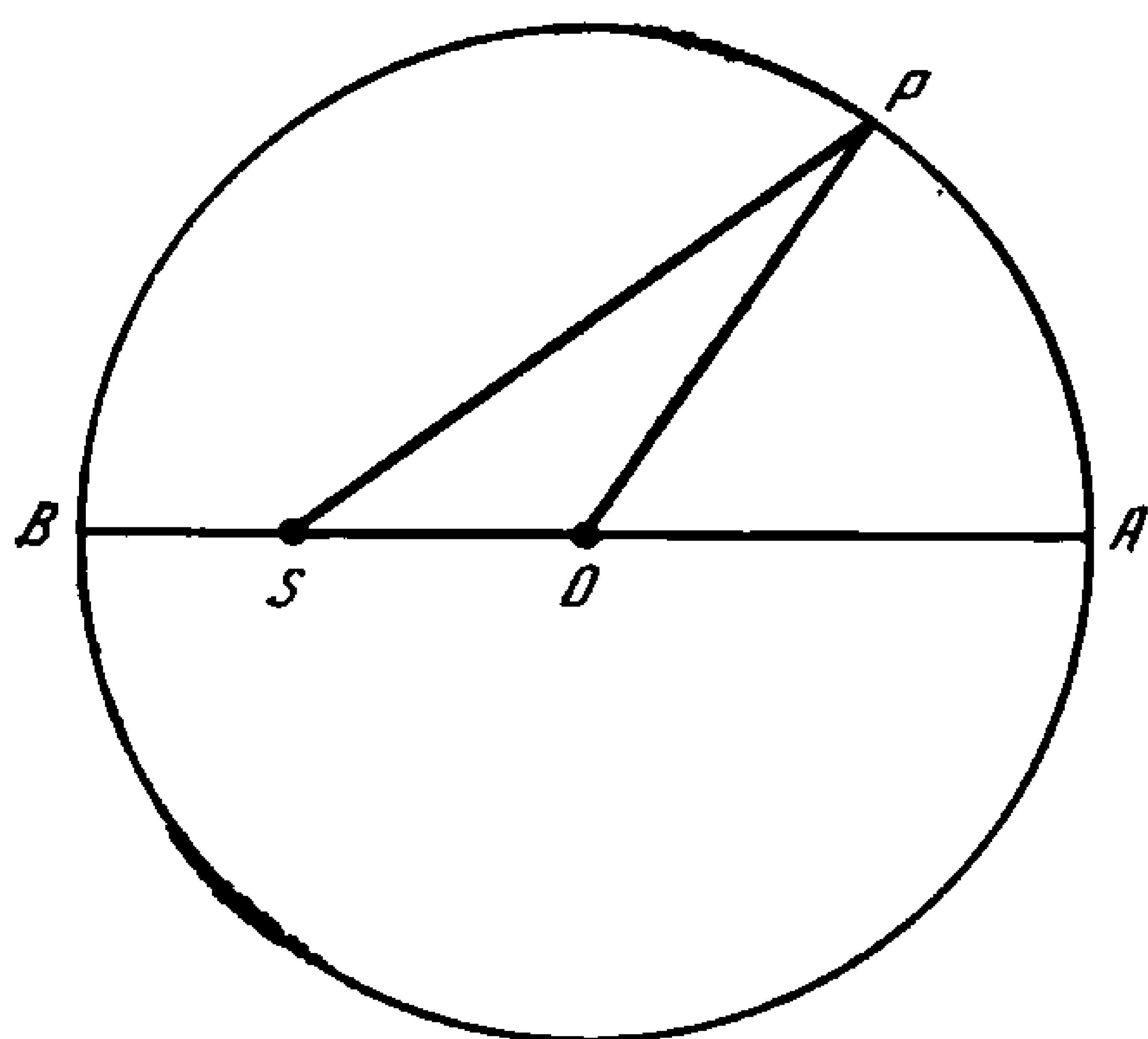


Рис. 5

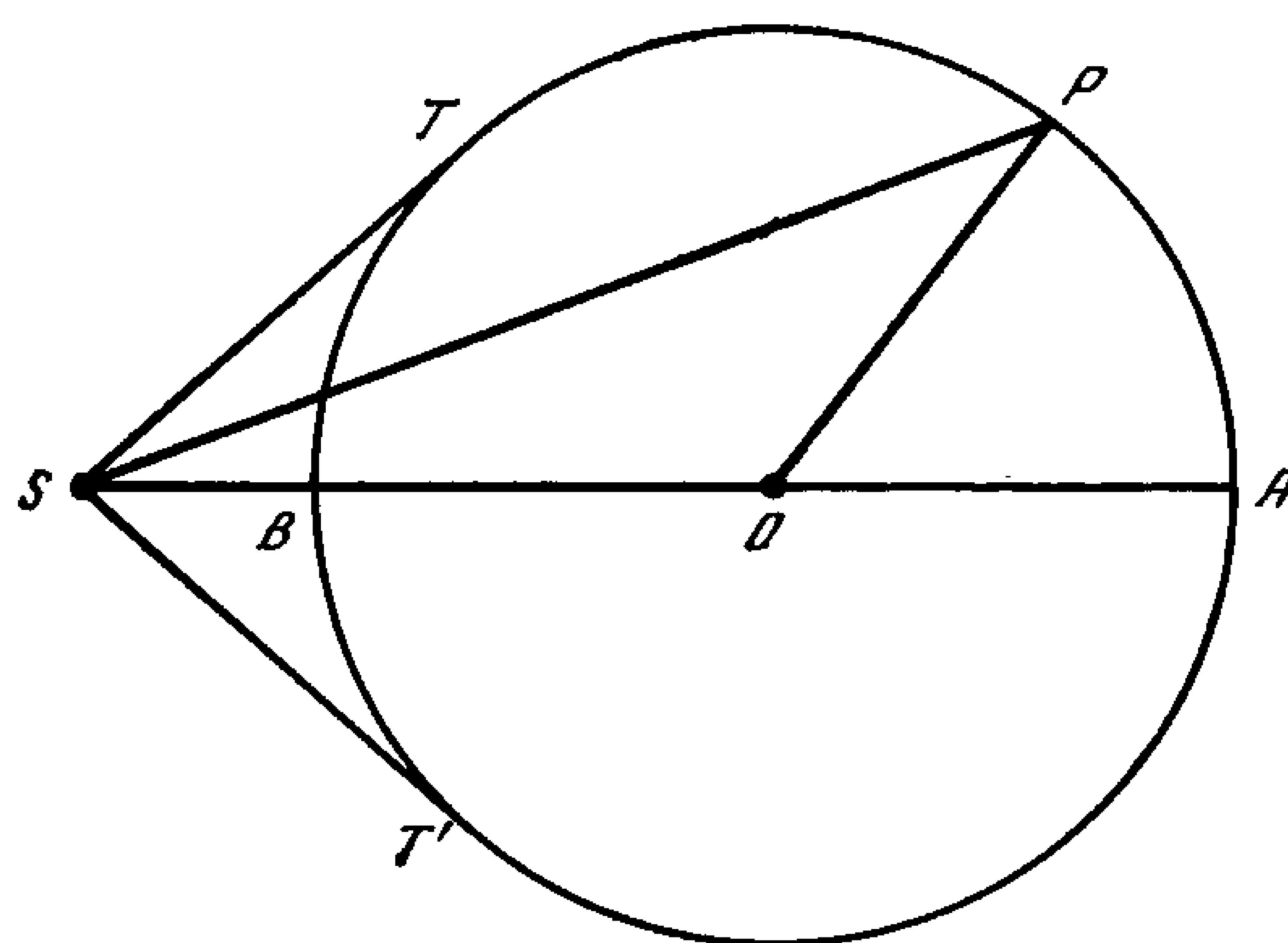


Рис. 6

силы, стремящейся удержать ее в первоначальном направлении, либо эффектом, эквивалентным этому, но производимым взаимодействием всей системы молекул.

Вебер принял первое предположение как наиболее простое, считая, что каждая молекула стремится при отклонении вернуться в исходное положение под действием такой силы, которую производила бы некоторая магнитная сила D, действующая в первоначальном направлении оси молекулы.

Положение, которое в действительности примет ось, определяется, следовательно, направлением равнодействующей сил X и D.

Пусть APB представляет сечение сферы, радиус которой в некотором масштабе определяется силой D.

Направим радиус OP параллельно оси какой-либо отдельной молекулы в ее первоначальном положении.

Пусть отрезок SO представляет в том же масштабе намагничивающую силу X в предположении, что она действует в направлении от S к O. Тогда при воздействии на молекулу силы X вдоль SO и силы D вдоль направления, параллельного первоначальному направлению ее оси, ось молекулы установится в направлении SP, т. е. вдоль равнодействующей сил X и D.

Поскольку оси молекул ориентированы вначале по всем направлениям, P может находиться в любой точке сферы безразлично. На рис. 5, где X меньше, чем D, ось в конечном положении также может быть повернута в каком угодно направлении, но уже не безразлично, так как по направлению к A большая часть молекул будет повернута своими осями, нежели по направлению к B. На рис. 6, где X больше D, оси всех молекул будут ограничены конусом TST', касающимся сферы.

Таким образом, существуют два различных случая, соответствующих значениям X, превышающим или не превышающим значение D.

Пусть

$\alpha = AOP$ — начальный наклон оси молекулы относительно оси x;

$\vartheta = ASP$ — наклон оси при отклонении силой X;

$\beta = SPO$ — угол отклонения;

$SO = X$ — намагничивающая сила;

$OP=D$ — сила, стремящаяся возвратить ось в первоначальное положение;
$SP=R$ — результирующая сил X и D;
m — магнитный момент молекулы.

Тогда момент статической пары сил, обусловленный наличием силы X и стремящийся уменьшить угол ϑ, будет равен $mL=mX \sin \vartheta$, а момент, обусловленный силой D и стремящийся увеличить угол ϑ, $mL=mD \sin \beta$.

Приравнивая эти величины и помня, что $\beta=\alpha-\vartheta$, находим

$$\operatorname{tg} \vartheta=\frac{D \sin \alpha}{X+D \cos \alpha}, \tag{1}$$

что и определяет направление оси после отклонения.

Далее мы должны найти интенсивность намагниченности, созданной силой X во всей массе тела, для чего необходимо спроектировать магнитный момент каждой молекулы на направление x и сложить все эти проекции.

Составляющая момента молекулы вдоль направления x равна $m \cos \vartheta$, а число молекул, у которых начальное отклонение лежит в пределах α, $\alpha+d\alpha$, составляет $(n/2) \sin \alpha \, d\alpha$.

Таким образом, необходимо проинтегрировать

$$I=\int_0^\pi \frac{mn}{2} \cos \vartheta \sin \alpha \, d\alpha, \tag{2}$$

помня, что ϑ является функцией угла α.

Мы можем выразить ϑ и α через R, тогда подынтегральное выражение примет вид

$$-\frac{mn}{4X^2D}(R^2+X^2-D^2)\,dR, \tag{3}$$

неопределенный интеграл от которого равен

$$-\frac{mnR}{12X^2D}(R^2+3X^2-3D^2)+C. \tag{4}$$

В первом случае, когда X меньше D, интегрирование ведется в пределах от $R=D+X$ до $R=D-X$, а во втором случае, когда X больше D,— от $R=X+D$ до $R=X-D$.

Если X меньше D, то $I=\frac{2}{3}\frac{mn}{D}X$. (5)

Если X равно D, то $I=\frac{2}{3}mn$. (6)

Если X больше D, то $I=mn\left(1-\frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}\right)$. (7)

Если X становится бесконечным, то $I=mn$. (8)

Согласному этому варианту теории, принятому Вебером [5], при увеличении намагничивающей силы от O до D намагниченность растет пропорционально ей и достигает двух третей своего предельного значения, когда намагничивающая сила

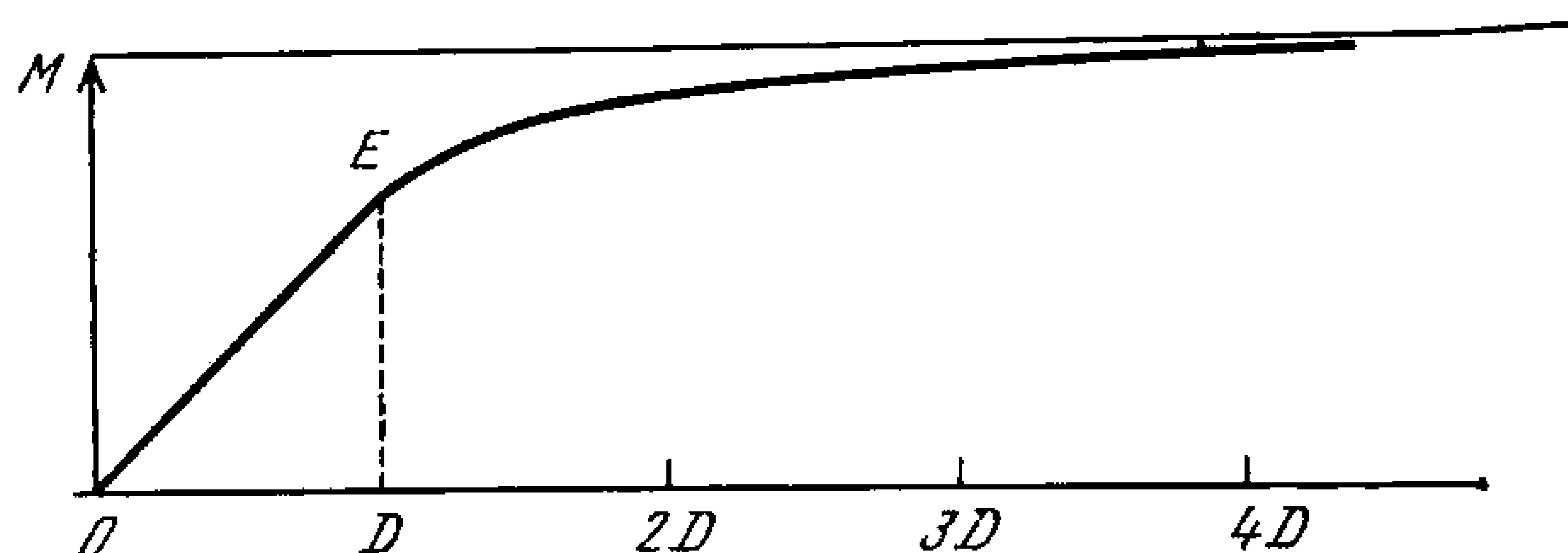


Рис. 7

достигает значения D. При дальнейшем увеличении намагничивающей силы намагниченность вместо бесконечного роста стремится к конечному пределу.

Этот закон намагниченности показан на рис. 7, где намагничивающая сила отсчитывается от точки O вправо, а намагниченность выражается вертикальной ординатой. Результаты собственных опытов Вебера дают удовлетворительное согласие с этим законом. Вероятно, однако, что значение D не одинаково для всех молекул одного и того же образца железа, поэтому переход от прямолинейного участка OE к криволинейному участку после E может происходить не столь резко, как здесь представлено.

444. Теория в таком виде не содержит учета остаточной намагниченности, существование которой обнаруживается после удаления намагничивающей силы. Поэтому я подумал, что желательно изучить, к каким результатам приведет дополнительное предположение относительно условий, при которых положение равновесия молекулы может быть смещено на постоянную величину.

Предположим, что если угол отклонения β меньше некоторого угла β_0, то ось магнитной молекулы при удалении отклоняющей силы возвращается к первоначальному положению, если же угол β превышает β_0, то при удалении отклоняющей силы ось не возвращается к первоначальному положению, а остается отклоненной на угол $\beta-\beta_0$, который, таким образом, может быть назван углом *установления* молекулы (permanent set).

Не следует думать, что сделанное нами предположение относительно закона молекулярного отклонения основано на точном понимании внутренней структуры тел, оно принимается нами в силу нашего невежества по части истинного положения вещей, как помощь воображению для претворения высказанных Вебером идей.

Положим

$$L=D\sin\beta_0, \tag{9}$$

[5] В формуле, данной Вебером (Abhandlungen der Kg. Sächs-Gesellschaft der Wissens, I, p. 572 (1852) или *Pogg. Ann.* LXXXVII, p. 167 (1852)) есть какая-то ошибка в окончательном выражении для этого интеграла (промежуточные выкладки не приводятся). Его формула выглядит так:

$$I=mn\frac{X}{\sqrt{X^2+D^2}}\,\frac{X^4+\frac{7}{6}X^2D^2+\frac{2}{3}D^4}{X^4+X^2D^2+D^4}.$$

Рис. 8

Рис. 9

тогда если крутящий момент, действующий на молекулу, меньше mL, то постоянного отклонения не возникнет, если же он больше mL, то появится постоянное изменение положения равновесия.

Чтобы проследить результат этого предположения, нарисуем сферу с центром в точке O радиусом $OL=L$.

Пока X меньше L, все будет происходить так, как в уже рассмотренном случае, но, когда сила X превысит L, она начнет создавать у некоторых молекул постоянное отклонение.

Возьмем случай, изображенный на рис. 8, где X больше L, но меньше D. Построим двойной конус с вершиной в точке S, касающийся сферы L и пересекающийся со сферой D в точках P и Q. Тогда, если в начальном положении ось молекулы лежит между OA и OP или между OB и OQ, она отклонится на угол, меньший β_0, и постоянного отклонения не возникнет. Но если ось молекулы первоначально располагалась между OP и OQ, то на нее будет действовать крутящий момент, больший L, который отклонит ее в положение SP, и после прекращения действия силы она не восстановит свое первоначальное направление, а окажется постоянно установленной в направлении OP.

Положим

$$L=X\sin\vartheta_0, \quad \text{где } \vartheta_0=PSA \quad \text{или} \quad QSB.$$

Тогда все те молекулы, оси которых согласно прежней гипотезе имели бы углы ϑ, лежащие между ϑ_0 и $\pi-\vartheta_0$, будут во время действия силы X иметь угол ϑ_0.

Следовательно, пока действует сила X, те молекулы, оси которых при отклонении лежали в пределах любой поверхности двойного конуса с углом ϑ_0 между осью и образующей, выстроятся, как и в предыдущем случае, а те молекулы, оси которых по предыдущей теории лежали бы вне этих поверхностей, получат постоянное отклонение и образуют плотное обрамление около поверхности конуса, обращенного в сторону A.

С ростом X число молекул, принадлежащих конусу, окружающему B, непрерывно уменьшается, и, когда X достигнет значения D, все молекулы будут вырваны из своих прежних положений равновесия и встроены в обрамление конуса,

окружающего A, так что при X больше D все молекулы будут образовывать либо часть конуса вокруг A, либо его обрамление [рис. 9].

После удаления силы X, если она не превышает L, все возвратится в свое исходное состояние. Если же сила X лежит между L и D, то будет существовать два конуса: один вокруг A с углом $AOP=\vartheta_0+\beta_0$, другой вокруг B с углом $BOQ=$ $=\vartheta_0-\beta_0$. В пределах этих конусов оси всех молекул распределены равномерно. Но молекулы, оси которых вначале располагались вне этих конусов, будут вырваны из своих исходных позиций и сформируют обрамление конуса, окружающего A.

Если X больше D, конус вокруг B полностью пропадает, а все молекулы, формировавшие его, образуют обрамление конуса вокруг A с углом отклонения $\vartheta_0+\beta_0$.

445. Рассматривая этот случай тем же способом, что и раньше для интенсивности намагниченности, индуцированно возникающей во время действия силы X, приложенной к железу, ранее никогда не намагничиваемому, мы найдем:

если сила X меньше L, то $I=\frac{2}{3}M\frac{X}{D}$;

если сила X равна L, то $I=\frac{2}{3}M\frac{L}{D}$;

если сила X больше L, но меньше D, то

$$I=M\left\{\frac{2}{3}\frac{X}{D}+\left(1-\frac{L^2}{X^2}\right)\left[\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{X^2}{D^2}-\frac{L^2}{D^2}}\right]\right\};$$

если сила X равна D, то $I=M\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{L^2}{D^2}\right)^{3/2}\right\}$;

если сила X больше D, то

$$I=M\left\{\frac{1}{3}\frac{X}{D}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\frac{D}{X}+\frac{(D^2-L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2D}-\frac{\sqrt{X^2-L^2}}{6X^2D}(2X^2-3XD+L^2)\right\};$$

если сила X бесконечна, то $I=M$.

Пока сила X меньше L, намагниченность подчиняется прежнему закону — она пропорциональна намагничивающей силе. Как только X превысит L, намагниченность испытывает более крутой рост за счет молекул, переходящих от одного конуса к другому. Этот быстрый рост, однако, вскоре прекращается, по мере того как число молекул, формирующих отрицательный конус, уменьшается и в конце концов намагниченность достигает своего предельного значения M.

Если бы предположить, что величины L и D различны для различных молекул, то в результате различные стадии намагничивания оказались бы менее четко разграниченными.

Остаточная намагниченность I', создаваемая намагничивающей силой X и наблюдаемая после ее удаления, принимает такие значения:

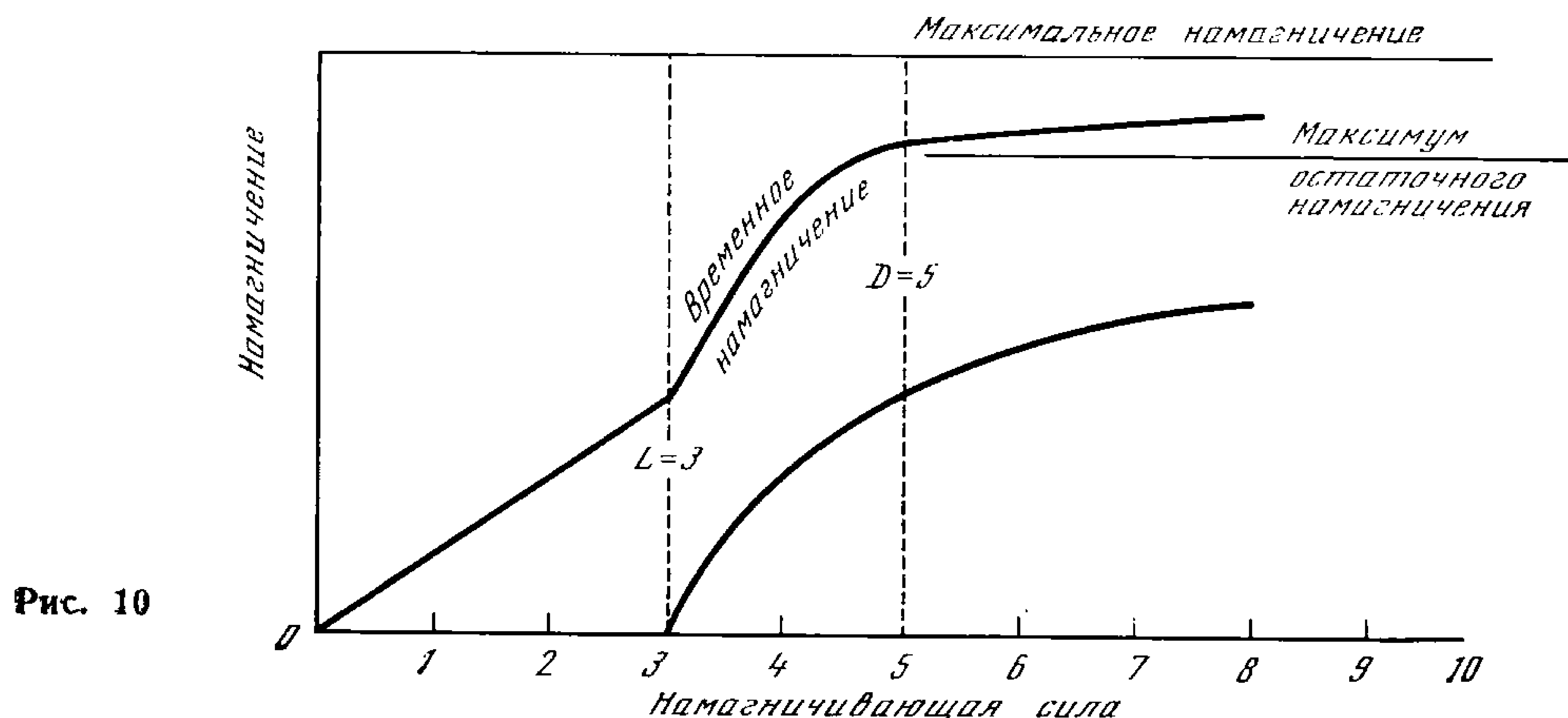


Рис. 10

если сила X меньше L, то остаточная намагниченность отсутствует;

если сила X больше L, но меньше D, то $I' = M\left(1-\frac{L^2}{D^2}\right)\left(1-\frac{L^2}{X^2}\right)$;

если сила X равна D, то $I' = M\left(1-\frac{L^2}{D^2}\right)^2$;

если сила X больше D, то $I' = \frac{1}{4}M\left\{1-\frac{L^2}{XD}+\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}}\right\}^2$;

если сила X бесконечна, то $I' = \frac{1}{4}M\left\{1+\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}\right\}^2$.

Взяв значения $M=1000$, $L=3$, $D=5$, найдем следующие величины временно индуцированной и остаточной намагниченности:

Намагничивающая сила X	Индуцированная намагниченность I	Остаточная намагниченность I'	Намагничивающая сила X	Индуцированная намагниченность I	Остаточная намагниченность I'
0	0	0	5	837	410
1	133	0	6	864	485
2	267	0	7	882	537
3	400	0	8	897	575
4	729	280	∞	1000	810

Эти результаты изображены на рис. 10.

Сначала, в пределах от $X=0$ до $X=L$, кривая индуцированной намагниченности представляет собой прямую линию, затем она растет быстрее, вплоть до $X=D$, а с дальнейшим увеличением X приближается к своей горизонтальной асимптоте.

Кривая остаточной намагниченности начинается со значения $X=L$ и приближается к асимптоте с ординатой 0,81 M.

Следует помнить, что найденные выше значения остаточной намагниченности соответствуют случаю, когда при удалении внешней силы никаких размагничи-

вающих сил, связанных с распределением магнетизма внутри самого тела, не возникает. Следовательно, эти вычисления могут быть отнесены только к очень вытянутым продольно намагниченным телам. В случае коротких и толстых образцов остаточная намагниченность из-за реакции свободного магнетизма будет уменьшаться так же, как это происходило бы под действием обратной по направлению внешней намагничивающей силы.

446. Научная значимость теории подобного рода, где мы сделали так много предположений и ввели так много подбираемых констант, не может оцениваться только численным согласием с какой-либо серией экспериментов. Если в ней и есть ценность, то благодаря тому, что она позволяет нам воссоздать некоторую мысленную картину того, что происходит в куске железа в процессе его намагничивания. Чтобы проверить теорию, применим ее к случаю, когда к куску железа, ранее подвергнутому действию намагничивающей силы X_0, вновь прикладывается намагничивающая сила X_1.

Если новая сила X_1 действует в том же направлении, в котором действовала сила X_0 (мы будем называть его положительным), то при значениях, меньших X_0, она не вызовет никакого постоянного установления осей молекул, а при удалении X_1 остаточная намагниченность окажется такой же, какая была произведена силой X_0. Если же сила X_1 превысит X_0, то эффект, вызванный ею, будет таким же, как если бы сила X_0 не действовала.

Предположим теперь, что сила X_1 действует в отрицательном направлении, причем $X_0=L \operatorname{cosec} \vartheta_0$, и $X_1=-L \operatorname{cosec} \eta_1$.

При увеличении абсолютной величины X_1 угол ϑ_1 уменьшается. Под действием силы X_1 первыми получат постоянное отклонение те молекулы, которые образуют обрамление конуса вокруг A, их угол до отклонения равен $\vartheta_0+\beta_0$.

Как только угол $\vartheta_1-\beta_0$ станет меньше $\vartheta_0+\beta_0$, начнется процесс размагничивания. Поскольку в этот момент $\vartheta_1=\vartheta_0+2\beta_0$, то сила X_1, требуемая для начала процесса размагничивания, оказывается меньше силы X_0, которая произвела намагничивание.

Если бы значения D и L были одинаковы для всех молекул, то малейшее увеличение X_1 сорвало бы весь слой молекул, оси которых имели наклон $\vartheta_0+\beta_0$, и повернуло бы их в положение с наклоном $\vartheta_0+\beta_1$ относительно отрицательного направления OB.

Действительное размагничивание происходит не так мгновенно, но все же достаточно быстро, чтобы было допустимо считать его некоторым подтверждением данного варианта процесса.

Предположим теперь, что при должном значении обратной силы X_1 можно после удаления ее получить полностью размагниченный кусок железа.

Оси молекул при этом уже не будут расположены безразлично к любому направлению, как это имело место в куске железа, никогда не подвергавшегося намагничиванию. Они распределятся по трем группам:

(1). В пределах конуса с половинным углом $\vartheta_1-\beta_0$, окружающего положительный полюс, оси молекул сохранят свои первоначальные положения.

(2). То же самое и в пределах конуса с половинным углом $\vartheta_0-\beta_0$, окружающего отрицательный полюс.

(3). Оси всех остальных молекул образуют коническую поверхность, окружающую отрицательный полюс, угол наклона их равен $\vartheta_1+\beta_0$.

При значениях X_0, больших D, вторая группа отсутствует. При X_1 больше D отсутствует также и первая группа.

Таким образом, состояние этого железа, хотя и кажущегося размагниченным, отличается от состояния куска железа, ни разу не подвергавшегося намагничению.

Чтобы показать это, рассмотрим влияние намагничивающей силы X_2, действующей в положительном или отрицательном направлениях. Эффект постоянного намагничивания будет обусловлен прежде всего действием силы на молекулы третьей группы, оси которых составляют углы $\vartheta_1+\beta_0$ с отрицательной осью.

Если сила X_2 действует в отрицательном направлении, она начнет приводить к эффекту постоянного намагничивания, как только угол $\vartheta_2+\beta_0$ окажется меньшим, чем $\vartheta_1+\beta_0$, т. е. как только X_2 превысит X_1. Если же сила X_2 действует в положительном направлении, она вновь начнет намагничивать железо, как только угол $\vartheta_2-\beta_0$ станет меньше угла $\vartheta_1+\beta_0$, т. е. начиная с $\vartheta_2=\vartheta_1+2\beta_0$, или пока сила X_2 все еще много меньше, чем X_1.

Таким образом, из сделанной нами гипотезы, по-видимому, вытекает следующее.

Если кусок железа был намагничен силой X_0, его остаточная намагниченность не может быть увеличена без приложения к нему силы, превышающей X_0. Для уменьшения остаточной намагниченности достаточно приложить в противоположном направлении силу, меньшую чем X_0.

Если железо полностью размагничено обратной силой X_1, оно не может быть намагничено в противоположном направлении без приложения к нему силы, большей чем X_1, но для повторного намагничивания железа в первоначальном направлении достаточно положительной силы, меньшей чем X_1.

Эти результаты согласуются с тем, что было действительно обнаружено Ритчи [6], Якоби [7], Марианини [8] и Джоулем [9].

Очень полные данные для отношения намагниченности железа и стали к магнитным силам и механическим напряжениям содержатся в книге Видемана «*Гальваника*». Подробно сравнивая эффекты намагничивания и кручения, он показал, что идеи упругости и пластичности, заимствованные нами из опытов с упругими (временно возникающими) и неупругими (постоянными) скручиваниями проволок, могут быть приложены с равной приемлемостью к индуцированной (временно возникающей) и постоянной намагниченностям железа и стали.

447. Маттьюччи [10] обнаружил, что растяжение стержня из твердого железа, производимое во время действия намагничивающей силы, увеличивает индуцированную намагниченность стержня, что было подтверждено Вертхаймом. В случае стержней из мягкого железа магнетизм при растяжении уменьшается.

Постоянный магнетизм железного стержня увеличивается при его растяжении и уменьшается при сжатии.

---

[6] *Phil. Mag.*, 3, 1833.
[7] *Pogg. Ann.*, 31, 367, 1834.
[8] *Ann. de Chimie et de Physique*, 16, p. 436 and 448, 1846.
[9] *Phil. Trans.*, 1856, p. 287.
[10] *Ann. de Chimie et de Physique*, 53, p. 385, 1858.

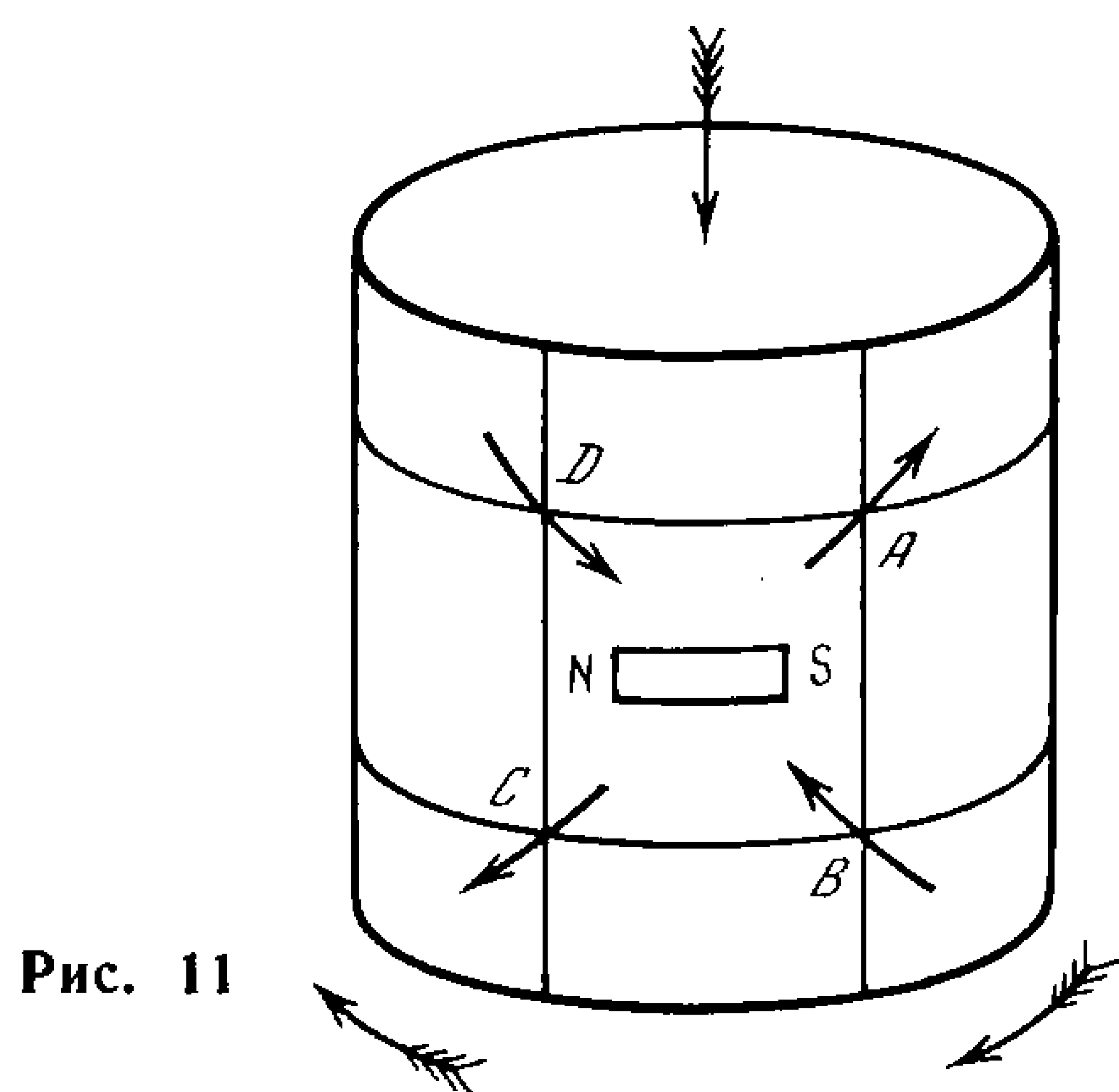


Рис. 11

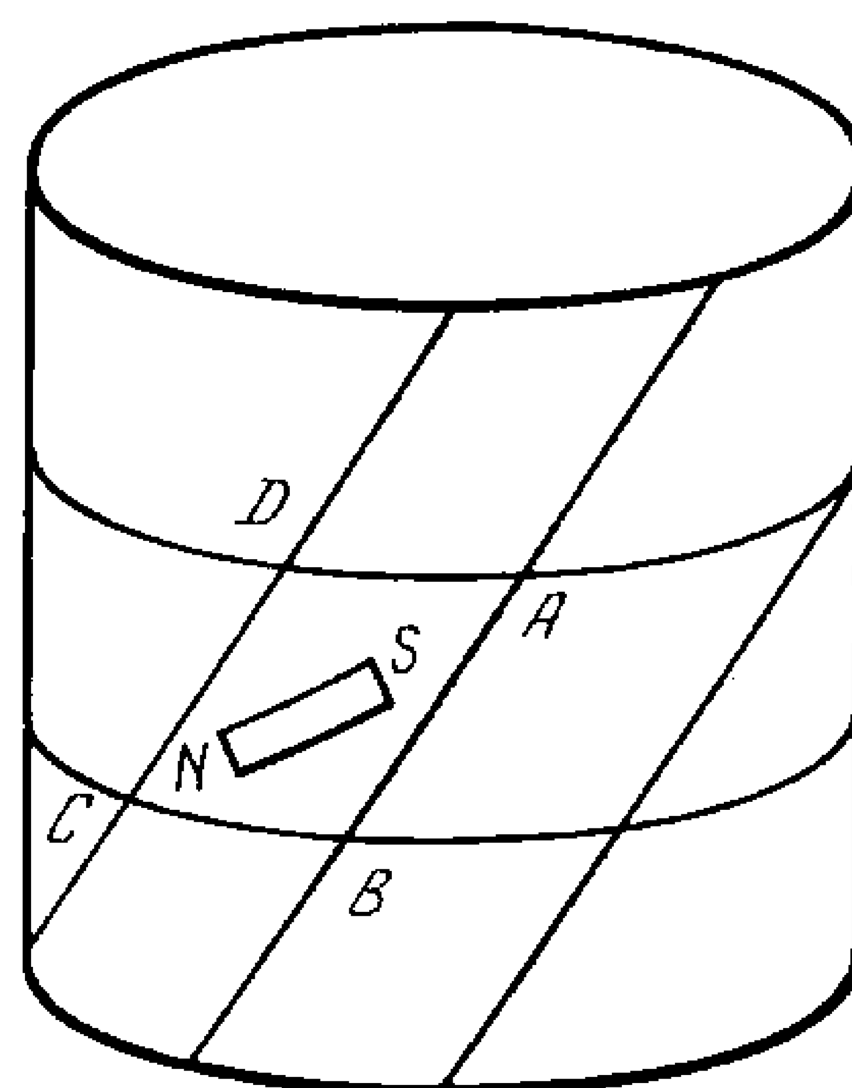


Рис. 12

В частности, если кусок железа, первоначально намагниченный в одном направлении, затем растягивается в другом, то направление намагниченности в нем стремится сблизиться с направлением растяжения. Если его сжимать, то направление намагниченности стремится стать нормальным относительно направления сжатия.

Это объясняет результаты эксперимента Видемана. По вертикальной проволоке пропускался ток сверху вниз. Если во время прохождения тока или после того, как он прекратился, проволоку скрутить в направлении правого винта, нижний конец становится северным полюсом.

Здесь ток, текущий вниз, намагничивает каждую часть проволоки в тангенциальном направлении, как это показано на рис. 11 буквами *NS*.

Скручивание проволоки по правому винту приводит к тому, что участок *ABCD* оказывается растянутым по диагонали *AC* и сжатым по диагонали *BD* (см. рис. 12). Поэтому направление намагниченности стремится приблизиться к *AC* и удалиться от *BD*, в результате чего нижний конец становится северным полюсом, а верхний — южным.

Влияние намагниченности на размеры магнита

448. В 1842 г. Джоуль обнаружил [11], что железный стержень удлиняется, когда он становится магнитным из-за электрического тока, протекающего в окружающей его катушке. Впоследствии, помещая стержень в стеклянную трубку с водой, он показал [12], что объем железа при намагничивании не увеличивается, и сделал вывод, что поперечные размеры сокращаются.

Наконец, он пропустил электрический ток в прямом направлении вдоль оси железной трубки и в обратном направлении по ее наружной части; трубка, таким образом, превратилась в замкнутый магнитный соленоид с намагниченностью, направленной под прямыми углами к оси трубки. Оказалось, что длина оси трубки в этом случае уменьшилась.

---

[11] Sturgeon's *Annals of Electricity*, vol. VIII, p. 219.
[12] *Phil.* Mag., XXX, 1847.

Он нашел, что железный прут, к которому приложено продольное давление, также удлиняется при намагничивании. Однако, если на прут оказывается значительное продольное растяжение, действие намагничивания состоит в укорочении прута.

Это относится к проволоке диаметром четверть дюйма, растянутой весом более 600 фунтов.

В случае проволоки из твердой стали влияние намагничивающей силы сводилось к укорочению проволоки независимо от того, подвергалась она растяжению или сжатию. Изменение длины имело место только в течение времени действия намагничивающей силы и не наблюдалось под влиянием постоянной намагниченности стали.

Джоуль определил, что удлинение железных проволок примерно пропорционально квадрату истинной намагниченности, поэтому первое действие размагничивающего тока состояло в укорачивании проволоки.

С другой стороны, он нашел, что эффект укорачивания растянутой железной проволоки или стали меняется как произведение намагниченности на намагничивающий ток.

Видеман нашел, что если по вертикальной проволоке, намагниченной южным полюсом кверху, пропустить сверху вниз электрический ток, то нижний, свободно подвешенный конец проволоки скрутится по часовой стрелке, если смотреть сверху, или, другими словами, проволока окажется скрученной как правый винт, если соотношение между продольным током и намагничивающим током является правовинтовым.

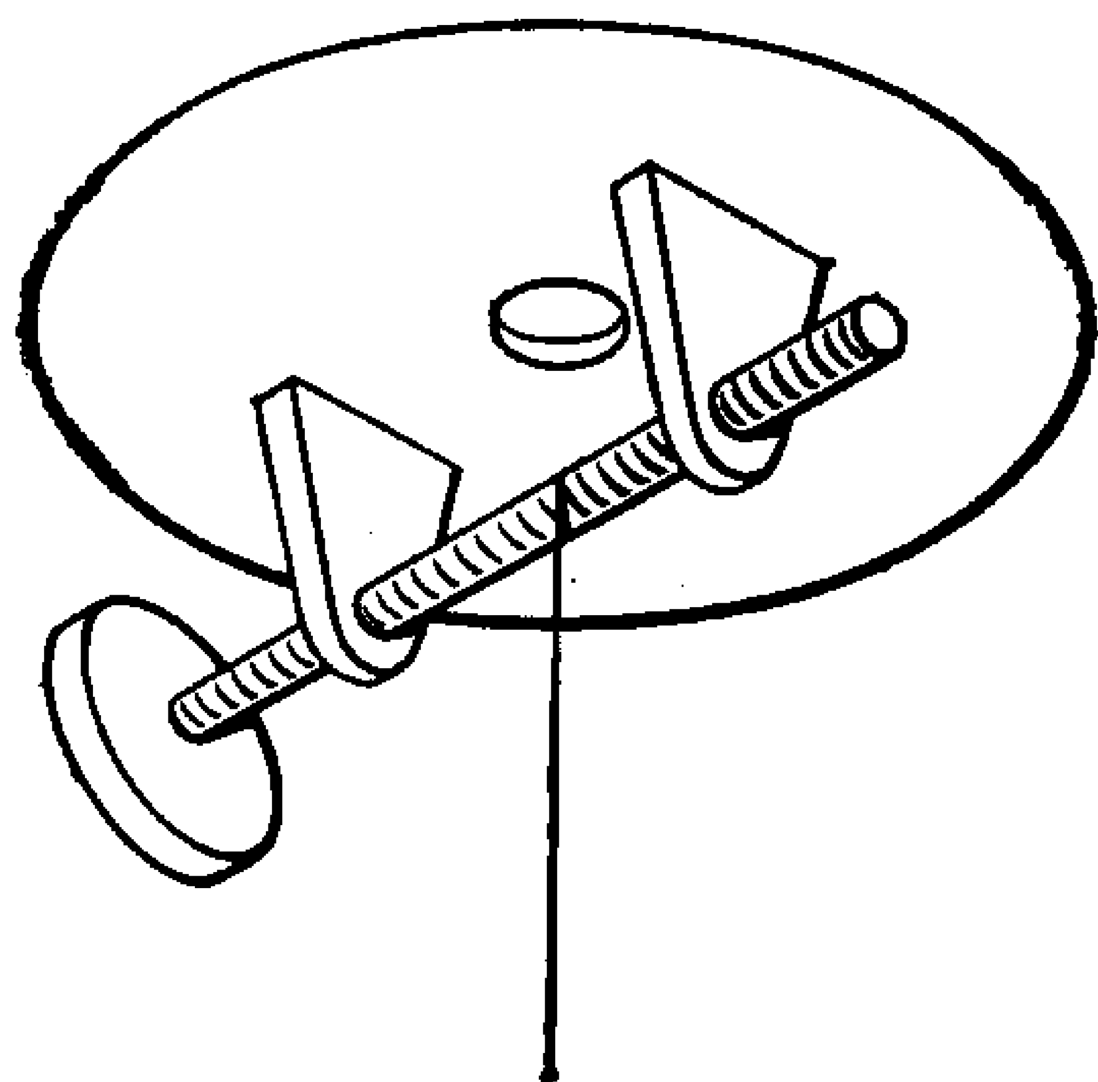
В этом случае результирующая намагниченность, обусловленная как действием тока, так и существовавшей ранее намагниченностью, будет направлена по правому винту вокруг проволоки. Следовательно, скручивание будет указывать на то, что железо при намагничивании расширяется в направлении намагниченности и сжимается в направлении, ей перпендикулярном. Это согласуется с результатами Джоуля.

Дальнейшее развитие теории намагниченности см. в п. 832—845.

ГЛАВА VII
МАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

449. Основные магнитные измерения состоят в определении магнитной оси и магнитного момента магнита, а также в определении направления и величины магнитной силы в данном месте.

Так как эти измерения обычно выполняются вблизи земной поверхности, то на магниты всегда действуют сила тяжести и земной магнетизм, а поскольку магниты изготовляются из стали, их магнетизм является частично постоянным и частично индуцированным. Постоянная намагниченность меняется при изменении температуры, при сильной индукции и резких ударах; индуцированная намагниченность меняется при любой вариации внешней магнитной силы.



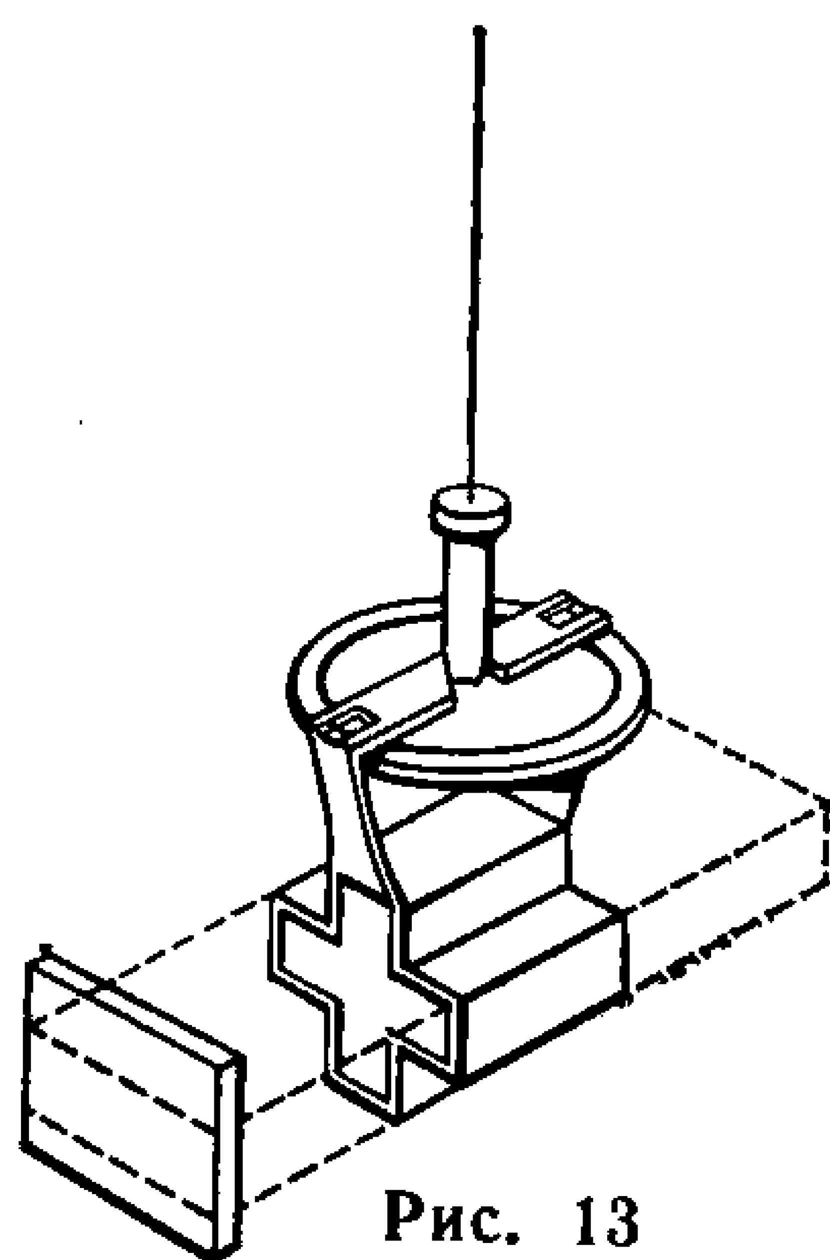


Рис. 13

Для наблюдения действующих на магнит сил удобнее всего сделать его свободно вращающимся вокруг вертикальной оси. В обычном компасе это достигается путем балансировки магнита на вертикальном стержне. Чем тоньше острие стержня, тем меньше момент трения, препятствующий действию магнитной силы. Для более точных наблюдений магнит подвешивается на нити, составленной из незакрученного шелкового волокна, одиночного или удвоенного в нужное число раз так, чтобы на каждое из параллельных волокон, образующих эту нить, приходилась по возможности одинаковая доля веса. У такой нити сила закручивания намного меньше, чем у металлической проволоки равной натяженности, и она может быть вычислена через измеряемый азимут магнита, что невозможно в случае силы, возникающей из-за трения об острие стержня.

Нить подвеса можно поднимать или опускать, поворачивая горизонтальный винт, работающий в неподвижной гайке. Нить намотана вдоль нарезки винта так, что при повороте винта она всегда продолжает висеть вдоль одной и той же вертикальной линии.

К нити подвеса прикреплен небольшой градуированный круг, называемый поворотным кругом, а также хомутик с указателем, который можно совместить с любым наперед заданным делением на поворотном круге. Форма хомутика позволяет укрепить в нем магнитный брусок так, чтобы ось магнита была горизонтальной и любая из его четырех поверхностей могла быть обращена кверху.

Для установления нуля угла поворота в хомутик помещается немагнитное тело одинакового веса с магнитом и отмечается положение поворотного круга в равновесии [рис. 13].

Сам по себе магнит — это кусок закаленной стали. Согласно Гауссу и Веберу, его длина должна быть по крайней мере в восемь раз больше максимального поперечного размера. Это необходимо, если наиболее важным соображением считать постоянство магнитной оси в пределах магнита. Когда требуется безынерционность, магнит должен быть короче; для того чтобы наблюдать резкие изменения магнитной силы, лучше даже использовать поперечно намагниченный брусок, подвешенный вертикально [1].

450. Магниту придается устройство для определения его угловой координаты. Для обычных целей на концах магнита делаются отметки, а под магнитом размеща-

[1] Joule, *Proc. Phil. Soc.*, *Manchester*, Nov. 29, 1864.

ется градуированный круг, по которому их положение считывается глазом, находящимся в плоскости нити подвеса и острия стрелки.

Для более точных наблюдений к магниту прикрепляется плоское зеркальце, нормаль к которому как можно точнее совпадает с осью намагниченности. Этот метод принят Гауссом и Вебером.

При другом методе на одном конце магнита помещается линза, а на другом — шкала, нанесенная на стекло, причем расстояние от линзы до шкалы равно главному фокусному расстоянию линзы. Прямая линия, соединяющая нуль шкалы с оптическим центром линзы, должна как можно точнее совпадать с магнитной осью.

Эти оптические методы определения угловой координаты подвешенного прибора играют важную роль во многих физических исследованиях, поэтому мы здесь рассмотрим их математическую теорию сразу для всех случаев.

Теория зеркального метода

Будем считать, что прибор, угловое положение которого необходимо измерить, может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Обычно этой осью является нить или проволока, на которой он подвешен. Зеркало должно быть настолько плоским, чтобы миллиметровая шкала отчетливо просматривалась при отражении с расстояния в несколько метров.

Нормаль, выходящая из середины зеркала, должна проходить через ось подвеса и быть строго горизонтальной. Мы будем называть ее линией визирования (коллимации) прибора.

Грубо установив среднее направление линии визирования для предстоящих экспериментов, поместим на удобном расстоянии перед зеркалом телескоп чуть выше уровня зеркала.

Телескоп может перемещаться в вертикальной плоскости; он направлен в сторону нити подвеса прямо над зеркалом; на линии визирования устанавливается неподвижная отметка на расстоянии от объектива, равном удвоенному расстоянию от него до зеркала. Аппаратуру по возможности следует разместить так, чтобы эта отметка была расположена на стене или на другом неподвижном предмете. Для того чтобы видеть в телескопе одновременно и отметку и нить подвеса, можно надеть на объектив насадку со щелью вдоль вертикального диаметра, снимаемую во время других наблюдений. Затем телескоп регулируется вплоть до получения в его фокусе отчетливого совмещения отметки с вертикальной проволочной риской.

Под телескопом подвешивается отвес, линия которого проходит прямо перед оптическим центром объектива. Ниже телескопа, непосредственно за отвесом устанавливается равномерная шкала перпендикулярно плоскости, проходящей через отметку, нить подвеса и линию отвеса. Сумма высот над полом, на которых расположены шкала и объектив, должна равняться удвоенной высоте зеркала. Если теперь телескоп направить на зеркало, наблюдатель увидит отражение шкалы. Когда участок шкалы, в котором ее пересекает линия отвеса, окажется в телескопе, совпадающим с вертикальной проволочной риской телескопа, линия визирования зеркала совместится с плоскостью, проходящей через отметку и оптический центр объектива. При совпадении вертикального провода с любым другим делением шкалы угловое положение линии визирования находится следующим образом [рис. 14].

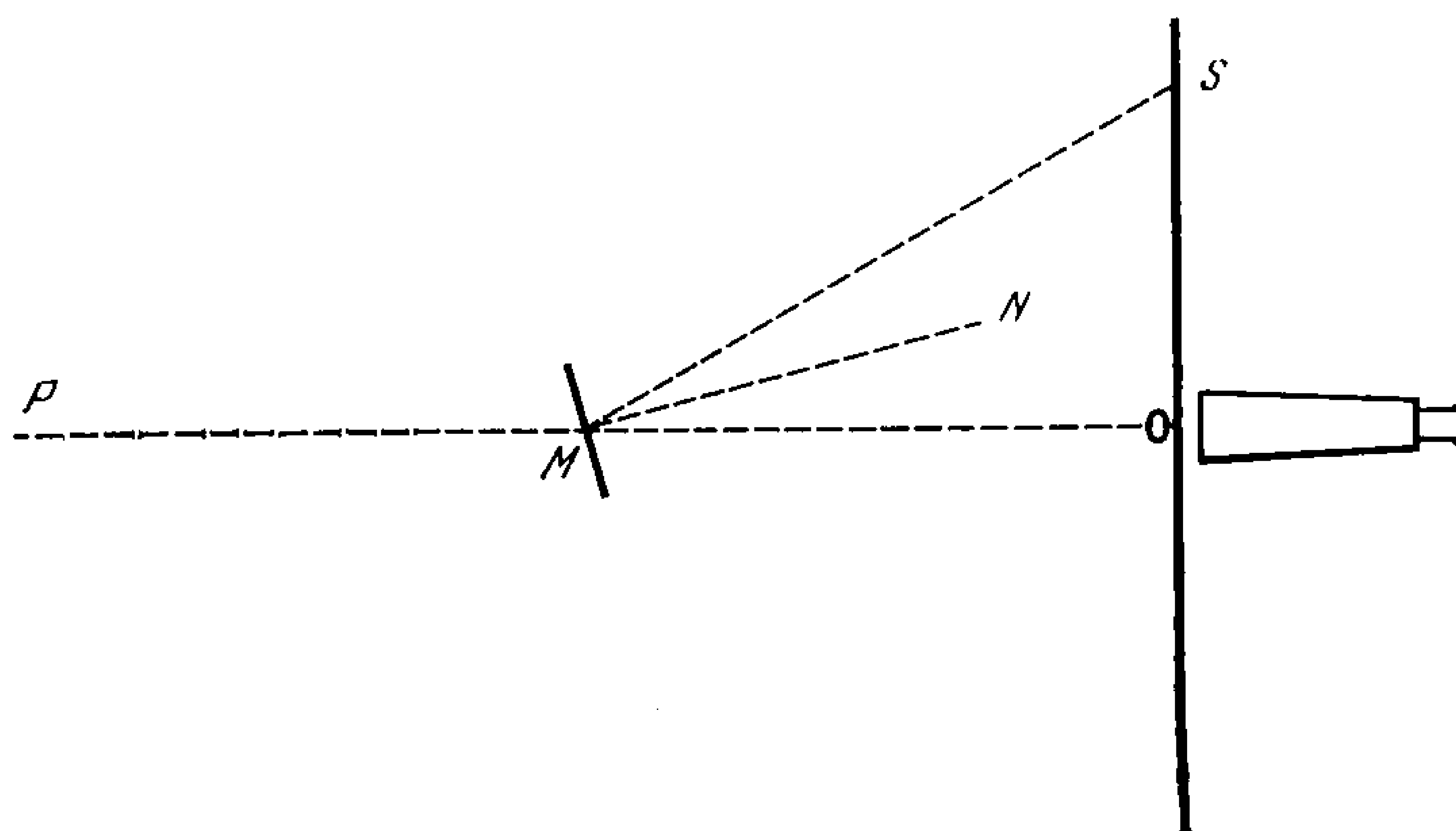


Рис. 14

Примем, что плоскость бумаги горизонтальна, и будем проектировать на нее разные точки. Пусть O — центр объектива телескопа, а P — фиксированная отметка, причем точка P и вертикальный провод фокально сопряжены по отношению к объективу. Пусть M — точка, в которой OP пересекает плоскость зеркала, а MN — нормаль к зеркалу. Тогда $OMN=\vartheta$ — угол, который линия визирования образует с фиксированной плоскостью. Проведем в плоскости OM и MN линию MS, такую, что $NMS=OMN$, тогда S будет тем местом шкалы, который при отражении в зеркале совпадет с вертикальным проводом телескопа. Далее, поскольку линия MN горизонтальна, проекции углов OMN и NMS на плоскость чертежа между собой равны, а угол $OMS=2\vartheta$. Следовательно, $OS=OM \operatorname{tg} 2\vartheta$.

Мы должны, таким образом, измерить OM в единицах делений шкалы; тогда, если s_0 — деление шкалы, совпадающее с линией отвеса, а s — наблюдаемое деление, то $s-s_0=OM \operatorname{tg} 2\vartheta$, откуда можно найти ϑ. При измерении OM следует помнить, что в случае стеклянного зеркала с посеребренной задней стенкой видимая отражающая поверхность находится позади фронтальной поверхности стекла на расстоянии $=t/\mu$, где t — толщина стекла, μ — показатель преломления.

Мы должны также помнить, что, когда линия подвеса не проходит через точку отражения, положение точки M будет зависеть от угла ϑ. Следовательно, желательно, если это возможно, добиваться совмещения центра зеркала с линией подвеса.

Желательно также, особенно при измерении больших угловых перемещений, наносить шкалу на вогнутую цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с линией подвеса. Углы в этом случае сразу измеряются в долях окружности без обращения к таблице тангенсов. Шкалу следует устанавливать очень тщательно, следя за тем, чтобы ось цилиндра совпадала с нитью подвеса. Числа на шкале от ее начала до конца должны возрастать в одном и том же направлении во избежание считывания отрицательных величин. На рис. 15 воспроизведена средняя часть шкалы, которую следует использовать с зеркалом и перевертывающим изображение телескопом.

Описанный метод измерений является наилучшим для медленных движений. Наблюдатель сидит у телескопа и видит изображение шкалы, движущееся вправо или влево мимо вертикальной проволочной риски телескопа. Имея рядом с собой

часы, он может заметить момент, когда данное деление шкалы проходит мимо риски, или отметить деление шкалы, которое проходит в данный момент времени, а может также засекать крайние положения каждой осцилляции.

При более быстрых движениях считывание делений, кроме моментов остановок в крайних точках осцилляций, становится уже невозможным. Однако, если в определенном месте шкалы поместить яркую метку, можно засечь момент прохождения этой метки.

В случае очень легкой аппаратуры движение под действием переменных сил становится настолько резким и быстрым, что наблюдение через телескоп оказывается бесполезным. В этом случае наблюдатель смотрит прямо на шкалу и следит

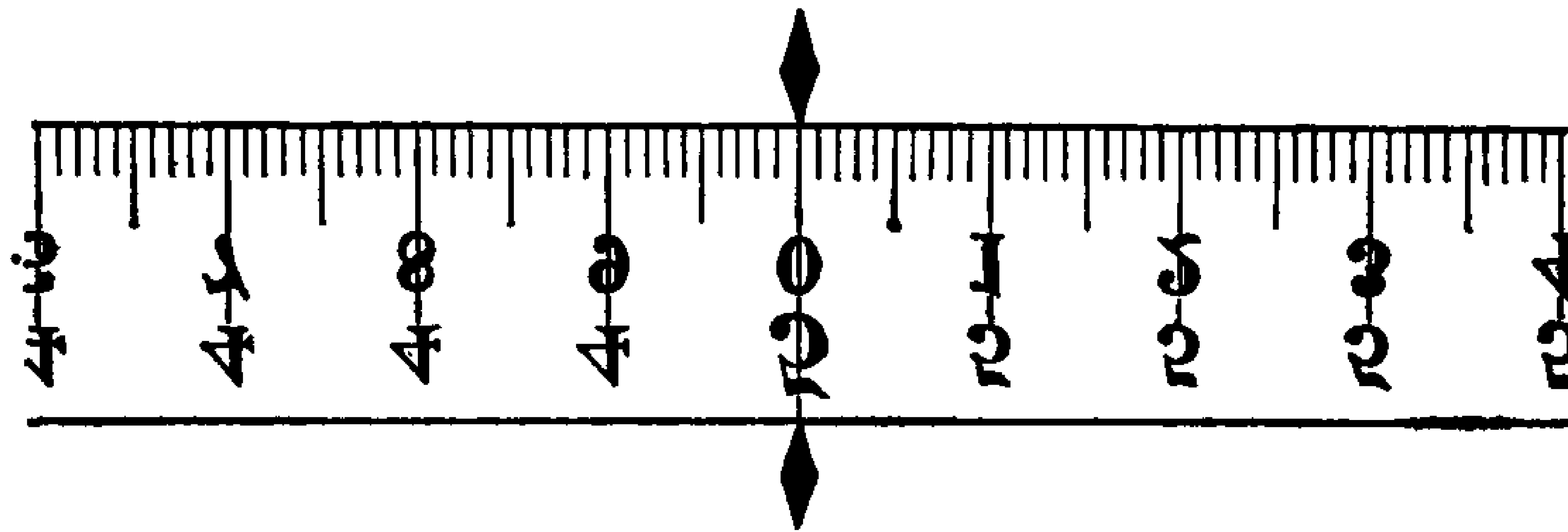


Рис. 15

за движением изображения вертикального провода, отбрасываемого на шкалу с помощью лампы.

Поскольку изображение шкалы, отраженное в зеркале и преломленное объективом, совпадает с вертикальной риской, ясно, что при достаточной освещенности будет видно изображение вертикальной риски, совпадающее со шкалой. Для таких наблюдений следует затемнить комнату и направить сконцентрированные лучи света на вертикальную проволочную риску в направлении объектива. При этом на шкале покажется яркое световое пятно, пересеченное тенью провода. За ее движением можно следить глазом, замечая положение шкалы, на котором она останавливается, и потом считывая его не спеша. Если необходимо засечь момент прохождения светлым пятном данной точки шкалы, можно закрепить в ней булавку или яркую металлическую проволочку, которая давала бы вспышку в момент прохождения пятна.

Заменяя крестовидную проволоку на небольшое отверстие в диафрагме, можно сделать изображение маленьким светлым пятнышком, движущимся по шкале влево или вправо; а если вместо шкалы поместить цилиндр, покрытый фотографической бумагой, и вращать его с помощью часового механизма вокруг горизонтальной оси, то пятно будет вычерчивать кривую, которую потом можно сделать видимой. Каждая абсцисса этой кривой будет соответствовать определенному моменту времени, а ордината — угловому положению зеркала в этот момент. Именно так устроена автоматическая система непрерывной записи всех элементов земного магнетизма в обсерватории Кью (Kew), а также в других обсерваториях.

В некоторых случаях обходятся и без телескопа; тогда вертикальная проволока подсвечивается лампой, помещенной позади нее, а вогнутое зеркало формирует на шкале изображение проволоки в виде темной линии, пересекающей светлое пятно.

451. В портативном приборе, имеющемся в Кью, магнит сделан в виде трубки, на одном конце которой вставлена линза, а на другом — стеклянная шкала, находящаяся в главном фокусе линзы. Свет падает на шкалу сзади и, проходя через линзу, попадает в телескоп.

Поскольку шкала находится в главном фокусе линзы, лучи от любого деления шкалы выходят из линзы параллельными; если телескоп отрегулирован для наблюдения небесных объектов, то шкала будет оптически совпадать с крестом телескопа. Если данное деление шкалы совпадет с центром креста телескопа, линия, соединяющая это деление с оптическим центром линзы, должна быть параллельна линии визирования телескопа. Фиксируя магнит и передвигая телескоп, мы можем установить угловую цену делений шкалы, а затем, когда магнит подвешен и положение телескопа известно, мы можем определять положение магнита в любой момент, считывая показания с деления шкалы, совпадающего с крестом.

Телескоп укрепляется на плече с центром на линии нити подвеса, а его положение отсчитывается верньером на азимутальном круге инструмента.

Такое устройство удобно для небольших портативных магнитометров, где вся аппаратура устанавливается на одной треноге, а осцилляции, связанные со случайными возмущениями, быстро спадают.

Определение направления оси магнита и направления земного магнетизма

452. Предполагая, что магнитный брусок имеет форму параллелепипеда, построим внутри него систему координат с осью z, направленной вдоль бруска, и осями x и y — перпендикулярно его боковым сторонам.

Обозначим через l, m, n и через λ, μ, ν углы, которые составляют с этими осями соответственно магнитная ось и линия визирования.

Пусть M — магнитный момент магнита, H и Z — горизонтальная и вертикальная компоненты земного магнетизма, δ — азимутальный угол направления H, отсчитываемый от севера к западу.

Обозначим также через ζ наблюдаемый азимут линии визирования, α — азимут хомутика, β — показание поворотного круга; тогда разность $\alpha-\beta$ будет азимутом нижнего конца нити подвеса.

Момент сил, связанный с кручением нити и направленный в сторону уменьшения α, равен $\tau(\alpha-\beta-\gamma)$, где τ — коэффициент кручения, зависящий от свойств нити, γ — значение $\alpha-\beta$, при котором момент равен нулю.

Чтобы определить угол λ_x между осью x и проекцией линии визирования на плоскость xz, установим хомутик так, чтобы ось была вертикальна и направлена вверх, ось z — к северу и x — к западу, и отметим азимут линии визирования ζ. Затем вынем магнит, повернем его на угол π вокруг оси z и в этом перевернутом положении снова поместим его в хомутик, засечем ζ' — азимут линии визирования, когда ось y направлена вниз, а ось x — к востоку,

$$\zeta=\alpha+(\pi/2)-\lambda_x, \tag{1}$$

$$\zeta'=\alpha-(\pi/2)+\lambda_x. \tag{2}$$

Откуда

$$\lambda_x=(\pi/2)+(\zeta'-\zeta)/2. \tag{3}$$

Далее, прикрепим хомутик к нити подвеса и поместим в него магнит, тщательно направляя ось y вертикально вверх; тогда момент сил, стремящийся увеличивать α, равен

$$MH \sin m \sin [\delta-\alpha+(\pi/2)+l_x]-\tau(\alpha-\beta-\gamma), \tag{4}$$

где l_x — угол между осью x и проекцией магнитной оси на плоскость xz.

Учитывая, что наблюдаемый азимут линии визирования ζ равен

$$\zeta=\alpha+(\pi/2)-\lambda_x, \tag{5}$$

момент сил можно записать в виде

$$MH \sin m \sin(\delta-\zeta+l_x-\lambda_x)-\tau[\zeta+\lambda_x-(\pi/2)-\beta-\gamma]. \tag{6}$$

Для частного значения ζ, отвечающего состоянию равновесия, эта величина равна нулю.

Если же система так и не успокоилась и измерения необходимо проводить в состоянии, когда она совершает колебания, то значение ζ, отвечающее положению равновесия, можно вычислить методом, который будет изложен в п. 735.

Когда момент сил кручения мал по сравнению с моментом магнитных сил, мы можем вместо синуса подставить значение угла $\delta-\zeta+l_x-\lambda_x$.

Придавая углу β, отсчитываемому по крутильному кругу, два значения β_1 и β_2, для соответствующих им значений ζ_1 и ζ_2 имеем

$$MH(\zeta_2-\zeta_1)\sin m=\tau(\zeta_1-\zeta_2-\beta_1+\beta_2), \tag{7}$$

или, положив

$$\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2-\beta_1+\beta_2}=\tau',$$

будем иметь

$$\tau=\tau' MH \sin m. \tag{8}$$

Разделив уравнение (6) на $MH \sin m$, получим

$$\delta-\zeta+l_x-\lambda_x-\tau'[\zeta+\lambda_x-(\pi/2)-\beta-\gamma]=0. \tag{9}$$

Перевернем теперь магнит осью y вниз и отрегулируем аппаратуру до точного совмещения оси y с вертикалью; для нового значения азимута ζ' и соответствующего наклонения δ' будем иметь

$$\delta'-\zeta'-l_x+\lambda_x-\tau'[\zeta'-\lambda_x+(\pi/2)-\beta-\gamma]=0, \tag{10}$$

откуда

$$\frac{\delta+\delta'}{2}=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')+\frac{1}{2}\tau'\{\zeta+\zeta'-2(\beta+\gamma)\}. \tag{11}$$

Показания поворотного круга следует теперь отрегулировать так, чтобы коэффициент при τ' как можно меньше отличался от нуля. Для этого мы должны определить величину γ как то значение $\alpha-\beta$, при котором нет кручения. Это можно сделать, помещая в хомутик немагнитный брусок того же веса, что и магнит, и определяя значение $\alpha-\beta$ в положении равновесия. Из-за малости τ' большой точ-

ности не требуется. Другой способ состоит в использовании крутящегося бруска с тем же весом, что у магнита, содержащего внутри очень маленький магнит с магнитным моментом, составляющим $1/n$ от момента основного магнита. Значение τ не меняется, поэтому величина τ' станет равной $n\tau'$, и если при кручении бруска для ζ получены два значения ζ_1 и ζ_1', то

$$\frac{\delta+\delta'}{2}=\frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_1')+\frac{1}{2}n\tau'\{\zeta_1+\zeta_1'-2(\beta+\gamma)\}. \quad (12)$$

Вычитая это уравнение из (11), получим

$$2(n-1)(\beta+\gamma)=\left(n+\frac{1}{\tau'}\right)(\zeta_1+\zeta_1')-\left(1+\frac{1}{\tau'}\right)(\zeta+\zeta'). \quad (13)$$

Находя таким путем значение $\beta+\gamma$, следует менять показания поворотного круга β до тех пор, пока с возможно большей точностью при нормальном положении прибора не достигнем равенства

$$\zeta+\zeta'-2(\beta+\gamma)=0. \quad (14)$$

Так как численное значение величины τ' очень мало и коэффициент при ней тоже мал, то второй член в выражении для δ не будет сильно меняться при малых ошибках в τ' и γ, которые являются величинами, известными с наименьшей точностью.

Этим способом величина магнитного склонения δ может быть найдена довольно точно при условии ее неизменности за время эксперимента, т. е. когда можно предположить, что $\delta'=\delta$.

Когда же требуется большая точность, необходимо учитывать вариации δ в течение эксперимента. Для этой цели нужно в те же самые моменты времени, в которые определялись два разных значения ζ, произвести измерения со вторым подвешенным магнитом. Зарегистрированные азимуты второго магнита η и η', соответствующие положениям ζ и ζ' первого магнита, связаны с δ и δ' соотношением

$$\delta'-\delta=\eta'-\eta. \quad (15)$$

Поэтому для определения значения δ мы должны к соотношению (11) добавить поправку $(\eta-\eta')/2$. Таким образом, магнитное склонение в момент первого наблюдения равно

$$\delta=(\zeta+\zeta'+\eta-\eta')/2+\tau'(\zeta+\zeta'-2\beta-2\gamma)/2. \quad (16)$$

Чтобы определить направление магнитной оси внутри магнита, вычтем (10) из (9) и добавим (15):

$$l_x=\lambda_x+(\zeta-\zeta')/2-(\eta-\eta')/2+\tau'(\zeta-\zeta'+2\lambda_x-\pi)/2. \quad (17)$$

Повторяя опыты с бруском при двух положениях его ребер, сначала направив ось x вертикально вверх, а затем — вниз, мы сможем определить величину m. Если ось визирования является регулируемой, ее необходимо установить в по-

ложение, как можно ближе совпадающее с магнитной осью, тогда ошибка, связанная с не совсем точным инвертированием магнита, может быть предельно уменьшена [2].

Об измерении магнитных сил

453. Определение магнитного момента магнита M и интенсивности (напряженности) горизонтальной составляющей земного магнетизма H являются наиболее важными измерениями магнитной силы. Обычно это делается комбинированием результатов двух экспериментов, в одном из которых измеряется отношение, а в другом — произведение этих величин.

Напряженность магнитной силы бесконечно малого магнита с магнитным моментом M, создаваемая в точке на расстоянии r от центра магнита в положительном направлении его оси, направлена по r и равна

$$R = 2M/r^3. \tag{1}$$

Если размеры магнита конечны, но он имеет сферическую форму и однородно намагничен в направлении оси, то это выражение продолжает оставаться точным. Для соленоидального магнита, имеющего форму стержня длиной $2L$,

$$R = 2\frac{M}{r^3}\left(1 + 2\frac{L^2}{r^2} + 3\frac{L^4}{r^4} + \ldots\right). \tag{2}$$

Если магнит имеет произвольную форму с малыми по сравнению с r размерами,

$$R = 2\frac{M}{r^3}\left(1 + A_1\frac{1}{r} + A_2\frac{1}{r^2} + \ldots\right), \tag{3}$$

где A_1, A_2 и т. д.— коэффициенты, зависящие от распределения намагниченности по образцу.

Обозначим через H горизонтальную составляющую земного магнетизма в произвольном месте; H направлена к магнитному северу. Будем отсчитывать r в сторону магнитного запада; тогда составляющая магнитной силы в точке r в северном направлении будет равна H, а в западном направлении — R. Равнодействующая сила составит с магнитным меридианом угол ϑ, отсчитываемый к западу, причем

$$R = H \operatorname{tg} \vartheta. \tag{4}$$

Следовательно, для определения R/H мы поступим следующим образом. Установив направление магнитного севера, подвесим магнит не слишком больших размеров так же, как в предыдущих опытах. В той же горизонтальной плоскости поместим отклоняющий магнит M таким образом, чтобы центр его находился на расстоянии r от центра подвешенного магнита в направлении магнитного востока.

Ось магнита M тщательно устанавливается — она должна быть горизонтальна и направлена по r.

---

[2] См. работу У. Свана «Неполная инверсия». (W. Swan, «Imperfect Inversion») *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXI (1855), p. 349.

Наблюдения за подвешенным магнитом производятся как до поднесения к нему магнита M, так и после установления магнита M на его место. Если ϑ — наблюдаемое отклонение, то по приближенной формуле (1)

$$\frac{M}{H}=\frac{r^3}{2}\operatorname{tg}\vartheta, \tag{5}$$

если же использовать формулы (3), то

$$\frac{1}{2}\frac{H}{M}r^3\operatorname{tg}\vartheta=1+A_1\frac{1}{r}+A_2\frac{1}{r^2}+\dots . \tag{6}$$

Здесь мы должны помнить, что отклонение ϑ можно измерять с большой точностью, а расстояние между центрами магнитов, пока мы не зафиксировали оба магнита и не пометили их центры, измерить точно нельзя. Эта трудность преодолевается так.

Магнит M размещается на шкале с делениями, которая продолжается к востоку и к западу — по обе стороны от подвешенного магнита. Центром магнита M считается средняя точка между его концами. Можно отметить эту точку на магните и засекать ее положение, а можно измерять положение концов и брать их среднее арифметическое. Обозначим положение центра магнита M через s_1, а положение точки, в которой линия нити подвеса с подвешенным на ней магнитом пересекает шкалу,— через s_0; тогда $r_1=s_1-s_0$, где s_1 известно точно, а s_0 — приближенно. Пусть ϑ_1 — отклонение, наблюдаемое при этом положении магнита M.

Теперь перевернем M, т. е. поместим его на шкале, поменяв местами его концы; тогда r_1 останется тем же самым, а M, A_1, A_3, ... сменят знаки, так что для отклонения ϑ_2 будем иметь

$$-\frac{1}{2}\frac{H}{M}r_1^3\operatorname{tg}\vartheta_2=1-A_1\frac{1}{r_1}+A_2\frac{1}{r_1^2}-\dots . \tag{7}$$

Взяв среднее арифметическое от (6) и (7), получим

$$\frac{1}{4}\frac{H}{M}r_1^3(\operatorname{tg}\vartheta_1-\operatorname{tg}\vartheta_2)=1+A_2\frac{1}{r_1^2}+A_4\frac{1}{r_1^4}+\dots . \tag{8}$$

Теперь поместим M к западу от подвешенного магнита, установив его центр в точке, соответствующей отметке на шкале $2s_0-s_1$. Для отклонений оси в двух новых положениях ϑ_3 и ϑ_4 получим, как и прежде:

$$\frac{1}{4}\frac{H}{M}r_2^3(\operatorname{tg}\vartheta_3-\operatorname{tg}\vartheta_4)=1+A_2\frac{1}{r_2^2}+A_4\frac{1}{r_2^4}+\dots . \tag{9}$$

Допустим, что истинное положение центра подвешенного магнита не s_0, а $s_0+\sigma$; тогда

$$r_1=r-\sigma, \qquad r_2=r+\sigma \tag{10}$$

и

$$\frac{1}{2}(r_1^n+r_2^n)=r^n\left\{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\sigma^2}{r^2}+\dots\right\}. \tag{11}$$

Если измерения проведены достаточно аккуратно, то величиной σ^2/r^2 можно пренебречь и вместо r_1^n и r_2^n с уверенностью подставить r^n.

Тогда, взяв среднее арифметическое от (8) и (9), получим

$$\frac{1}{8}\frac{H}{M}r^3(\operatorname{tg}\vartheta_1-\operatorname{tg}\vartheta_2+\operatorname{tg}\vartheta_3-\operatorname{tg}\vartheta_4)=1+A_2\frac{1}{r^2}+\ldots, \qquad (12)$$

или, введя обозначение

$$(\operatorname{tg}\vartheta_1-\operatorname{tg}\vartheta_2+\operatorname{tg}\vartheta_3-\operatorname{tg}\vartheta_4)/4=D, \qquad (13)$$

найдем

$$\frac{1}{2}\frac{H}{M}Dr^3=1+A_2\frac{1}{r^2}+\ldots.$$

454. Теперь мы можем рассматривать D и r как величины, допускающие точное определение.

Значение A_2 никогда не превосходит $2L^2$(L — половина длины магнита); поэтому на расстояниях r, значительных по сравнению с L, мы можем пренебречь членом с A_2 и сразу же определить отношение H к M. Нельзя, однако, считать, что величина A_2 равна $2L^2$, она может быть меньше и даже отрицательна, если максимальный размер магнита поперечен по отношению к оси. Членами с A_4 и более высокого порядка можно пренебречь без опасений.

Чтобы исключить A_2, повторим эксперимент с различными расстояниями r_1, r_2, r_3, ..., получив для D значения D_1, D_2, D_3, ... ; тогда

$$D_1=\frac{2M}{H}\left(\frac{1}{r_1^3}+\frac{A_2}{r_1^5}\right),\qquad D_2=\frac{2M}{H}\left(\frac{1}{r_2^3}+\frac{A_2}{r_2^5}\right),\ \ldots,\ \ldots.$$

Если предположить, что вероятные ошибки этих уравнений одинаковы, а это будет так, когда они зависят только от определения D и когда не существует неопределенности в величине r, то в соответствии с общим правилом комбинирования в теории ошибок измерений (в предположении равенства вероятных ошибок всех уравнений) одно из комбинированных уравнений получится при умножении каждого из приведенных выше уравнений на r^{-3} и сложения результатов, а второе — при умножении на r^{-5} и также с последующим сложением результатов. Обозначив через $\sum(Dr^{-3})$ величину

$$D_1r_1^{-3}+D_2r_2^{-3}+D_3r_3^{-3}+\ldots$$

и используя аналогичные обозначения для других групп символов, оба результирующие уравнения можно записать в виде

$$\sum(Dr^{-3})=\frac{2M}{H}\{\sum(r^{-6})+A_2\sum(r^{-8})\},$$

$$\sum(Dr^{-5})=\frac{2M}{H}\{\sum(r^{-8})+A_2\sum(r^{-10})\},$$

откуда

$$\frac{2M}{H}\{\sum(r^{-6})\sum(r^{-10})-[\sum(r^{-8})]^2\}=\sum(Dr^{-3})\sum(r^{-10})-\sum(Dr^{-5})\sum(r^{-8})$$

и

$$A_2\{\sum(Dr^{-3})\sum(r^{-10})-\sum(Dr^{-5})\sum(r^{-8})\}=\sum(Dr^{-5})\sum(r^{-6})-\sum(Dr^{-3})\sum(r^{-8}).$$

Величина A_2, найденная из этих уравнений, должна быть меньше половины квадрата длины магнита M. В противном случае следует подозревать наличие какой-то ошибки в измерениях. Этот метод измерения и редукции был дан Гауссом в «Первом Докладе Магнитного Союза».

Если наблюдатель может сделать лишь две серии экспериментов для расстояний r_1 и r_2, то вычисленные по ним величины $2M/H$ и A_2 будут равны

$$Q=\frac{2M}{H}=\frac{D_1r_1^5-D_2r_2^5}{r_1^2-r_2^2},\qquad A_2=\frac{D_2r_2^3-D_1r_1^3}{D_1r_1^5-D_2r_2^5}r_1^2r_2^2.$$

Ошибка в определении величины Q равна

$$\delta Q=\frac{r_1^5\delta D_1-r_2^5\delta D_2}{r_1^2-r_2^2},$$

где δD_1 и δD_2 — действительные ошибки измеренных отклонений D_1 и D_2.

Предполагая ошибки δD_1 и δD_2 независимыми, а вероятное значение каждой из них равным δD, для вероятной ошибки δQ вычисленного значения Q получим

$$(\delta Q)^2=\frac{r_1^{10}+r_2^{10}}{(r_1^2-r_2^2)^2}(\delta D)^2.$$

Считая заданным одно из расстояний, например меньшее, можно найти величину большего расстояния, при котором ошибка δQ минимальна. Это условие приводит к уравнению пятой степени относительно r_1^2, которое имеет только один действительный корень, превышающий r_2^2; отсюда находится наилучшее значение для r_1: $r_1=1{,}3189r_2$.

Если измерение проведено только один раз, то наилучшим является расстояние, при котором $(\delta D/D)=\sqrt{3}(\delta r/r)$, где δD — вероятная ошибка в измерении отклонения, а δr — вероятная ошибка в измерении расстояния.

Метод синусов

455. Метод, который мы только что рассмотрели, можно назвать методом тангенсов, поскольку мерой магнитной силы является тангенс угла отклонения.

Теперь, вместо того чтобы линию r_1 направлять на восток или на запад, будем устанавливать ее до тех пор, пока она не окажется перпендикулярной оси отклоненного магнита; тогда величина R сохранится прежней, но чтобы подвешенный магнит оставался перпендикулярным r, составляющая силы H вдоль r должна быть равна по величине R и противоположно направлена, т. е. при угле отклонения ϑ $R=H\sin\vartheta$.

Этот метод называется методом синусов. Он может быть применен только при R, меньших H.

Метод синусов использован в портативной аппаратуре обсерватории Кью. Подвешенный магнит прикреплен к той части прибора, которая вращается вместе с телескопом и плечом отклоняющего магнита. Угол поворота всего устройства измеряется на азимутальном круге.

Вначале аппаратура регулируется таким образом, чтобы ось телескопа совпадала со средним положением линии визирования магнита в невозмущенном положении. Если магнит совершает колебания, то истинный азимут магнитного севера находится путем наблюдения крайних положений колебания прозрачной шкалы и внесением соответствующей поправки в показания азимутального круга.

Затем на прямой стержень, проходящий через ось вращающегося устройства под прямым углом к оси телескопа, помещается отклоняющий магнит, который устанавливается так, чтобы его ось совпадала с линией, проходящей через центр подвешенного магнита.

Далее вся аппаратура поворачивается до тех пор, пока линия визирования подвешенного магнита снова не совпадет с осью телескопа; новое показание азимута при необходимости уточняется путем измерения крайних положений осцилляций.

Разность уточненных азимутов дает величину отклонения, после чего следует действовать, как и в методе тангесов, подставив лишь $\sin\vartheta$ в выражение для D вместо $\operatorname{tg}\vartheta$.

В этом методе отсутствует поправка на кручение нити подвеса, так как относительное положение нити, телескопа и магнита остается одинаковым при каждом измерении.

Оси двух магнитов при таком методе всегда расположены под прямым углом, что позволяет более аккуратно делать коррекцию длины.

456. Измерив таким способом отношение момента отклоняющего магнита к горизонтальной составляющей земного магнетизма, мы должны затем найти произведение этих величин путем определения момента сил, с которым земной магнетизм стремится повернуть этот же магнит при отклонении его оси от направления магнитного меридиана.

Есть два способа проведения такого измерения: динамический, когда измеряется время одного колебания магнита под действием земного магнетизма, и статический, когда магнит удерживается в равновесии под действием измеряемой статической пары сил и магнитной силы.

Аппаратура для динамического метода более проста, он дает большую точность при абсолютных измерениях, но требует достаточно большого времени; статический метод допускает проведение почти мгновенных измерений и поэтому полезен при слежении за изменениями напряженности магнитной силы, однако он требует более тонкой аппаратуры и не столь точен при абсолютных измерениях.

Метод колебаний

Подвешенный магнит с горизонтальной магнитной осью приводится в колебания в пределах малых дуг окружности. Колебания наблюдаются любым из описанных выше способов.

На шкале выбирается точка, соответствующая середине дуги колебаний, и засекается момент, когда магнит проходит через нее в положительном направлении. Если магнит не очень быстро возвращается в ту же самую точку, то засекается также момент прохождения через эту точку в отрицательном направлении; процесс этот продолжается до тех пор, пока не будет зарегистрировано $(n+1)$ прохождений в положительном направлении и n прохождений в отрицательном направлении. Если же колебания совершаются настолько быстро, что не позво-

ляют засекать последовательные прохождения, то можно регистрировать каждое третье или каждое пятое прохождение, обращая внимание на чередование в положительном и отрицательном направлениях.

Пусть наблюдаемые времена прохождений равны T_1, T_2, T_{2n+1}. Положим

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}T_1+T_3+T_5+\ldots+T_{2n-1}+\frac{1}{2}T_{2n+1}\right)=T_{n+1},$$

$$\frac{1}{n}(T_2+T_4+\ldots+T_{2n-2}+T_{2n})=T'_{n+1}.$$

Величина T_{n+1} является средним временем положительных прохождений, при правильном выборе точки оно должно соответствовать среднему времени отрицательных прохождений T'_{n+1}. Среднее от этих величин следует брать в качестве среднего времени прохождения средней точки.

После того как совершится большое число колебаний, но еще перед тем как они перестанут быть отчетливыми и регулярными, наблюдатель производит вторую серию измерений, из которой вычисляет среднее время прохождения средней точки во второй серии.

При вычислении периода колебаний из первой или из второй серии наблюдатель должен иметь возможность точно знать число полных колебаний, происшедших в интервале между временами прохождения средней точки в первой и во второй сериях.

Разделив интервал между средними временами прохождений средней точки в двух сериях на это число колебаний, он получит среднюю продолжительность одного колебания.

Измеренная продолжительность одного колебания должна быть затем — по тем же формулам, что и в экспериментах с маятником,— сведена к продолжительности одного колебания с бесконечно малым угловым отклонением. Если обнаружится, что амплитуда колебаний быстро уменьшается, то следует ввести еще одну поправку — на сопротивление (см. п. 740). Эти поправки, однако, очень малы в случае, когда магнит подвешен на тонкой нити и когда дуга колебания составляет всего лишь несколько градусов.

Движение магнита определяется уравнением

$$A\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+MH\sin\vartheta+HM\tau'(\vartheta-\gamma)=0,$$

где ϑ — угол между магнитной осью и направлением силы H, A — момент инерции магнита вместе с подвешенной аппаратурой, M — магнитный момент магнита, H — интенсивность горизонтальной магнитной силы, $MH\tau'$ — коэффициент кручения; величина τ' введена в п. 452 и является очень малой. Значение ϑ в равновесии равно очень маленькому углу $\vartheta_0=\tau'\gamma/(1+\tau')$. Решение уравнения при малых значениях амплитуды будет таким:

$$\vartheta=C\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\alpha\right)+\vartheta_0,$$

где T — период, α — константа, C — амплитуда; причем $T^2=4\pi^2A/MH(1+\tau')$, откуда находим значение MH: $MH=4\pi^2A/T^2(1+\tau')$.

Здесь T — время полного колебания, определяемое из наблюдений, A — момент инерции, устанавливаемый для магнита раз и навсегда либо путем взвешивания и обмера его (в том случае, когда он имеет правильную форму), либо путем динамической процедуры сопоставления с телом, момент инерции которого известен.

Комбинируя это выражение для MH с ранее найденным M/H, получаем

$$M^2=(MH)\left(\frac{M}{H}\right)=\frac{2\pi^2 A}{T^2(1+\tau')}Dr^3$$

и

$$H^2=(MH)\left(\frac{H}{M}\right)=\frac{8\pi^2 A}{T^2(1+\tau')Dr^3}.$$

457. Выше мы предполагали, что в течение двух серий экспериментов величины M и H остаются постоянными. Наличие флуктуаций H можно установить при одновременных измерениях на описываемом далее двухнитевом магнитометре. Если магнит был какое-то время в употреблении, но не подвергался во время экспериментов ни температурным изменениям, ни встряске, то определяемую постоянным магнетизмом долю намагниченности M можно считать постоянной. Однако все стальные магниты подвержены влиянию индуцированного магнетизма, зависящего от действия внешней магнитной силы.

Ось магнита, участвующего в экспериментах в качестве отклоняющего, направлена с запада на восток; поэтому действие земного магнетизма перпендикулярно магниту и не стремится ни уменьшить, ни увеличить M. Когда же магнит установлен для совершения колебаний, его ось ориентирована в направлении север — юг; поэтому действие земного магнетизма стремится намагнитить магнит в направлении оси и, таким образом, увеличить его магнитный момент на величину kH, где коэффициент k должен быть найден из экспериментов с магнитом.

Есть два способа исключения этого источника ошибки без вычисления k; эксперименты должны проводиться так, чтобы магнит находился в одинаковых условиях,— и когда он участвует в отклонении другого магнита, и когда колеблется сам.

Можно направить ось отклоняющего магнита на север, поместив его на расстоянии r от центра подвешенного магнита, выбрав линию r так, чтобы она образовывала с магнитным меридианом угол, косинус которого равен $\sqrt{1/3}$. Тогда действие отклоняющего магнита на подвешенный будет происходить под прямыми углами к его собственному направлению и окажется равным $R=\sqrt{2}M/r^3$.

Как и в эксперименте с колебаниями, здесь M является магнитным моментом, когда ось магнита указывает на север, поэтому никаких поправок на индукцию делать не надо.

Однако этот метод чрезвычайно сложен из-за больших ошибок, к которым приводило бы малейшее смещение отклоняющего магнита, и, поскольку коррекция путем обращения отклоняющего магнита здесь неприменима, к этому методу прибегать не стоит, кроме как для определения коэффициента индукции.

В другом методе, которым мы обязаны доктору Дж. П. Джоулю [3], магнит

[3] *Proc. Phil. S.*, *Manchester*, March 19, 1867.

при колебаниях свободен от индуцирующего действия земного магнетизма.

Изготавливаются два магнита с предельно близкими друг к другу магнитными моментами. В опытах по отклонению они либо используются отдельно, либо для увеличения отклонения размещаются по разные стороны от подвешенного магнита. При этом индуцирующая сила земного магнетизма перпендикулярна оси.

Теперь один из магнитов подвесим, а другой поместим точно под ним (центр под центром) параллельно ему, направив его ось в том же направлении. Сила, с которой покоящийся магнит действует на подвешенный, направлена против силы земного магнетизма. Если постепенно приближать покоящийся магнит к подвешенному, период колебаний будет возрастать, пока в некоторой точке равновесие не перестанет быть устойчивым, после чего подвешенный магнит начнет колебаться в перевернутом положении. Экспериментируя таким образом, можно найти положение фиксированного магнита, в котором он точно нейтрализует действие земного магнетизма на подвешенный магнит. После этого два магнита скрепляются (с сохранением их параллельности) на расстоянии, найденном из этого эксперимента, при том же самом направлении осей. Затем они подвешиваются обычным способом и приводятся в состояние совместных колебаний в пределах малых дуг.

Нижний магнит точно нейтрализует влияние земного магнетизма на верхний, а поскольку магниты имеют одинаковые магнитные моменты, верхний также нейтрализует индуцирующее действие Земли на нижний магнит.

Таким образом, значение M оказывается в опытах с колебаниями и отклонениями одинаковым, и не требуется вносить поправки на индукцию.

458. Только что описанный метод является наиболее точным для определения напряженности горизонтальной магнитной силы. Однако невозможно провести всю серию экспериментов с достаточной точностью намного быстрее, чем за час; поэтому любые изменения напряженности с периодом в несколько минут выпадут из наблюдений. Значит, для наблюдения напряженности в какой-то отдельный момент времени необходим другой метод.

Статический метод состоит в отклонении магнита с помощью статической пары сил, действующей в горизонтальной плоскости. Пусть момент этой пары равен L, магнитный момент магнита M, горизонтальная составляющая земного магнетизма H и угол отклонения ϑ, тогда $MH \sin\vartheta = L$. Следовательно, если известен момент L в зависимости от ϑ, то может быть найдена величина MH.

Момент L может возникнуть по двум причинам: из-за упругого кручения проволоки, как в обычных крутильных весах, или из-за веса подвешенного прибора, как при двухнитевом подвесе.

В крутильных весах магнит прикрепляется к концу вертикальной проволоки, верхний конец которой можно поворачивать и измерять угол поворота с помощью поворотного круга.

Тогда мы имеем

$$L = \tau\,(\alpha - \alpha_0 - \vartheta) = MH \sin\vartheta.$$

Здесь α_0 — показание поворотного круга при совпадении оси магнита с магнитным меридианом, а α — его действительное показание. Если поворотный круг

установлен так, что магнит почти перпендикулярен магнитному меридиану, т. е. $\vartheta=(\pi/2)-\vartheta'$, то

$$\tau\left(\alpha-\alpha_0-\frac{\pi}{2}+\vartheta'\right)=MH\left(1-\frac{1}{2}\vartheta'^2\right), \text{ или}$$

$$MH=\tau\left(1+\frac{1}{2}\vartheta'^2\right)\left(\alpha-\alpha_0-\frac{\pi}{2}+\vartheta'\right).$$

Измеряя отклонение магнита в равновесии ϑ', мы можем вычислить MH при условии, что мы знаем τ.

Если же мы хотим узнать только относительную величину H в различные моменты времени, то нет необходимости в знании M или τ.

Абсолютное значение τ легко определить, подвесив на том же проводе немагнитное тело и измеряя период его колебаний: $\tau=4\pi^2A/T^2$, где A — момент инерции этого тела, T — период одного полного колебания.

Основное возражение против использования крутильных весов состоит в том, что нулевое значение α_0 подвержено изменениям. Под действием постоянной скручивающей силы, возникающей из-за стремления магнита поворачиваться к северу, провод постепенно приобретает постоянное закручивание, так что через короткие промежутки времени становится необходимым определять нулевое показание поворотного круга заново.

Двухнитевой (бифилярный) подвес

459. Метод подвешивания магнита на двух проволоках или нитях был введен Гауссом и Вебером. Поскольку двухнитевой подвес используется во многих электрических приборах, изучим его более подробно. Общий вид подвеса показан на рис. 16; на рис. 17 изображены проекции проволок на горизонтальную плоскость:

AB и $A'B'$ — проекции двух проволок;

AA' и BB' — линии, соединяющие верхние и нижние концы проволок;

a и b — длины линий AA' и BB';

α и β — их азимуты;

W и W' — вертикальные составляющие натяжения проволок;

Q и Q' — их горизонтальные составляющие;

h — расстояние по вертикали между AA' и BB'.

Действующие на магнит силы таковы: его вес, пара сил, обусловленная земным магнетизмом, кручение (если таковое имеется) проволок и их натяжение. Из всего этого действие магнетизма и кручение имеют характер момента. Поэтому равнодействующая натяжения должна состоять из равной весу вертикальной силы и момента сил. Следовательно, равнодействующая вертикальных составляющих натяжения направлена вдоль линии, имеющей своей проекцией точку O, которая является пересечением линий AA' и BB' и делит каждую из них в отношении W' к W.

Горизонтальные составляющие натяжения образуют пару сил, т. е. они равны по величине и параллельны по направлению. Обозначая каждую из них через Q, для момента пары сил, которую они образуют, имеем

$$L=Q\cdot PP', \qquad (1)$$

где PP' — расстояние между параллельными линиями AB и $A'B'$.

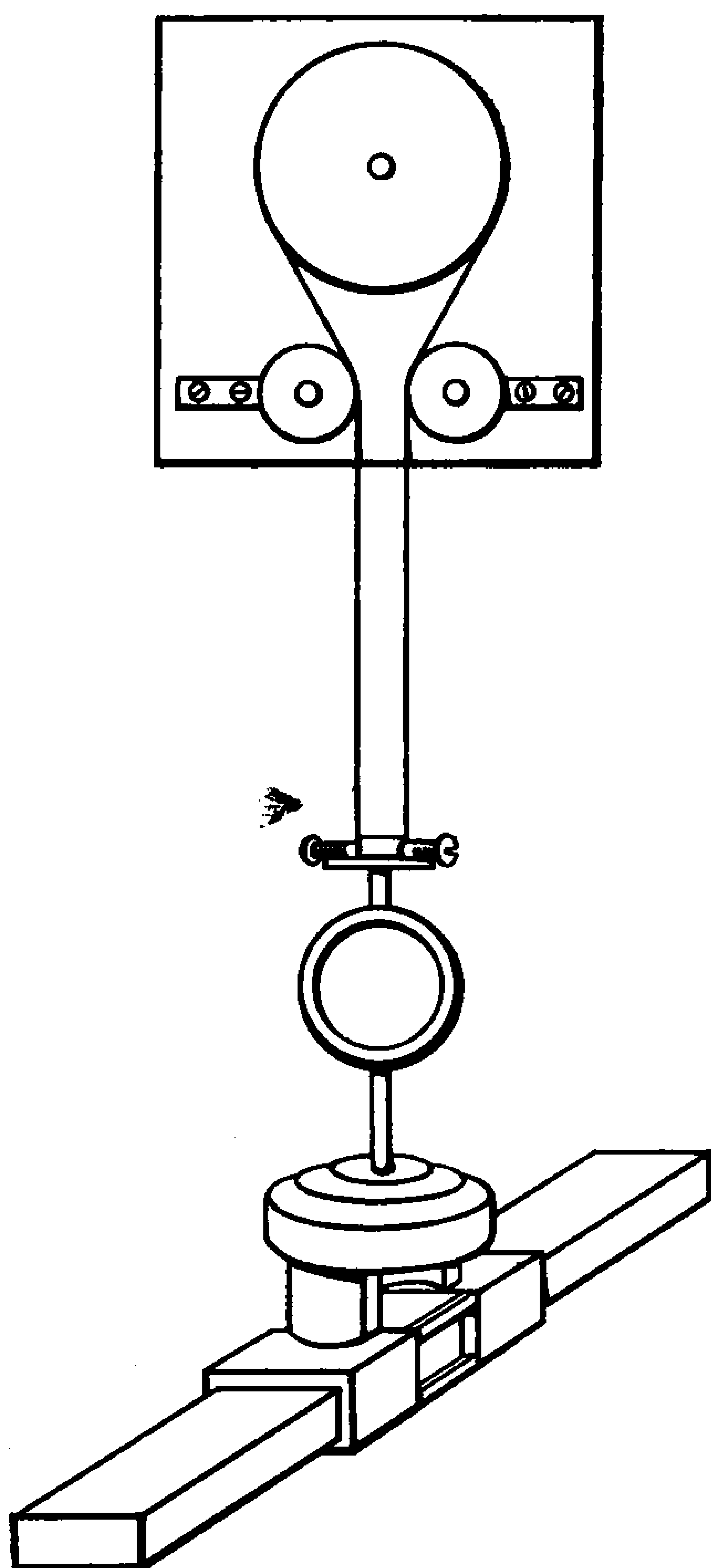
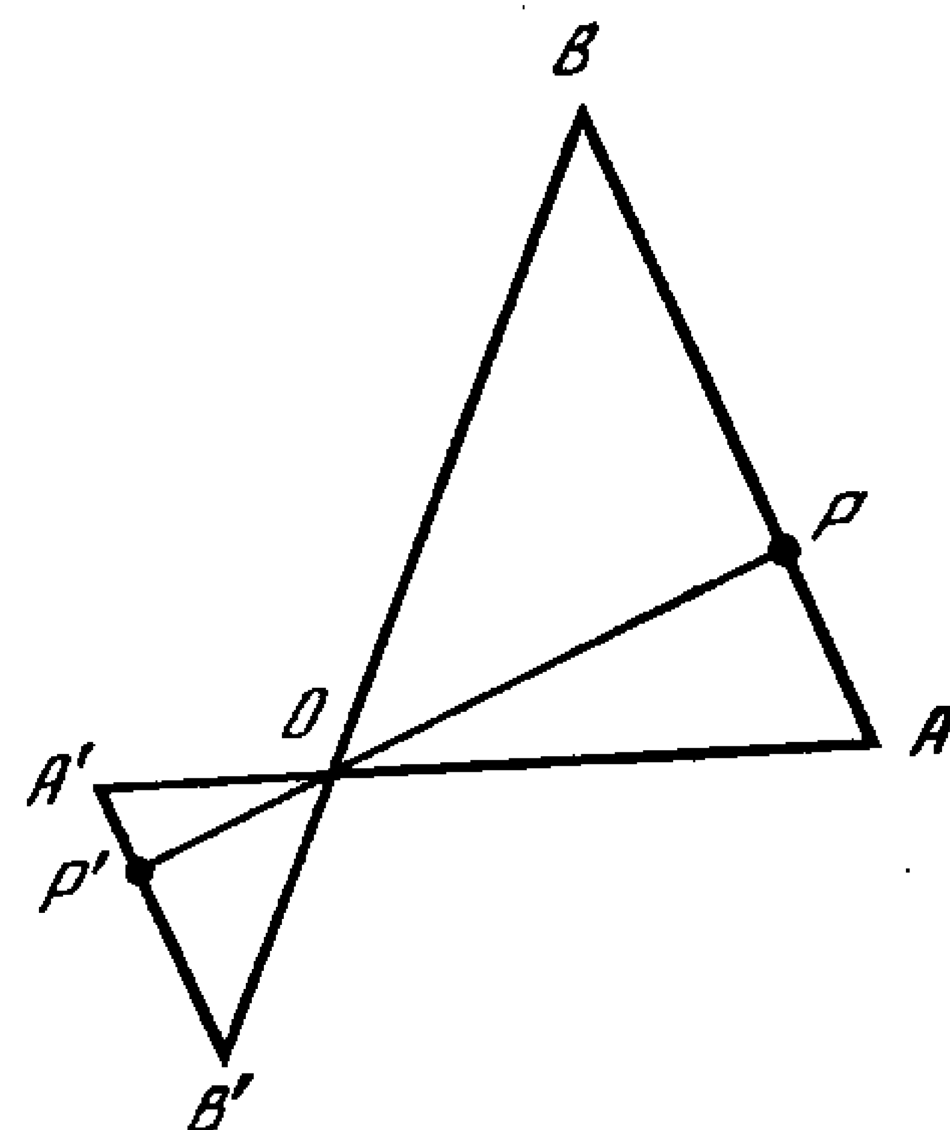


Рис. 16

Рис. 17



Для определения величины L мы имеем уравнения моментов

$$Qh = W \cdot AB = W' \cdot A'B', \tag{2}$$

и геометрическое соотношение

$$(AB + A'B')PP' = ab \sin(\alpha - \beta), \tag{3}$$

откуда получаем

$$L = Q \cdot PP' = \frac{ab}{h} \frac{WW'}{W + W'} \sin(\alpha - \beta). \tag{4}$$

Если масса подвешенного прибора равна m, а интенсивность гравитации g, то

$$W + W' = mg. \tag{5}$$

Мы можем также записать

$$W - W' = nmg, \tag{6}$$

откуда найдем

$$L = \frac{1}{4}(1 - n^2) mg \frac{ab}{h} \sin(\alpha - \beta). \tag{7}$$

Таким образом, величина L будет иметь максимум по n при $n=0$, т. е. когда вес подвешенной массы одинаково несут обе проволоки.

Мы можем отрегулировать натяжения проволок и сделать их одинаковыми путем измерения и сведения к минимуму периода колебаний, или же мы можем

получить автоматическую регулировку, присоединив концы проволок, как показано на рис. 16, к блоку, который поворачивается пока натяжения не сравниваются.

Расстояние между верхними концами проволок подвеса регулируется с помощью двух других блоков. Расстояние между нижними концами проволок также допускает регулировку.

При такой регулировке натяжения момент, возникающий из-за натяжения проволок, становится равным

$$L=\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\alpha-\beta).$$

Момент пары сил, возникающий из-за кручения проволок, записывается в виде $\tau(\alpha-\beta)$, где τ — сумма коэффициентов кручения проволок.

Кручение проволок должно отсутствовать, когда $\alpha=\beta$, при этом можно положить $\gamma=\alpha$.

Момент пары сил, обусловленный горизонтальной магнитной силой, имеет вид $MH\sin(\delta-\vartheta)$, где δ — магнитное склонение, а ϑ — азимут оси магнита. Мы избежим введения ненужных обозначений без потери общности, предположив, что ось магнита параллельна BB' или что $\beta=\vartheta$.

Тогда уравнение движения становится таким:

$$A\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=MH\sin(\delta-\vartheta)+\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\alpha-\vartheta)+\tau(\alpha-\vartheta). \tag{8}$$

Имеется три основных положения прибора.

(1). Когда угол α примерно равен δ. Если время полного колебания в этом положении равно T_1, то

$$\frac{4\pi^2 A}{T_1^2}=\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg+\tau+MH. \tag{9}$$

(2). Когда угол α близок к $\delta+\pi$. Если в этом положении время полного колебания равно T_2, а северный конец магнита повернут к югу, то

$$\frac{4\pi^2 A}{T_2^2}=\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg+\tau-MH. \tag{10}$$

Величина в правой части уравнения может быть сделана сколь угодно малой при уменьшении a или b, но не должна становиться отрицательной, иначе равновесие магнита станет неустойчивым. Магнит в таком положении является прибором, чувствительным к малым вариациям *направления* магнитного поля.

Действительно, когда угол $\vartheta-\delta$ примерно равен π, то $\sin(\delta-\vartheta)$ примерно равен $\vartheta-\delta-\pi$, и мы находим

$$\vartheta=\alpha-\frac{MH}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg+\tau-MH}(\delta+\pi-\alpha). \tag{11}$$

Уменьшая знаменатель дроби в последнем члене, мы можем сделать вариации ϑ очень большими по сравнению с вариациями δ. Следует заметить, что коэффициент перед δ в этом выражении отрицателен, так что когда направление магнитной силы поворачивается в одну сторону, магнит поворачивается в противоположную.

(3). В третьем положении верхняя часть подвешенной аппаратуры повернута так, что ось магнита примерно перпендикулярна магнитному меридиану. Если положить

$$\vartheta-\delta=(\pi/2)+\vartheta' \text{ и } \alpha-\vartheta=\beta-\vartheta', \tag{12}$$

то уравнение движения может быть записано в виде

$$A\frac{d^2\vartheta'}{dt^2}=-MH\cos\vartheta'+\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\beta-\vartheta')+\tau(\beta-\vartheta'). \tag{13}$$

Если при $H=H_0$ и $\vartheta'=0$ существует равновесие

$$-MH_0+\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta+\beta\tau=0, \tag{14}$$

то горизонтальная сила H, соответствующая малому углу ϑ', равна

$$H=H_0\left(1-\frac{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\cos\beta+\tau}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta+\tau\beta}\vartheta'\right). \tag{15}$$

Чтобы магнит находился в устойчивом равновесии, числитель дроби во втором члене должен быть положительным, но чем он ближе к нулю, тем прибор будет более чувствительным при индикации изменений величины напряженности горизонтальной составляющей земного магнетизма.

Статический метод оценки напряженности силы зависит от действия прибора, что само по себе предполагает различные положения равновесия при различных значениях силы. Поэтому с помощью прикрепленного к магниту зеркальца, отбрасывающего светящееся пятно на движущуюся под действием часового механизма фотографирующую поверхность, можно вычертить на ней кривую, по которой можно определять напряженность силы в любой момент времени в масштабе, который в этом случае мы можем брать произвольным.

460. В любой обсерватории, где непрерывная система регистрации склонения и напряженности налажена либо визуальным методом, либо методом автоматического фотографирования, можно с большой степенью точности определять абсолютные значения склонения и напряженности, а также положение и момент магнитной оси магнита.

Действительно, деклинометр в каждый момент выдает склонение с некоторой постоянной ошибкой, а двухнитевой магнитометр дает в каждый момент значение напряженности, умноженное на некоторый постоянный коэффициент. В экспериментах мы заменяем δ на $\delta'+\delta_0$, где δ' — показание деклинометра в данный момент, а δ_0 — неизвестная, но постоянная ошибка, так что $\delta'+\delta_0$ будет истинным склонением в этот момент.

Аналогично вместо H мы подставляем CH', где H' — показание магнитометра по произвольной шкале, а C — неизвестный постоянный множитель, превращающий эти показания в абсолютные, так что CH' оказывается равной горизонтальной силе в данный момент времени.

Эксперименты по определению абсолютных значений этих величин должны проводиться на достаточном расстоянии от деклинометра и магнитометра, чтобы разные магниты не возмущали заметно друг друга. Следует засекать время каж-

дого измерения и подставлять соответствующие значения δ' и H'. После этого необходимо, обращаясь к уравнениям, найти постоянную деклинометра δ_0, а также коэффициент C, используемый в показаниях магнитометра. Когда все это будет найдено, показания обоих приборов можно выразить в абсолютных величинах. Абсолютные измерения, однако, следует часто повторять, чтобы учесть изменения, которые могут произойти с магнитными осями и магнитными моментами магнитов.

461. Методы измерения вертикальной составляющей земной магнитной силы еще не доведены до такой же степени точности. Вертикальная сила должна действовать на магнит, который поворачивается вокруг горизонтальной оси, но тело, которое поворачивается вокруг горизонтальной оси, нельзя сделать таким же чувствительным к действию малых сил, как тело, подвешенное на нити и вращающееся вокруг вертикальной оси. Кроме того, вес магнита настолько велик по сравнению с магнитными силами, действующими на него, что небольшое смещение центра инерции, вызванное неравномерным расширением или еще чем-то, сильнее влияет на положение магнита, чем значительное изменение магнитной силы.

Поэтому измерение вертикальной силы или сравнение вертикальной и горизонтальной сил, является наименее совершенной частью системы магнитных измерений.

Обычно вертикальная составляющая магнитной силы находится из горизонтальной силы путем определения направления общей силы.

Угол i между полной силой и ее горизонтальной составляющей называется магнитным наклонением; если известна горизонтальная сила H, то вертикальная сила равна $H \operatorname{tg} i$, а полная сила $H \sec i$.

Магнитное наклонение измеряется с помощью инклинометра (уклономера). Теоретически инклинометр — это магнит, ось которого проходит через его центр инерции перпендикулярно магнитной оси стрелки. Концы оси сделаны в виде цилиндров небольшого радиуса, оси которых совпадают с линией, проходящей через центр инерции. Эти цилиндрические концы покоятся на двух горизонтальных пластинках и могут свободно катиться по ним.

Когда ось направлена с магнитного востока на запад, стрелка может свободно вращаться в плоскости магнитного меридиана, и при хорошей настройке прибора магнитная ось установится в направлении полной магнитной силы.

Практически, однако, невозможно отрегулировать инклинометр так, чтобы вес стрелки не влиял на положение равновесия; даже если вначале центр инерции находился на линии, соединяющей катящиеся секции цилиндрических концов, он сместится с этой линии при незначительном изгибе или неравномерном расширении стрелки. Кроме того, определение настоящего центра инерции магнита — очень трудная операция из-за наложения действия магнитной силы и силы тяжести.

Предположим, что один из концов стрелки и один из концов оси как-то помечены. Проведем на стрелке линию, действительную или воображаемую, которую будем называть линией визирования. Положение этой линии измеряется на вертикальном круге. Пусть линия визирования образует угол ϑ с радиусом, который мы будем считать горизонтальным, а магнитная ось образует с ней угол λ; в этом положении стрелки магнитная ось наклонена под углом $\vartheta+\lambda$ к горизонтали.

При любой форме катящихся поверхностей длина перпендикуляра p, опущен-

ного из центра инерции на плоскость, по которой катится ось, является функцией ϑ. Если обе катящиеся секции концов оси — окружности, то

$$p=c-a\sin(\vartheta+\alpha), \qquad (1)$$

где a — расстояние от центра инерции до линии, соединяющей центры катящихся секций, α — угол, который эта линия образует с линией визирования.

Для магнита с магнитным моментом M и массой m, находящегося под действием силы тяжести g и полной магнитной силы I с магнитным наклонением i, как следует из сохранения энергии, в состоянии устойчивого равновесия величина

$$MI\cos(\vartheta+\lambda-i)-mgp \qquad (2)$$

должна быть максимальна по ϑ, т. е.

$$MI\sin(\vartheta+\lambda-i)=-mg\frac{dp}{d\vartheta}, \quad =mga\cos(\vartheta+\alpha), \qquad (3)$$

если концы оси цилиндрические.

Итак, если T — период колебаний около этого положения равновесия, то

$$MI+mga\sin(\vartheta+\alpha)=\frac{4\pi^2 A}{T^2}, \qquad (4)$$

где A — момент инерции стрелки относительно оси вращения, а угол ϑ определяется из (3).

При определении наклонения показания снимаются с вертикального круга, находящегося в плоскости магнитного меридиана, с градуировкой, обращенной на запад.

Обозначив это показание через ϑ_1, имеем

$$MI\sin(\vartheta_1+\lambda-i)=mga\cos(\vartheta_1+\alpha). \qquad (5)$$

Затем прибор поворачивается вокруг вертикальной оси на 180°, так чтобы шкала обратилась делениями на восток; для нового показания ϑ_2

$$MI\sin(\vartheta_2+\lambda-\pi+i)=mga\cos(\vartheta_2+\alpha). \qquad (6)$$

Вычитая из (5) уравнение (6), заметим, что угол ϑ_1 примерно равен i, ϑ_2 примерно равен $\pi-i$, а угол λ мал; тогда величиной $mga\lambda$ можно пренебречь по сравнению с MI:

$$MI(\vartheta_1-\vartheta_2+\pi-2i)=2mga\cos i\cos\alpha. \qquad (7)$$

Теперь извлечем магнит из опор и поместим его в отклоняющую аппаратуру п. 453, чтобы по отклонению подвешенного магнита определить его собственный магнитный момент, тогда

$$M=r^3HD/2, \qquad (8)$$

где D — тангенс угла отклонения.

Сделаем обращение намагниченности стрелки и найдем ее новый магнитный момент M', измерив при том же расстоянии новое отклонение, тангенс которого обозначим D':

$$M'=r^3HD'/2, \qquad (9)$$

откуда

$$MD' = M'D. \tag{10}$$

Снова поместим стрелку на опоры и снимем два новых показания ϑ_3 и ϑ_4, из которых ϑ_3 близко к $\pi+i$, а ϑ_4 близко к $-i$:

$$M'I \sin(\vartheta_3+\lambda'-\pi-i) = mga \cos(\vartheta_3+\alpha), \tag{11}$$

$$M'I \sin(\vartheta_4+\lambda'+i) = mga \cos(\vartheta_4+\alpha), \tag{12}$$

откуда, как и прежде:

$$M'I(\vartheta_3-\vartheta_4-\pi-2i) = -2mga \cos i \cos \alpha. \tag{13}$$

И, добавив (7),

$$MI(\vartheta_1-\vartheta_2+\pi-2i)+M'I(\vartheta_3-\vartheta_4-\pi-2i)=0 \tag{14}$$

или

$$D(\vartheta_1-\vartheta_2+\pi-2i)+D'(\vartheta_3-\vartheta_4-\pi-2i)=0, \tag{15}$$

откуда находим наклонение:

$$i=\frac{D(\vartheta_1-\vartheta_2+\pi)+D'(\vartheta_3-\vartheta_4-\pi)}{2D+2D'}, \tag{16}$$

где D и D' — тангенсы углов отклонений стрелки при первом и втором значениях намагниченности соответственно.

При проведении измерений с вертикальным кругом вертикальная ось тщательно устанавливается так, чтобы плоские опоры, на которых покоится ось магнита, были горизонтальны при любом азимуте. Ось магнита помещается на плоских опорах, а сам магнит намагничивается таким образом, чтобы конец A наклонялся; измерения производятся при совмещении плоскости круга с магнитным меридианом, причем градуированная сторона круга обращена к востоку. Каждый конец магнита наблюдается через считывающий микроскоп, размещенный на плече, которое перемещается концентрично вертикальному кругу. Микроскоп регулируется так, чтобы изображение отметки на магните совпало с крестом микроскопа, а положение плеча отсчитывается на вертикальном круге с помощью верньеров.

Так мы производим одно измерение конца A и другое — конца B при шкале, обращенной на восток. Измерения обоих концов необходимы для исключения любой ошибки, возникающей из-за неконцентричности оси магнита с вертикальным кругом.

После этого градуированная сторона поворачивается на запад и производятся еще два измерения.

Затем магнит переворачивается так, что концы его оси меняются местами, после чего при таком положении магнита производятся еще четыре измерения.

Затем намагниченность меняется на противоположную, при которой вниз наклоняется уже конец B, устанавливается значение магнитного момента, и в этом положении осуществляются еще восемь измерений. Истинное наклонение определяется путем комбинации шестнадцати измерений.

462. Обнаружено, что, несмотря на крайние предосторожности, наклонение, найденное из измерений одним инклинометром, заметно отличается от наклонения, найденного из измерений другим инклинометром в том же месте. М-р Браун указал, что этот эффект связан с эллиптичностью опорных поверхностей оси, и предложил корректировать его путем проведения измерений с магнитом, намагничиваемым до различных мощностей.

Принцип этого метода можно сформулировать следующим образом. Мы будем считать, что ошибка любого единичного измерения является величиной малой, не превышающей градуса. Будем также считать, что некоторая неизвестная, но регулярная сила действует на магнит, отклоняя его от правильного положения.

Если момент этой силы равен L, истинное наклонение ϑ_0 и наблюдаемое отклонение ϑ, то

$$L = MI\sin(\vartheta - \vartheta_0) = \tag{17}$$

$$= MI(\vartheta - \vartheta_0), \tag{18}$$

поскольку разность $\vartheta - \vartheta_0$ мала.

Очевидно, что чем больше становится M, тем ближе подходит стрелка к своему правильному положению. Допустим, что процедура регистрации наклонения произведена дважды — один раз с максимально возможной для стрелки намагниченностью M_1, а второй — с гораздо меньшей намагниченностью M_2, достаточной, однако, для отчетливого, с еще умеренной ошибкой, снятия показаний. Пусть ϑ_1 и ϑ_2 — наклонения, найденные из двух таких серий измерений , а L — среднее значение неизвестной возмущающей силы для восьми положений в каждой серии, которое мы будем считать одинаковым для обеих серий. Тогда

$$L = M_1 I(\vartheta_1 - \vartheta_0) = M_2 I(\vartheta_2 - \vartheta_0). \tag{19}$$

Следовательно,

$$\vartheta_0 = \frac{M_1\vartheta_1 - M_2\vartheta_2}{M_1 - M_2}, \qquad L = M_1 M_2 I\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{M_2 - M_1}. \tag{20}$$

Если окажется, что в нескольких экспериментах получаются примерно одинаковые значения L, то мы можем рассматривать ϑ_0 как величину, очень близкую к истинному наклонению.

463. Д-р Джоуль сконструировал недавно новый инклинометр, в котором ось стрелки, вместо того чтобы катиться по горизонтальным агатовым плоскостям, подвешена на двух нитях из шелка или паутины, концы которых прикреплены к коромыслу очень чувствительных весов. Таким образом, ось стрелки катится по двум петлям из шелковых нитей; д-р Джоуль находит, что в своем движении она гораздо более свободна, чем при качении по агатовым плоскостям.

На рис. 18 изображены: NS — стрелка, CC' — ее ось, выполненная в виде прямого цилиндрического провода, PCQ и $P'C'Q'$ — нити, по которым катится ось. POQ — коромысло весов в виде двойного изогнутого рычага, поддерживаемого проволокой, горизонтально натянутой между зубцами вилкообразной подставки; коромысло снабжено противовесом R, который можно подвинчивать вверх или вниз, чтобы весы находились в нейтральном равновесии относительно $O'O'$.

Чтобы стрелка находилась в нейтральном равновесии, ее центр тяжести при качении по нитям не должен ни подниматься, ни опускаться, т. е. при качении

стрелки расстояние OC должно оставаться неизменным. Это условие будет выполнено, если рычаги коромысла равны, а нити направлены под прямыми углами к рычагам.

Д-р Джоуль нашел, что стрелка должна быть не длиннее пяти дюймов. При длине восемь дюймов изгиб стрелки приводит к уменьшению видимого наклонения на доли минуты. Ось стрелки вначале была изготовлена из стальной проволоки, выпрямленной под действием собственного веса в нагретом докрасна состоянии, но затем д-р Джоуль обнаружил, что при новой системе подвешивания нет необходимости в использовании стальной проволоки, поскольку платина и даже стандартное золото обладают достаточной твердостью.

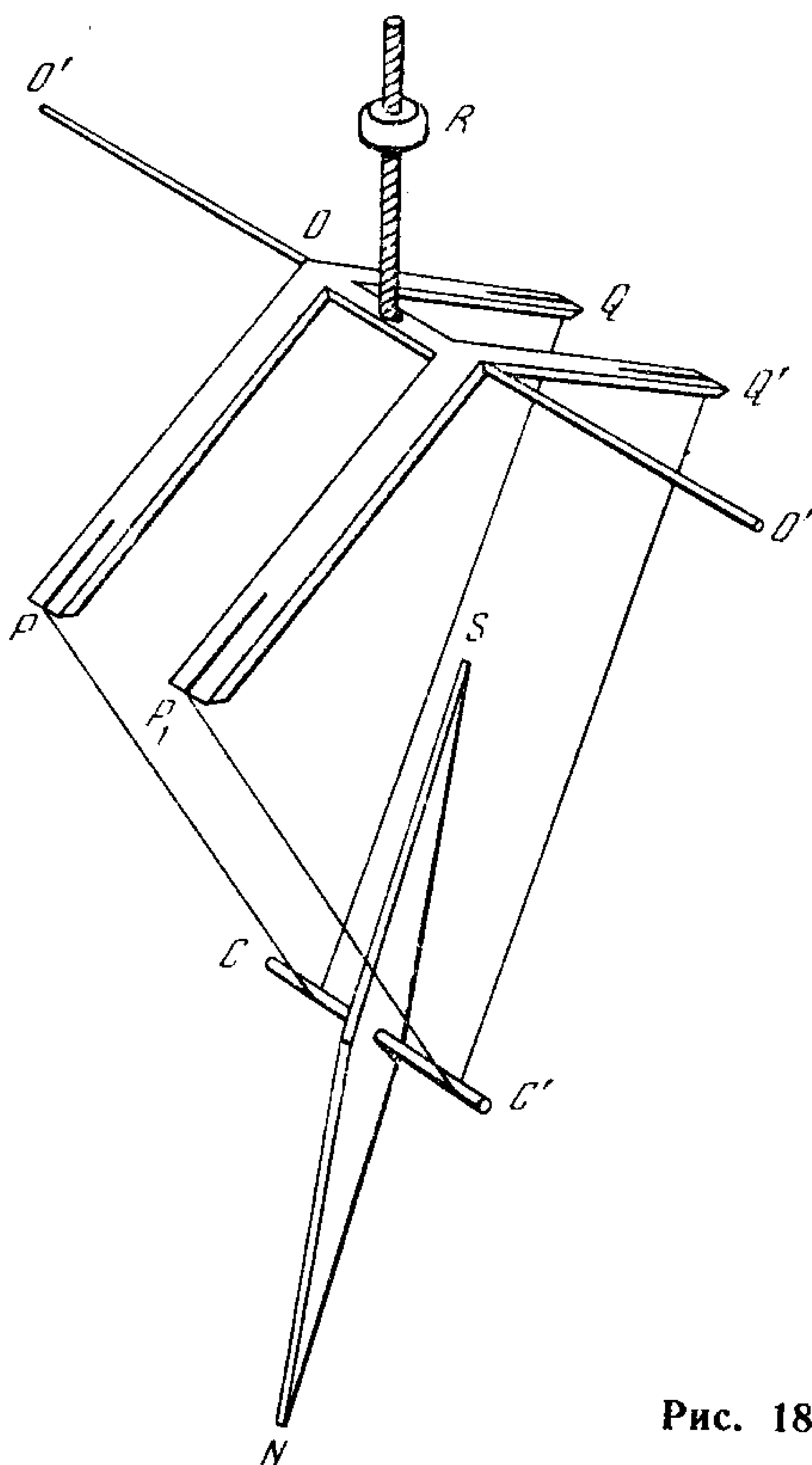


Рис. 18

Весы сбалансированы на проволоке $O'O'$ длиной около фута, горизонтально натянутой между зубцами вилки. Вилка вращается по азимуту с помощью круга на вершине треноги, на которой держится весь прибор. За час можно произвести шесть полных измерений наклонения при средней ошибке единичного измерения, составляющей доли угловой минуты.

В Кембриджской физической лаборатории положение вертикальной стрелки предложено измерять с помощью прибора двойного изображения. Он состоит из двух полностью отражающих призм, расположение которых показано на рис. 19. Призмы прикреплены к вертикальному градуированному кругу, их плоскость отражения можно поворачивать вокруг горизонтальной оси, почти совпадающей с продолжением оси подвешенной стрелки. Стрелка наблюдается через телескоп, помещенный за призмами, причем два конца стрелки видны вместе, как на рис. 20. Поворачивая призмы вокруг оси вертикального круга, можно добиться совпадения изображений двух линий, начерченных на стрелке. Наклонение стрелки при этом определяется показаниями вертикального круга.

Полную напряженность I магнитной силы вдоль линии наклонения можно определить по периодам колебаний T_1, T_2, T_3 и T_4 в четырех уже описанных положениях следующим образом:

$$I = \frac{4\pi^2 A}{2M+2M'} \left\{ \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} + \frac{1}{T_4^2} \right\}.$$

Здесь A — момент инерции магнита относительно его оси, а величины M и M' должны быть найдены уже описанным методом отклонения и колебаний.

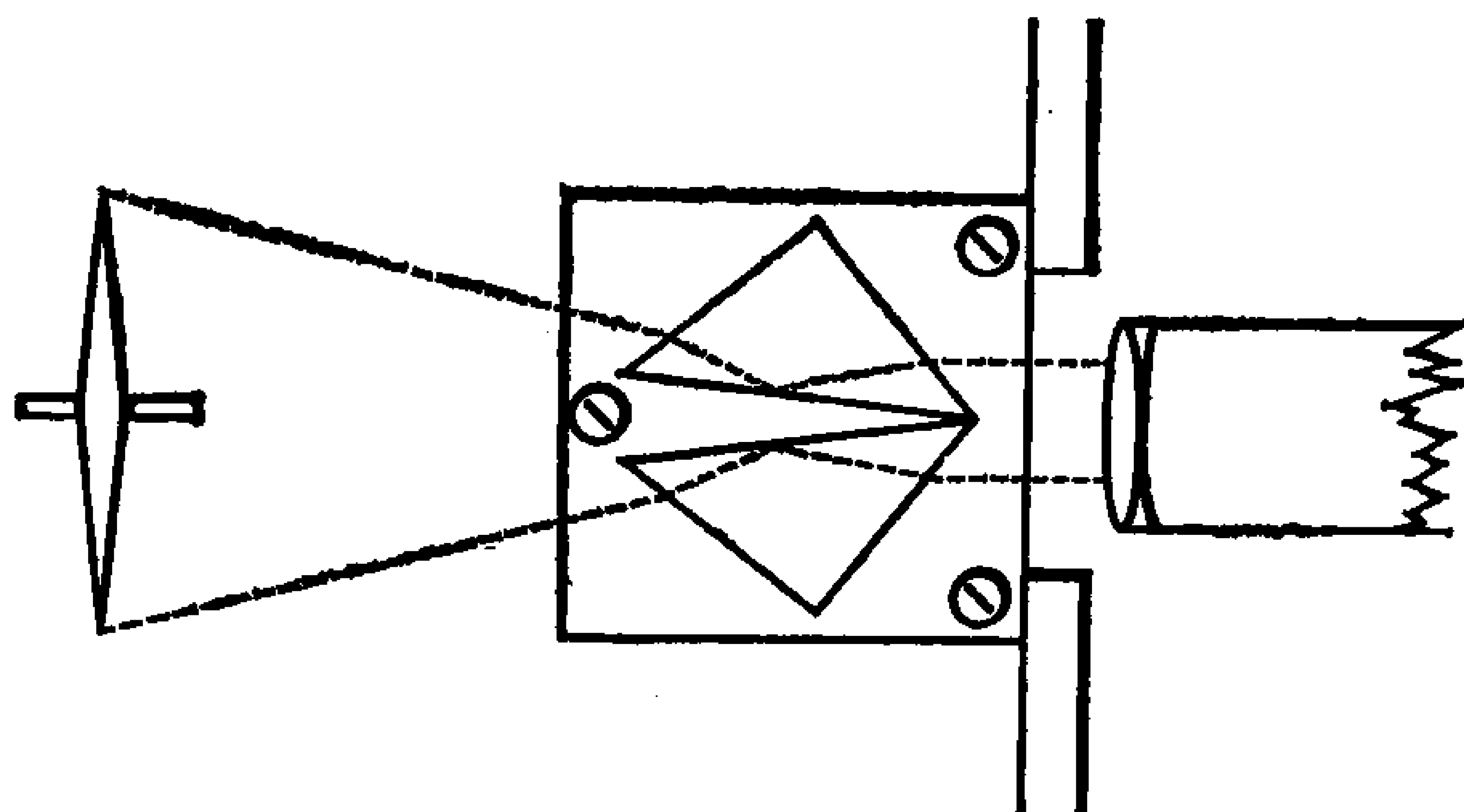


Рис. 19

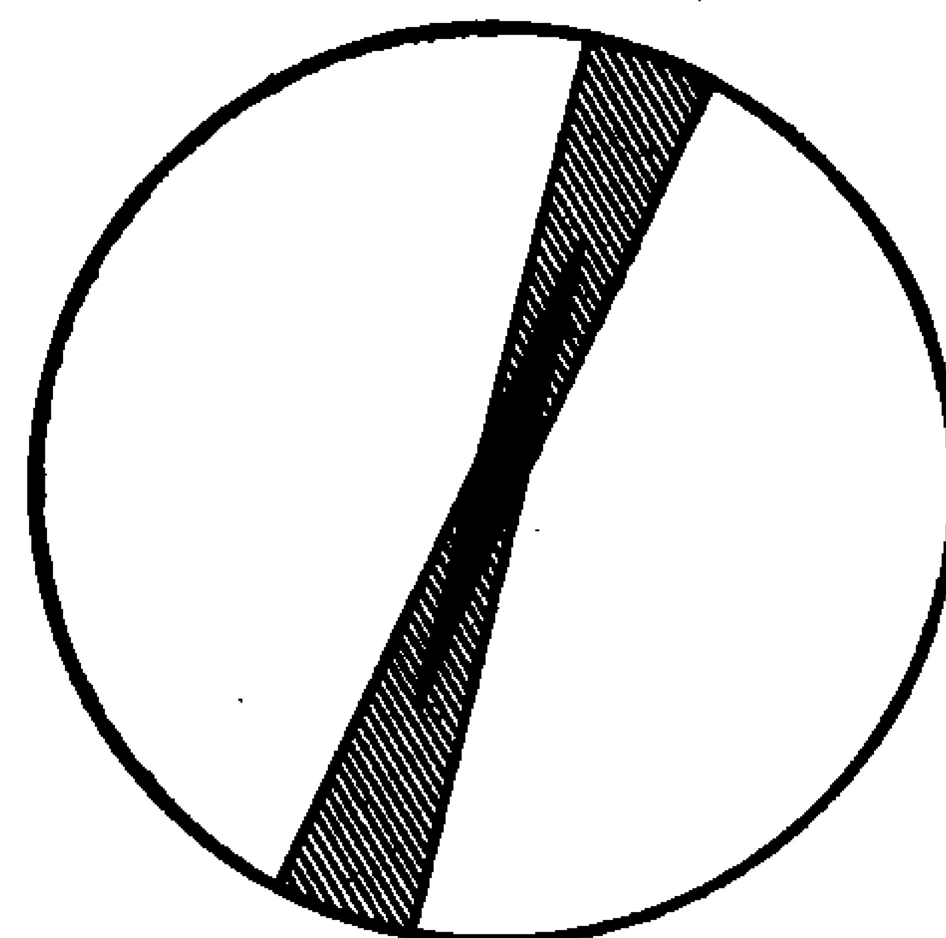


Рис. 20

Измерения с магнитом, подвешенным на нити, являются настолько более точными, что полную силу обычно вычисляют по горизонтальной силе с помощью соотношения $I=H \sec \vartheta$, где I — полная сила, H — горизонтальная сила и ϑ — наклонение.

464. Утомительный процесс определения наклонения не приспособлен для наблюдения непрерывных вариаций магнитной силы. Наиболее удобным прибором для непрерывных наблюдений является магнитометр вертикальной силы, который попросту представляет собой магнит, сбалансированный на лезвии ножа таким образом, что его магнитная ось в устойчивом равновесии оказывается почти горизонтальной.

Если Z — вертикальная составляющая магнитной силы, M — магнитный момент и ϑ — малый угол, который магнитная ось образует с горизонтом, то

$$MZ \cos \vartheta = mga \cos (\alpha - \vartheta),$$

где m — масса магнита, g — сила тяжести, a — расстояние от центра тяжести до оси подвеса и α — угол, который образует с осью магнита плоскость, проходящая через ось и центр тяжести.

Следовательно, при малых вариациях вертикальной силы δZ, поскольку ϑ очень мало, появятся вариации углового положения магнита $\delta\vartheta$, такие, что

$$M\delta Z = mga \sin (\alpha - \vartheta)\, \delta\vartheta.$$

На практике этот прибор не применяется для определения абсолютного значения вертикальной силы, а используется лишь для регистрации ее малых вариаций.

Для этой цели достаточно знать абсолютное значение Z при $\vartheta=0$ и величину $dZ/d\vartheta$.

Если горизонтальная сила и наклонение известны, то значение Z определяется соотношением $Z=H \operatorname{tg} \vartheta_0$, где ϑ_0 — наклонение и H — горизонтальная сила.

Чтобы найти отклонение, обусловленное заданной вариацией Z, возьмем магнит, поместим его на известном расстоянии r_1 к западу или к востоку от деклино-

метра, направив его ось с востока на запад, как это делалось в экспериментах по отклонению; пусть тангенс угла отклонения будет равен D_1.

Поместим затем магнит, направив его ось вертикально, на расстоянии r_2 над или под центром магнитометра вертикальной силы, и пусть тангенс отклонения, произведенного в магнитометре, равен D_2. Тогда, если момент отклоняющего магнита равен M, то

$$2M = Hr_1^3 D_1 = \frac{dZ}{d\vartheta} r_2^3 D_2.$$

Следовательно, $\dfrac{dZ}{d\vartheta} = H \dfrac{r_1^3}{r_2^3} \dfrac{D_1}{D_2}$.

Действительное значение вертикальной силы в произвольный момент равно $Z = Z_0 + \vartheta \dfrac{dZ}{d\vartheta}$, где Z_0 — значение Z при $\vartheta = 0$.

Для непрерывных измерений магнитной силы в некоторой неподвижной обсерватории наиболее удобны инструменты: однонитевой деклинометр, двухнитевой магнитометр горизонтальной силы и сбалансированный магнитометр вертикальной силы.

В некоторых обсерваториях сейчас воспроизводятся фотографические записи на особой бумаге, перемещаемой с помощью часового механизма; при этом получаются непрерывные записи показаний всех трех приборов в каждый момент времени. Эти кривые показывают вариации относительно стандартных значений трех ортогональных составляющих магнитной силы. Деклинометр дает силу, направленную к среднему магнитному западу; двухнитевой магнитометр дает вариацию силы, направленной к магнитному северу, и сбалансированный магнитометр дает вариацию вертикальной силы. Стандартные значения для этих сил или значения, при которых эти приборы показывают нули, получаются на основании часто производимых измерений абсолютных значений склонения, горизонтальной силы и наклонения.

ГЛАВА VIII
О ЗЕМНОМ МАГНЕТИЗМЕ

465. Наши знания о Земном Магнетизме получены на основании исследования распределения магнитной силы по земной поверхности в какой-либо определенный момент времени, а также изучения изменений, происходящих в этом распределении в различные времена.

Магнитная сила в любом месте в любой момент времени известна, если известны три ее координаты. Они могут быть заданы в виде склонения или азимута силы, наклонения относительно горизонта и полного значения напряженности.

Однако наиболее удобный метод изучения общего распределения магнитной

силы на земной поверхности состоит в рассмотрении значений трех ее составляющих:

$$\begin{array}{ll} \text{направленной к северу} & X = H\cos\delta, \\ \text{направленной к западу} & Y = H\sin\delta, \\ \text{направленной вертикально вниз} & Z = H\operatorname{tg}\vartheta, \end{array} \qquad (1)$$

где H обозначает горизонтальную силу, δ — склонение, ϑ — наклонение.

Если через V обозначить магнитный потенциал на поверхности Земли, рассматривая ее как сферу с радиусом a, то

$$X = -\frac{1}{a}\frac{dV}{dl}, \qquad Y = -\frac{1}{a\cos l}\frac{dV}{d\lambda}, \qquad Z = \frac{dV}{dr}, \qquad (2)$$

где l — широта, λ — долгота, r — расстояние от центра Земли.

Знание распределения V по земной поверхности может быть получено из наблюдений одной лишь горизонтальной силы следующим способом.

Обозначим через V_0 значение V в истинном северном полюсе Земли и затем возьмем линейный интеграл от X вдоль какого-нибудь меридиана; тогда для потенциала на этом меридиане на широте l найдем

$$V = -a\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{l} X\,dl + V_0. \qquad (3)$$

Таким образом, потенциал в любой точке земной поверхности может быть найден при условии, что мы знаем в каждой точке величину северной компоненты силы X и величину потенциала на полюсе V_0.

Так как силы зависят от производных потенциала V, а не от его абсолютной величины, то нет необходимости фиксировать какое-либо частное значение V_0.

Величина V в произвольной точке может быть установлена, если известны значения X вдоль произвольно заданного меридиана, а также значения Y на всей поверхности. Пусть интеграл

$$V_l = -a\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{l} X\,dl + V_0 \qquad (4)$$

берется вдоль заданного меридиана от полюса до параллели l, тогда

$$V = V_l - a\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} Y\cos l\,d\lambda, \qquad (5)$$

где интегрирование производится вдоль параллели l от заданного меридиана λ_0 до требуемой точки.

Эти методы предполагают, что составлена полная магнитная обзорная карта (magnetic survey) земной поверхности, так что величины X или Y или обе из них известны во всех точках поверхности на данном отрезке времени. Что мы действительно знаем, так это лишь магнитные компоненты в местах расположения оп-

ределенного числа станций. В цивилизованных частях света эти станции сравнительно многочисленны; но в других местах существуют протяженные участки земной поверхности, относительно которых у нас нет никаких сведений.

Магнитная обзорная карта

466. Предположим, что в какой-то стране умеренной протяженности, наибольший размер которой составляет несколько сот миль, имеется значительное количество удачно размещенных станций, где проводятся наблюдения за горизонтальной силой и склонением.

В пределах этого района можно считать, что потенциал V с достаточной точностью представляется следующей формулой:

$$V = \mathrm{const} - a\left(A_1 l + A_2\lambda + \frac{1}{2}B_1 l^2 + B_2 l\lambda + \frac{1}{2}B_3\lambda^2 + \ldots\right), \tag{6}$$

откуда следует

$$X = A_1 + B_1 l + B_2\lambda, \tag{7}$$

$$Y\cos l = A_2 + B_2 l + B_3\lambda. \tag{8}$$

Пусть имеется n станций с широтами l_1, l_2, ... и долготами λ_1, λ_2, . . ., и пусть для каждой из этих станций найдены значения X и Y. Введем l_0 и λ_0, которые могут быть названы широтой и долготой центральной станции:

$$l_0 = \frac{1}{n}\sum(l), \qquad \lambda_0 = \frac{1}{n}\sum(\lambda). \tag{9}$$

Определим значения X и Y на этой воображаемой центральной станции так:

$$X_0 = \frac{1}{n}\sum(X), \qquad Y_0\cos l_0 = \frac{1}{n}\sum(Y\cos l). \tag{10}$$

Тогда

$$X = X_0 + B_1(l - l_0) + B_2(\lambda - \lambda_0), \tag{11}$$

$$Y\cos l = Y_0\cos l_0 + B_2(l - l_0) + B_3(\lambda - \lambda_0). \tag{12}$$

Мы имеем n уравнений вида (11) и n уравнений вида (12). Обозначим вероятную ошибку в определении X через ξ, а в определении $Y\cos l$ — через η; тогда мы можем вычислить ξ и η, исходя из предположения, что они обусловлены ошибками наблюдений H и δ.

Пусть вероятная ошибка наблюдений H равна h, а ошибка наблюдений δ равна Δ, тогда в силу

$$dX = \cos\delta\cdot dH - H\sin\delta\cdot d\delta$$

будем иметь

$$\xi^2 = h^2\cos^2\delta + \Delta^2 H^2\sin^2\delta.$$

Аналогично

$$\eta^2 = h^2\sin^2\delta + \Delta^2 H^2\cos^2\delta.$$

Если отклонения X и Y от значений, даваемых уравнениями вида (11) и (12), значительно превышают вероятные ошибки наблюдений, можно сделать вывод о том, что они обусловлены какими-то местными притяжениями; при этом у нас

нет никаких причин полагать отношение ξ и η равным какой-либо величине, отличной от единицы.

Согласно методу наименьших квадратов, умножим уравнения вида (11) на η, а уравнения вида (12) — на ξ, тем самым сделав их вероятные ошибки одинаковыми. Затем умножим каждое из уравнений на коэффициент перед одной из неизвестных величин B_1, B_2 или B_3; сложив результаты, получим три уравнения для отыскания величин B_1, B_2, B_3:

$$P_1 = B_1 b_1 + B_2 b_2,$$
$$\eta^2 P_2 + \xi^2 Q_1 = B_1 \eta^2 b^2 + B_2 (\xi^2 b_1 + \eta^2 b_3) + B_3 \xi^2 b_2,$$
$$Q_2 = B_2 b_2 + B_3 b_3$$

Здесь для краткости обозначено

$$b_1 = \Sigma\ (l^2) - n l_0^2, \quad b_2 = \Sigma\ (l\lambda) - n l_0 \lambda_0, \quad b_3 = \Sigma\ (\lambda^2) - n\lambda_0^2,$$
$$P_1 = \sum (lX) - n l_0 X_0, \qquad Q_1 = \sum (lY \cos l) - n l_0 Y_0 \cos l_0,$$
$$P_2 = \sum (\lambda X) - n\lambda_0 X_0, \qquad Q_2 = \sum (\lambda Y \cos l) - n\lambda_0 Y_0 \cos l_0.$$

Вычисляя B_1, B_2 и B_3 и подставляя их в уравнения (11) и (12), мы можем найти значения X и Y в любой точке обзорной карты в пределах, свободных от местных возмущений, обнаруживаемых там, где вблизи станций имеются магнитные породы, каковыми является большинство скал вулканического происхождения.

Обзорные карты подобного рода могут быть составлены лишь для тех стран, где имеется много станций, куда удается доставить и где можно установить магнитные инструменты. Для других частей Земли приходится довольствоваться отысканием распределения магнитных элементов путем их интерполяции между значениями, известными лишь в местах расположения небольшого числа станций, разнесенных друг от друга на большие расстояния.

467. Предположим теперь, что с помощью описанной выше процедуры или с помощью эквивалентного ей графического метода построения карт, содержащих линии равных значений магнитных элементов, мы узнали величины X и Y, а следовательно, и потенциал V для всей поверхности земного шара. Следующий шаг должен состоять в разложении V в ряд по сферическим поверхностным гармоникам.

Если бы Земля всюду внутри была однородно намагничена в одном и том же направлении, то потенциал V был бы гармоникой первого порядка, магнитные меридианы совпадали бы с большими окружностями, проходящими через оба диаметрально противоположных магнитных полюса, а магнитный экватор был бы большой окружностью с одинаковой во всех ее точках горизонтальной силой. Обозначив через H_0 это постоянное значение силы, для любой другой точки с магнитной широтой l' мы бы имели $H = H_0 \cos l'$. Вертикальная сила в произвольной точке равнялась бы $Z = 2H_0 \sin l'$, причем $\operatorname{tg} \vartheta = 2 \operatorname{tg} l'$, где ϑ — наклонение.

Магнитный экватор в случае Земли определяется как линия нулевого наклонения и не является большой окружностью сферы.

Магнитные полюса определяются как точки, в которых горизонтальная сила равна нулю, или где наклонение равно 90°. Существуют две таких точки, одна в северном, другая в южном районах, однако они не являются диаметрально противоположными, и соединяющая их линия не параллельна магнитной оси Земли.

468. Магнитные полюса — это точки, где потенциал V на поверхности Земли имеет минимум или максимум или стационарное значение.

В любой точке, где потенциал минимален, северный конец стрелки инклинометра показывает вертикально вниз, а если где-нибудь вблизи этой точки поместить компас, то северный конец его стрелки будет указывать в сторону этой точки.

В точках, где потенциал максимален, южный конец стрелки инклинометра показывает вертикально вниз, а южный конец стрелки компаса указывает в сторону этой точки.

Если на поверхности Земли существует p минимумов V, то должно иметься $(p-1)$ других точек, в которых северный конец стрелки инклинометра указывает вниз, но где, однако, стрелка компаса, если ее обносить по окружности около такой точки, вместо того, чтобы, вращаясь, указывать неизменно северным концом на центр этой окружности, будет вращаться в противоположном направлении, поворачиваясь к центральной точке то своим северным, то южным концом.

Если точки с минимумом потенциала назвать истинными северными полюсами, то эти другие точки можно назвать ложными северными полюсами, потому что стрелка компаса по отношению к ним ведет себя неверно. При наличии p истинных северных полюсов должно иметься $(p-1)$ ложных северных полюсов и аналогично при q истинных южных полюсах должно быть $(q-1)$ ложных южных полюсов. Число одноименных полюсов должно быть нечетным, так что преобладавшее одно время мнение о существовании двух северных и двух южных полюсов ошибочно. Согласно Гауссу, в действительности на земной поверхности имеется только один истинный северный полюс и только один истинный южный полюс и, следовательно, не существует ложных полюсов. Линия, соединяющая эти полюса, не совпадает с диаметром Земли и не параллельна земной магнитной оси.

469. Большинство ранних исследователей природы земного магнетизма пытались представить его как результат действия одного или нескольких стержневых магнитов, расположение полюсов которых подлежало определению. Гаусс был первым, кто выразил распределение земного магнетизма совершенно общим способом через разложение его потенциала в ряд по объемным гармоникам, коэффициенты которых он определил для первых четырех степеней. Общее число коэффициентов равно 24:3 — для первой степени, 5 — для второй, 7 — для третьей и 9 — для четвертой. Все эти члены оказались необходимыми для того, чтобы с доступной точностью дать представление о действительном состоянии земного магнетизма.

Как отыскать, какая часть наблюдаемой магнитной силы обусловлена внешними, а какая внутренними источниками

470. Предположим теперь, что мы получили разложение магнитного потенциала Земли по сферическим гармоникам, согласующееся с истинным направлением и истинной величиной горизонтальной силы в каждой точке земной поверхности. Гаусс показал, как, исходя из значений наблюдаемой вертикальной силы, определить, обусловлены ли магнитные силы источниками внутри земной поверхности, такими как намагниченность или электрические токи, или же какая-то их часть непосредственно обязана источникам вне земной поверхности.

Пусть истинный потенциал разложен в двойной ряд по сферическим гармоникам:

$$V = A_1 \frac{r}{a} + \ldots + A_i \left(\frac{r}{a}\right)^i + \ldots + B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \ldots + B_i \left(\frac{r}{a}\right)^{-(i+1)} + \ldots .$$

Первый ряд представляет часть потенциала, обусловленную внешними по отношению к Земле источниками, второй ряд представляет часть, обусловленную источниками в пределах Земли.

Наблюдаемая горизонтальная сила дает нам сумму этих рядов при $r=a$ (a — радиус Земли). Член i-го порядка равен $V_i = A_i + B_i$.

Наблюдения вертикальной силы дают нам $Z = dV/dr$, а член i-го порядка в выражении для aZ равен $aZ_i = iA_i - (i+1)B_i$.

Следовательно, часть, обусловленная внешними источниками, равна $A_i = \frac{(i+1)V_i + aZ_i}{2i+1}$, а часть, обусловленная источниками в пределах Земли, $B_i = \frac{iV_i - aZ_i}{2i+1}$.

Разложение V к настоящему времени вычислено только для среднего значения V, относящегося к определенным или примерно определенным отрезкам времени. Представляется, что существенная часть этого среднего значения не может быть обусловлена причинами, внешними по отношению к Земле.

471. Мы пока еще не достаточно знаем вид разложения солнечной и лунной частей вариаций V, чтобы установить *этим методом*, связана ли часть этих вариаций с магнитными силами, действующими извне. Безусловно, однако, как показали вычисления Стоуни (Stoney) и Чамберса (Chambers), что главная часть этих вариаций не может быть вызвана непосредственным магнитным воздействием Солнца или Луны, если считать их магнитными [1].

472. Основные изменения магнитной силы, на которые было направлено внимание, следующие.

I. *Относительно более регулярные вариации*

(1). Солнечные вариации, зависящие от времени суток и времени года.

(2). Лунные вариации, зависящие от лунного часового угла и от других элементов положения Луны.

(3). Вариации, которые не повторяются в различные годы, но, по-видимому, принадлежащие к вариациям более длинного, порядка одиннадцати лет, периода.

(4). Кроме этого, существуют вековые изменения состояния земного магнетизма, которые происходят в течение всего времени с тех пор, как начали производиться магнитные измерения, и которые производят изменения магнитных компонент, значительно большие по величине, чем какие-либо вариации малого периода.

---

[1] Профессор Хорнштейн (Hornstein) из Праги открыл периодические изменения в магнитных элементах, период которых равен 26,33 суток, что почти точно совпадает с периодом синодического вращения Солнца, найденным по наблюдениям солнечных пятен вблизи экватора. Этот метод измерения периода вращения невидимого твердого тела Солнца по его действию на магнитную стрелку является первым взносом магнетизма в уплату его долга перед астрономией, *Anzeiger der k. Akad.*, Wien, June 15, 1871. См. *Proc. R. S.*, Nov. 16, 1871.

II. *Возмущения*

473. Помимо более регулярных изменений, магнитные элементы подвержены внезапным возмущениям той или иной степени. Обнаружено, что эти возмущения в какие-то интервалы времени оказываются более мощными и частыми, чем в другие, и тогда во время больших возмущений закономерности регулярных вариаций завуалированы, хотя во время малых возмущений они проявляются очень отчетливо. Поэтому этим возмущениям было уделено много внимания; было выяснено, что возмущения какого-то частного типа с большей вероятностью происходят в определенные времена суток, в определенные времена года или в определенные интервалы времени, хотя каждое отдельное возмущение появляется абсолютно нерегулярно. Время от времени наряду с этими более обычными возмущениями возникают чрезвычайно большие возмущения, сильно нарушающие магнетизм в течение одного или двух дней. Их называют Магнитными Бурями. Отдельные возмущения иногда наблюдаются одновременно на станциях, разнесенных на большие расстояния.

М-р Эйри обнаружил, что значительная часть возмущений, возникающих в Гринвиче, соответствует появлению электрических токов, собираемых электродами, размещаемыми поблизости в земле; причем эти возмущения оказались такими же, какими они вызывались бы прямо в магните, когда *под ним* протекал бы земной ток, сохраняющий свое истинное направление, но текущий по проводу.

Было выяснено, что периоды максимума возмущений бывают каждые одиннадцать лет и, кажется, совпадают с периодами максимального количества солнечных пятен.

474. Область исследований, в которую мы проникли при изучении земного магнетизма, является столь же глубокой, сколь и обширной.

Мы знаем, что Солнце и Луна воздействуют на земной магнетизм. Доказано, что это воздействие нельзя объяснить, исходя из предположения, что эти тела являются магнитами, и, следовательно, это воздействие не является непосредственным.

В случае Солнца часть его воздействия может оказаться тепловым, но этого нельзя приписать Луне. Может быть, притяжение этих тел, вызывая напряжение во внутренних частях Земли, производит (п. 447) изменения в магнетизме, уже существующем в Земле, как разновидность приливного действия, дающая полусуточные вариации?

Но величина всех этих изменений очень мала по сравнению с большими вековыми изменениями земного магнетизма.

Какой же источник, внешний ли по отношению к Земле или таящийся в ее внутренних глубинах, производит столь огромные изменения в земном магнетизме, что ее магнитные полюса медленно смещаются из одной части земного шара в другую? Если мы примем во внимание, что интенсивность намагниченности огромного земного шара вполне сравнима с той, которую мы с большим трудом создаем в своих стальных магнитах, эти обширные изменения в таком огромном теле вынуждают нас заключить, что мы все еще не знакомы с одним из наиболее мощных действующих в природе агентов, сцена активности которого лежит в тех внутренних глубинах Земли, к познанию которых у нас так мало средств доступа.

ЧАСТЬ IV
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ГЛАВА I
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИЛА

475. В определенных условиях, как было замечено большим числом разных наблюдателей, магнетизм у игл и стрелок образуется или разрушается под действием разрядов электричества, проходящих через них или рядом с ними. Хотя при этом делались различного рода догадки о связи между магнетизмом и электричеством, но законы этих явлений, равно как и вид этих связей, оставались совершенно неизвестными до тех пор, пока Ганс Христиан Эрстед [1] на одной из частных лекций для небольшого числа аспирантов в Копенгагене не обнаружил, что провод, замыкающий клеммы вольтовой батареи, оказывает влияние на расположенный поблизости магнит. Он опубликовал это открытие в своем трактате, озаглавленном «*Опыты, касающиеся влияния электрических возмущений на магнитные иглы*», датированным 21 июля 1820 г.

Эксперименты по связи между магнитом и электрически заряженными телами не дали никаких результатов до тех пор, пока Эрстед не попытался установить влияние провода, *нагретого* электрическим током. Однако он открыл, что не тепло в проводе, а сам электрический ток оказался причиной этого воздействия и что «электрическое возмущение действует вращательным образом», а именно: магнит, помещенный вблизи провода, передающего электрический ток, стремится установиться перпендикулярно проводу, а при обносе его вокруг провода он всегда указывает вперед одним и тем же концом.

476. Из этого явствует, что в пространстве, окружающем провод, по которому течет электрический ток, магнит находится под действием сил, зависящих от положения провода и от силы тока. Поэтому пространство, где действуют эти силы, можно рассматривать как магнитное поле и изучать его так же, как мы уже изучали поле в окрестности обычных магнитов, прослеживая ход линий магнитной силы и измеряя напряженность силы в каждой точке.

477. Начнем со случая сколь угодно длинного прямого провода, несущего электрический ток. Если бы наблюдатель представил себе, что он расположен вдоль этого провода, а ток протекает от его головы к его ногам, то свободно подвешенный перед ним магнит установился бы таким образом, чтобы конец магнита, ранее указывавший на север, под действием тока стал бы указывать на правую руку этого наблюдателя.

Линии магнитной силы всюду составляют прямые углы с плоскостями, проведенными через провод, и потому являются окружностями; каждая из них лежит

[1] Другой отчет о том, как было сделано открытие Эрстеда, содержится в письме проф. Ханстина (Hansteen), помещенном в книге д-ра Бенса Джонса «Жизнь Фарадея» (Dr. Bence Jones, «*Life of Faraday*», vol. II, p. 395).

в плоскости, перпендикулярной проводу, а сам провод проходит через центры этих окружностей. Полюс магнита, указывающий на север, при его перемещении вдоль одной из этих окружностей слева направо испытывал бы действие силы всегда в направлении движения. А на другой полюс того же магнита сила действовала бы в противоположном направлении.

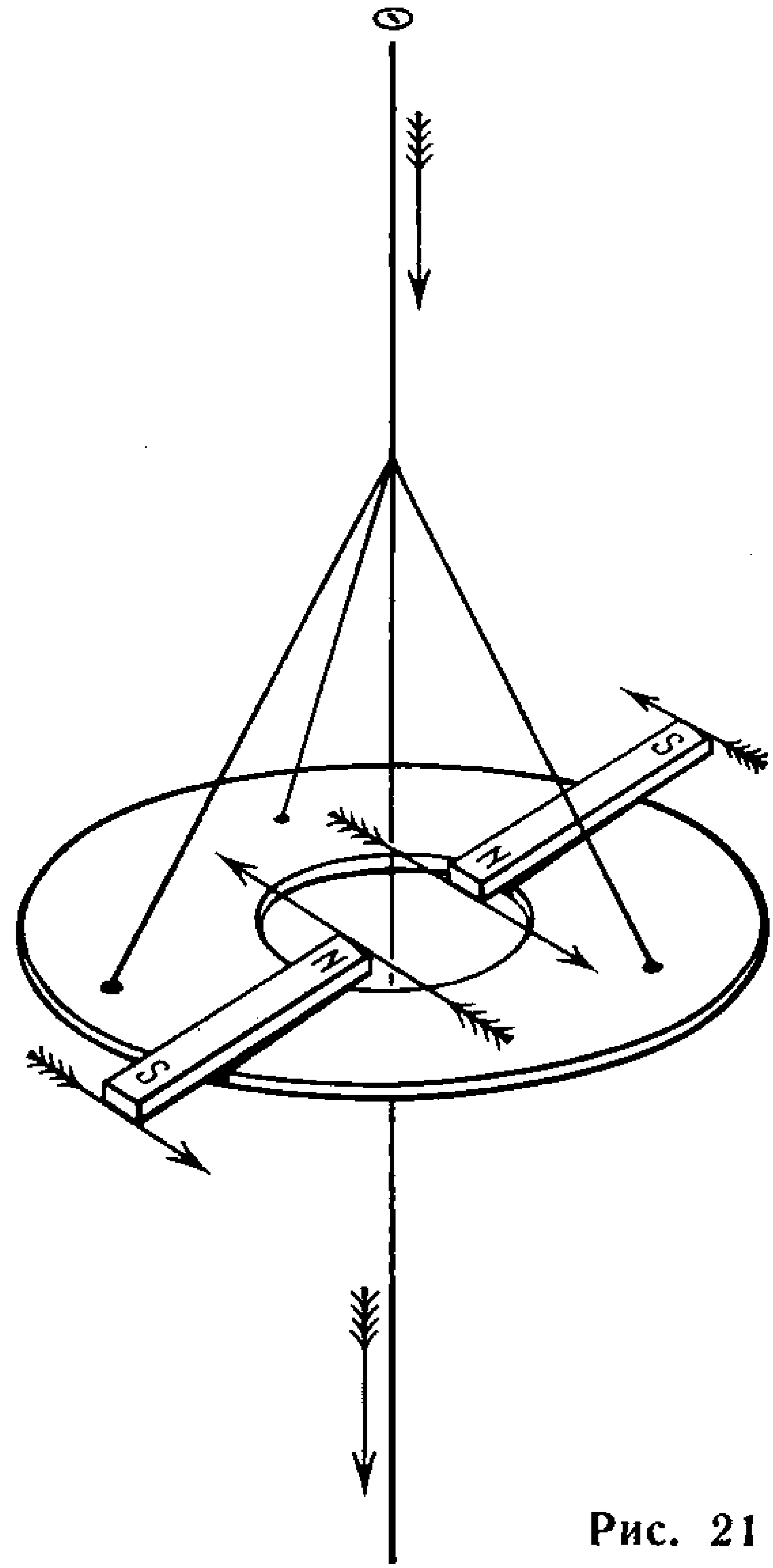


Рис. 21

478. Для сравнения этих сил будем считать провод вертикальным, а ток текущим вниз. Магнит же поместим на какое-нибудь устройство, свободно вращающееся относительно вертикальной оси, совпадающей с проводом [рис. 21]. Оказывается, что в этих условиях ток не дает никакого эффекта вращения всего устройства в целом вокруг оси. Следовательно, действие вертикального тока на два полюса магнита таково, что статические моменты обеих сил относительно тока, взятого за ось, равны и противоположны. Пусть мощности полюсов равны m_1 и m_2, их расстояния до оси провода r_1 и r_2, интенсивности магнитной силы, обусловленной током, в месте расположения этих полюсов соответственно T_1 и T_2, тогда действующая на m_1 сила будет равна m_1T_1; так как она составляет с осью прямой угол, ее момент есть $m_1T_1r_1$. Аналогично момент силы, действующей на другой полюс, равен $m_2T_2r_2$. Поскольку при этом не наблюдается никакого движения, то

$$m_1T_1r_1+m_2T_2r_2=0.$$

Однако мы знаем, что у всех магнитов $m_1+m_2=0$. Поэтому $T_1r_1=T_2r_2$, или электромагнитная сила, обусловленная бесконечно протяженным прямолинейным током, перпендикулярна этому току, а ее величина изменяется обратно пропорционально расстоянию от него.

479. Произведение Tr зависит от силы тока и потому может быть использовано в качестве меры этого тока. Такой метод измерения отличен от метода, основанного на электростатических явлениях, и поскольку он зависит от магнитных явлений, вызываемых электрическими токами, то его называют Электромагнитной системой измерений. Если в этой системе ток обозначить через i, то $Tr=2i$.

480. Если принять провод за ось z, то прямоугольные составляющие T будут равны

$$X=-2i\frac{y}{r^2}, \qquad Y=2i\frac{x}{r^2}, \qquad Z=0.$$

Здесь $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ есть полный дифференциал от $2i \operatorname{arctg}(y/x)+C$.

Следовательно, магнитная сила в этом поле может быть выведена, как и в нескольких предыдущих примерах, из потенциальной функции, но в данном случае потенциал является функцией с бесконечной последовательностью значений, имеющих общую разность, равную $4\pi i$. Частные производные по координатам, однако, имеют определенные и единственные значения в каждой точке.

Существование потенциальной функции в поле вблизи электрического тока не является самоочевидным следствием принципа сохранения энергии, ибо для всех реальных токов имеет место непрерывное расходование электрической энергии батареи, идущей на преодоление сопротивления провода. И пока величина этого расхода точно неизвестна, допустимо подозревать, что часть энергии батареи может идти на работу, совершаемую над магнитом при его движении по окружности. И действительно, если магнитный полюс m двигается по замкнутой кривой, охватывающей провод, то над ним в самом деле совершается работа, равная по величине $4\pi mi$. И только для замкнутых путей, не охватывающих провод, криволинейный интеграл от силы обращается в нуль. Поэтому пока мы должны считать, что как закон для силы, так и само существование потенциала опираются на описанные выше экспериментальные факты.

481. Рассматривая пространство, окружающее бесконечную прямую линию, мы видим, что это пространство является циклическим, поскольку оно возвращается само в себя. Но если мы представим плоскость или какую-то иную поверхность, начинающуюся на прямой линии и простирающуюся по одну сторону от нее до бесконечности, то эту поверхность можно будет рассматривать как диафрагму, сводящую циклическое пространство к ациклическому. Пусть из некоторой фиксированной точки в другую произвольную точку проведены линии, не пересекающие диафрагму, а потенциал определен как криволинейный интеграл от силы, взятый вдоль одной из этих линий, тогда потенциал любой точки будет иметь единственное и определенное значение.

Теперь магнитное поле во всех отношениях совпадает с полем, создаваемым магнитной оболочкой, совмещенной с этой поверхностью и имеющей мощность i; эта оболочка с одной своей стороны ограничена бесконечной прямой линией, тогда как другие части ее границы бесконечно удалены от рассматриваемых областей поля.

482. Во всех реальных экспериментах ток образует замкнутую цепь (контур) конечных размеров. Поэтому мы должны сравнивать магнитное действие конечного контура с действием магнитной оболочки, для которой контур служит ограничивающим краем.

Многочисленными экспериментами, из которых наиболее ранние выполнены Ампером, а наиболее точные — Вебером, показали, что магнитное действие маленького плоского контура на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, совпадает с действием магнита, ось которого нормальна к плоскости контура, а магнитный момент равен площади контура, помноженной на силу тока.

Если предположить, что на контур натянута некоторая поверхность, которая ограничена этим же контуром и тем самым образует диафрагму, и если заменить электрический ток магнитной оболочкой, совпадающей с данной поверхностью и имеющей мощность i, то магнитное действие оболочки во всех удаленных точках окажется одинаковым с магнитным действием тока.

483. До сих пор мы считали размеры контура малыми по сравнению с расстоянием между любым участком контура и областью, где исследуется поле. Теперь мы будем предполагать, что контур имеет произвольную форму и произвольные размеры; изучим его действие в произвольной точке P, но не расположенной, однако, внутри самого проводящего провода. Для этой цели Ампер ввел следующий метод, имеющий важные геометрические применения.

Представим себе какую-нибудь поверхность S, ограниченную контуром и не проходящую через точку P. Проведем на этой поверхности два семейства линий, которые, пересекаясь друг с другом, делят поверхность на элементарные части, имеющие размеры, малые по сравнению с их расстоянием от P и с радиусом кривизны поверхности.

Представим себе, что вокруг каждого из этих элементов течет ток силы i, имеющий одинаковое, такое же, как и в исходном контуре, направление циркуляции во всех элементах.

Вдоль каждой из линий, разделяющих два смежных элемента, текут два равных тока силы i в противоположных направлениях.

Эффект двух одинаковых, но противоположных токов, текущих в одном и том же месте, тождественно равен нулю, с какой бы точки зрения мы ни рассматривали эти токи. Единственными участками элементарных контуров, которые не нейтрализуются таким путем, являются участки, совпадающие с первоначальным контуром. Поэтому общий эффект элементарных контуров эквивалентен эффекту первоначального контура.

484. Теперь, поскольку каждый элементарный контур может рассматриваться как маленький плоский контур, расстояние которого от P велико по сравнению с его размерами, мы можем заменить его элементарной магнитной оболочкой мощности i, ограничивающий край которой совпадает с этим элементарным контуром. Магнитный эффект, производимый элементарной оболочкой в точке P, эквивалентен эффекту элементарного контура. В целом все элементарные оболочки образуют магнитную оболочку мощности i, совпадающую с поверхностью S и ограниченную первоначальным контуром; магнитное действие всей оболочки в точке P эквивалентно действию контура.

Ясно, что действие этого контура не зависит от формы поверхности S, которая была выбрана совершенно произвольным образом, лишь бы она затягивала контур. Отсюда видно, что действие магнитной оболочки зависит только от формы ее границы, но не от формы самой оболочки. Этот результат мы получили раньше, в п. 410, однако весьма поучительно видеть, как он может быть выведен из электромагнитных соображений.

Поэтому магнитная сила, создаваемая контуром в произвольной точке, по величине и направлению одинакова с магнитной силой, создаваемой магнитной оболочкой, ограниченной этим контуром и не проходящей через данную точку, причем мощность оболочки численно равна силе тока. Направление тока в контуре так соотносится с направлением намагниченности оболочки, что если наблюдатель встал бы ногами на ту сторону оболочки, которую мы называем положительной и которая стремится указывать на север, то ток перед ним протекал бы справа налево.

485. Магнитный потенциал контура, однако, отличается от потенциала маг-

нитной оболочки для тех точек, которые находятся в самом веществе магнитной оболочки.

Если ω — телесный угол с вершиной в точке P, опирающийся на магнитную оболочку (он считается положительным, когда ближней к P оказывается положительная или аустральная сторона оболочки), то магнитный потенциал в произвольной точке вне самой оболочки равен $\omega\varphi$, где φ — мощность оболочки. Для какой-либо точки внутри вещества самой оболочки мы можем предположить, что оболочка разделена на две части, имеющие мощности φ_1 и φ_2, такие, что $\varphi_1+\varphi_2=\varphi$, причем точка находится на положительной стороне оболочки φ_1 и на отрицательной стороне оболочки φ_2. Потенциал в этой точке равен $\omega\,(\varphi_1+\varphi_2)-4\pi\varphi_2$.

На отрицательной стороне оболочки этот потенциал становится равным $\varphi\,(\omega-4\pi)$. Следовательно, в этом случае потенциал является непрерывным и имеющим в каждой точке единственное определенное значение. С другой стороны, в случае электрического контура магнитный потенциал в каждой точке (но не внутри проводящего провода) равен $i\omega$, где i — сила тока, а ω — телесный угол с вершиной в этой точке, опирающийся на контур и считающийся положительным, когда ток, если смотреть из точки P, циркулирует в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Величина $i\omega$ является функцией, имеющей бесконечную последовательность значений, общая разность которых равна $4\pi i$. Частные производные от $i\omega$ по координатам имеют, однако, единственные и определенные значения в каждой точке пространства.

486. Если длинный тонкий гибкий соленоидальный магнит поместить рядом с электрическим контуром, то северный и южный концы соленоида стремились бы двигаться в противоположных направлениях вокруг провода, и если бы они могли свободно подчиняться действию магнитной силы, то в конце концов магнит оказался бы скрученным вокруг провода в замкнутый виток. Если было бы возможно получить магнит с одним лишь полюсом или с полюсами, обладающими неодинаковыми мощностями, то такой магнит стал бы непрерывно двигаться, причем двигаться вокруг провода в одном направлении; но поскольку полюса у каждого магнита равны и противоположны, то такой результат никогда не может быть достигнут. Фарадей, однако, показал, как производить непрерывное вращение одного полюса магнита вокруг электрического контура, создавая возможность одному из полюсов продолжительно вращаться вокруг тока, а второму — нет.

Для того чтобы этот процесс мог повторяться сколь угодно долго, тело магнита должно переноситься при каждом обороте с одной стороны тока на другую. Чтобы осуществить это, не прерывая потока электричества, ток распределяется по двум ветвям; когда одна ветвь размыкается, позволяя пройти магниту, ток продолжает течь по другой ветви. Для этой цели Фарадей использовал кольцевой желобок со ртутью, как это показано на рис. 23, п. 491. Ток входит в желоб по проводу AB, в B он разделяется, после протекания по дугам BQP и BRP соединяется в P и покидает желоб по проводу PO через чашу со ртутью O, далее он течет вниз по вертикальному проводу, расположенному под чашей O.

Магнит (не показанный на рис. 23) установлен так, чтобы иметь возможность вращаться вместе с проводом OP вокруг вертикальной оси, проходящей через O. Тело магнита проходит через отверстие кольца, причем один полюс, скажем северный, располагается под плоскостью желоба, а второй — над ней. Поскольку

магнит вращается вместе с проводом OP около вертикальной оси, то ток постепенно переходит из той ветви желоба, которая находится впереди магнита, к той ветви, которая находится позади его, так что при каждом полном обороте магнит переходит с одной стороны тока на другую. Северный полюс магнита вращается вокруг текущего вниз тока в направлении $N \to E \to S \to W$ (север—восток—юг—запад). Если ω и ω' — телесные углы (без учета знаков) с вершинами на этих двух полюсах, опирающиеся на кольцевой желоб, то работа, совершаемая электромагнитной силой при полном обороте, равна $mi\,(4\pi-\omega-\omega')$, где m — мощность любого из полюсов, а i — сила тока.

487. Попытаемся теперь составить себе представление о состоянии магнитного поля вблизи линейного электрического контура. Пусть для каждой точки пространства найдено значение телесного угла ω, опирающегося на контур, и построены поверхности постоянных значений ω. Они будут эквипотенциальными. Каждая из таких поверхностей ограничена контуром, и любые две поверхности ω_1 и ω_2 встречаются на контуре под углом $(\omega_1-\omega_2)/2$.

На рис. XVIII в конце этого тома представлено сечение эквипотенциальных поверхностей, создаваемых кольцевым током. Маленький круг представляет сечение проводящего провода, а горизонтальная линия внизу рисунка является перпендикуляром к плоскости кольцевого тока, проходящим через его центр. Эквипотенциальные поверхности (24 из них изображены для последовательных значений ω с интервалом $\pi/6$) являются поверхностями вращения, имеющими эту линию в качестве их общей оси. Они, очевидно, представляют собой вытянутые фигуры, уплощенные в направлении оси. На линии контура они встречаются друг с другом под углом в 15 градусов.

Сила, действующая на магнитный полюс, помещенный в любой точке эквипотенциальной поверхности, перпендикулярна к этой поверхности и изменяется обратно пропорционально расстоянию между последовательными поверхностями. Замкнутые кривые, окружающие сечение провода на рис. XVIII, являются линиями силы. Они воспроизведены из работы сэра У. Томсона «Вихревое движение» [2]; см. также п. 702.

Действие электрического контура на произвольную магнитную систему

488. Теперь мы в состоянии, исходя из теории магнитных оболочек, вычислить действие электрического контура на произвольную магнитную систему, находящуюся в его окрестности. Действительно, если построить магнитную оболочку, мощность которой численно равна силе тока, а край по своему положению совпадает с контуром, причем построить так, чтобы сама оболочка нигде не пересекала магнитной системы, то действие этой оболочки на магнитную систему будет равносильно действию электрического тока.

Реакция магнитной системы на электрический контур

489. Отсюда, применяя принцип, что действие и противодействие (реакция) равны и противоположны, мы заключаем, что механическое действие магнитной системы на электрический контур равносильно действию на магнитную оболочку, имеющей этот контур в качестве своей границы.

[2] *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXV, p. 217 (1869).

Потенциальная энергия магнитной оболочки мощности φ, помещенной в поле магнитной силы с потенциалом V, согласно п. 410, равна

$$\varphi \iint \left(l \frac{dV}{dX} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz} \right) dS,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали, проведенной с положительной стороны элемента оболочки dS; интегрирование распространяется на всю поверхность оболочки.

Теперь поверхностный интеграл

$$N = \iint (la + mb + nc)\, dS,$$

в котором a, b, c — составляющие магнитной индукции, представляет собой величину потока магнитной индукции через оболочку, или на языке Фарадея *число* линий магнитной индукции (подсчитанное алгебраически), проходящих через оболочку от отрицательной стороны к положительной; при этом линии, проходящие сквозь оболочку в противоположном направлении, считаются отрицательными.

Помня, что оболочка не принадлежит магнитной системе, обусловливающей потенциал V, и потому магнитная сила равна магнитной индукции, мы имеем

$$a = -(dV/dx), \quad b = -(dV/dy), \quad c = -(dV/dz),$$

и для значения M можно написать $M = -\varphi N$.

Если δx_1 представляет собой какое-нибудь смещение оболочки, а X_1 — действующую на нее и способствующую этому смещению силу, то согласно принципу сохранения энергии

$$X_1 \delta x_1 + \delta M = 0, \quad \text{или} \quad X_1 = \varphi (dN/dx_1).$$

Мы определили сейчас характер силы, соответствующей какому-либо заданному смещению оболочки: эта сила либо способствует смещению, либо противодействует ему в зависимости от того, увеличивает или уменьшает она число линий индукции N, проходящих через оболочку.

То же самое справедливо и для эквивалентного электрического контура. Любому смещению контура будет оказано содействие или сопротивление в зависимости от того, увеличивает или уменьшает это смещение число линий индукции, проходящих сквозь контур в положительном направлении.

Мы должны помнить, что положительным направлением линии магнитной индукции является то направление, по которому вдоль линии стремится двигаться полюс магнита, указывающий на север, и что линия индукции проходит сквозь контур в положительном направлении тогда, когда ее направление относится к направлению тока стекловидного электричества в контуре так же, как продольное движение правого винта относится к его вращательному движению (см. п. 23).

490. Очевидно, что сила, соответствующая произвольному смещению контура как целого, может быть сразу выведена из теории магнитной оболочки. Но это еще не все. Если какой-либо участок контура является гибким и способным смещаться независимо от остальных, то путем разрезания поверхности оболочки на достаточное количество частей, связанных между собой гибкими соединениями, мы

можем сделать также и край оболочки способным к такого же рода смещению. Отсюда мы заключаем, что если путем смещения какого-либо участка контура в заданном направлении число линий индукции, проходящих сквозь контур, может быть увеличено, то действующая на контур электромагнитная сила будет способствовать этому смещению.

Поэтому на любой участок контура действует сила, заставляющая его двигаться поперек линий магнитной индукции так, чтобы вобрать в обхват контура как можно большее количество этих линий; работа, совершенная силой за время этого смещения, численно равна количеству добавленных линий индукции, умноженному на силу тока.

Пусть элемент ds контура, по которому протекает ток силы i, перемещен параллельно самому себе на расстояние δx; при этом движении он заметет площадь в виде параллелограмма, стороны которого параллельны и равны соответственно ds, δx.

Если обозначить магнитную индукцию через $\mathfrak{B}$ и считать, что ее направление составляет угол ε с нормалью к параллелограмму, то величина прироста N, соответствующего смещению, находится путем умножения площади параллелограмма на $\mathfrak{B}\cos\varepsilon$. Результат этой операции представляется геометрически объемом параллелепипеда, ребра которого по величине и направлению соответствуют δx, ds и $\mathfrak{B}$.

Объем должен считаться положительным, если какая-нибудь стрелка, направляемая последовательно в этих трех направлениях, будет перемещаться вокруг диагонали параллелепипеда в направлении движения стрелок часов. Объем этого параллелепипеда равен $X\delta x$.

Если ϑ есть угол между ds и $\mathfrak{B}$, то площадь параллелограмма со сторонами ds и $\mathfrak{B}$ равна $ds\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta$. Пусть η есть угол, образуемый смещением δx с нормалью к этому параллелограмму, тогда объем параллелепипеда равен

$$ds\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta\cdot\delta x\cos\eta = \delta N.$$

Теперь

$$X\delta x = i\delta N = ids\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta\,\delta x\cos\eta$$

и

$$X = ids\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta\cos\eta.$$

Это есть действующая на ds сила, спроектированная на направление δx.

Таким образом, направление этой силы перпендикулярно к параллелограмму, а ее величина равна $i\cdot ds\cdot\mathfrak{B}\sin\vartheta$.

Это есть площадь параллелограмма, стороны которого и по величине, и по направлению соответствуют ids и $\mathfrak{B}$. Следовательно, действующая на ds сила по своей величине представлена площадью этого параллелограмма, а по своему направлению — нормалью к его плоскости, проведенной в направлении поступательного движения винта с правой нарезкой, рукоятка которого поворачивается от направления тока ids к направлению магнитной индукции $\mathfrak{B}$.

Мы можем выразить и направление, и величину этой силы на языке кватернионов, сказав, что это есть векторная часть результата умножения вектора элемента тока ids на вектор магнитной индукции $\mathfrak{B}$ [рис. 22].

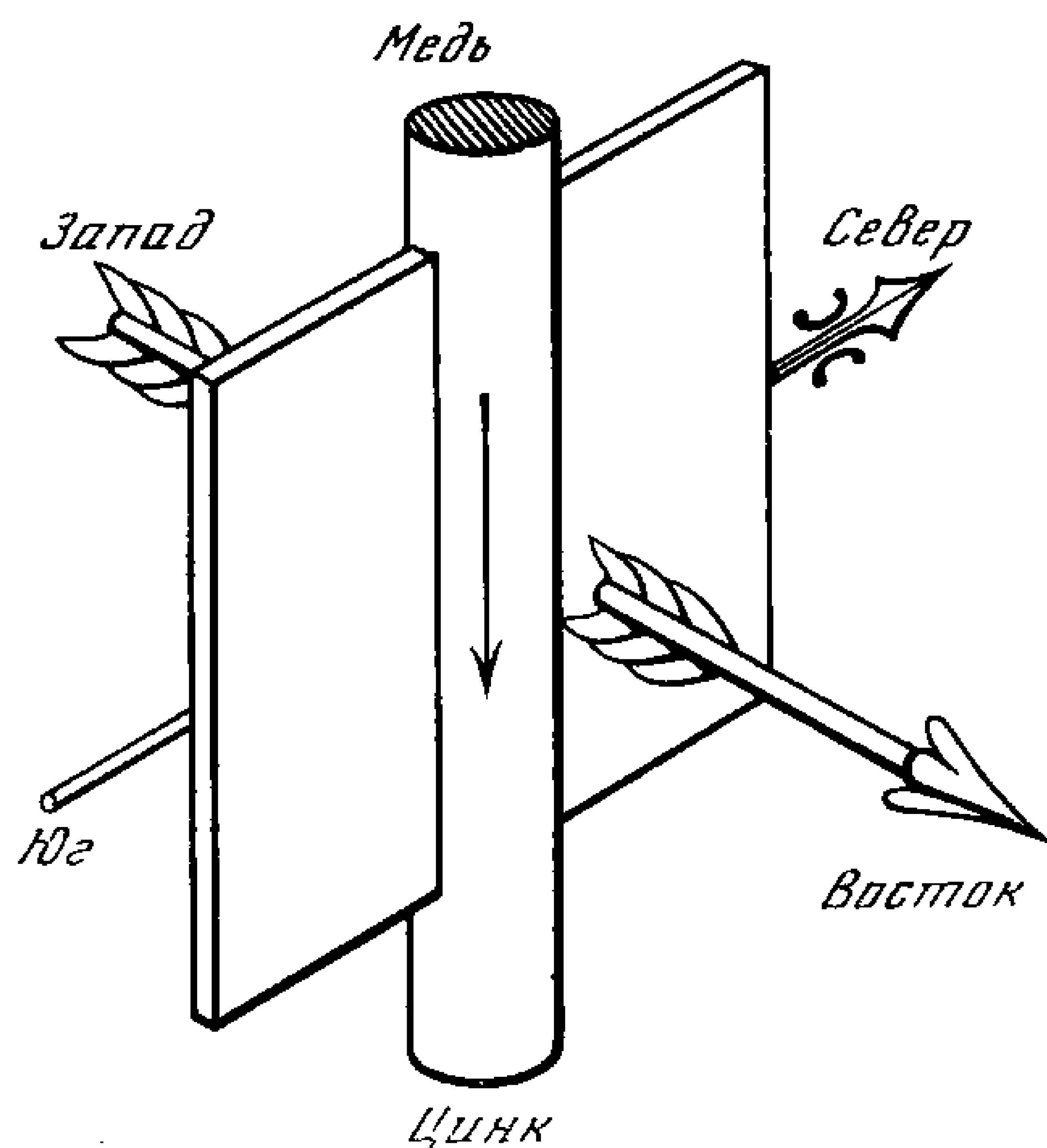


Рис. 22

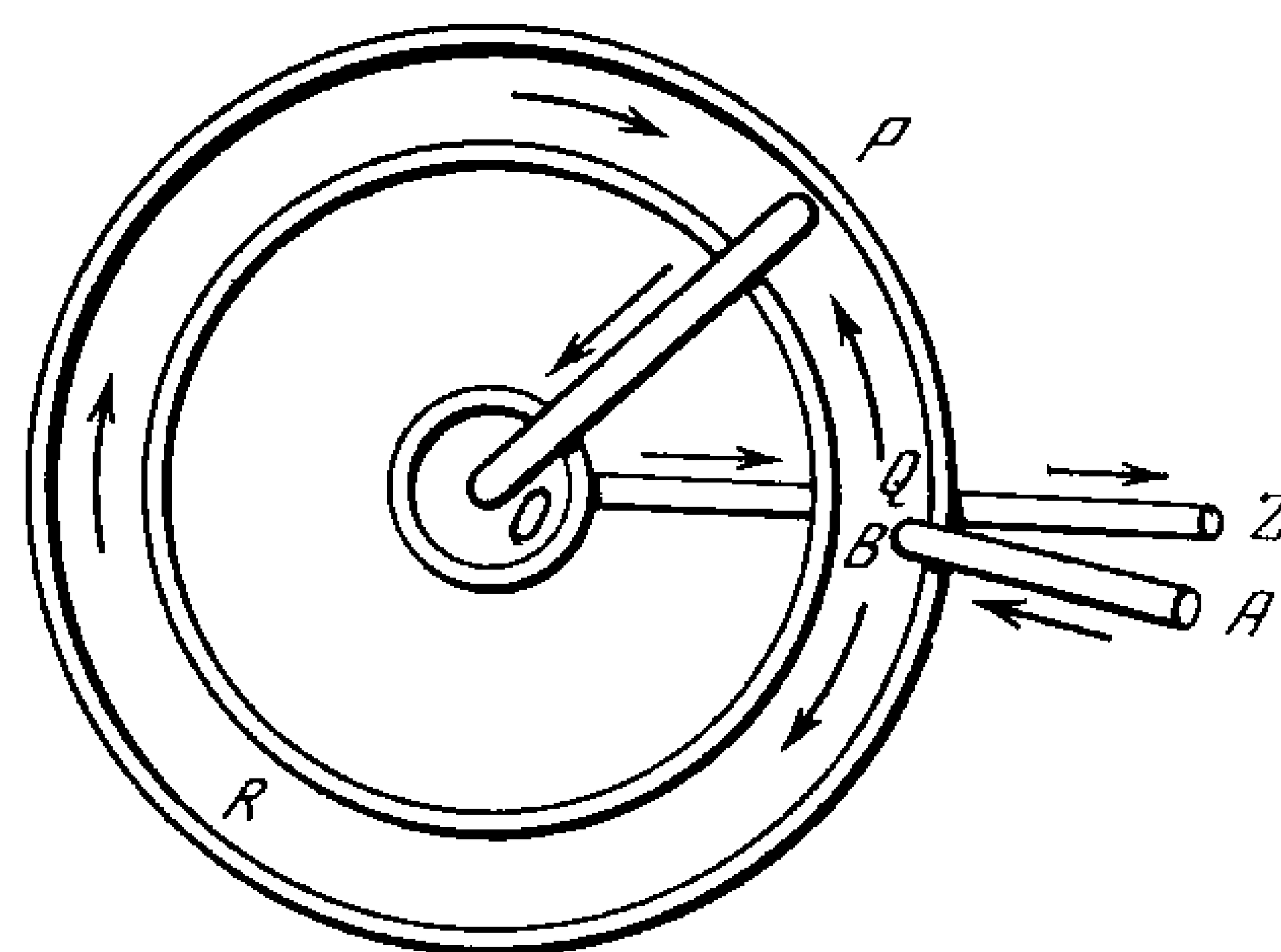


Рис. 23

491. Таким образом, мы полностью определили силу, действующую на любой участок электрического контура, помещенного в магнитное поле. Если контур двигается произвольным способом, но так, что, перебрав различные формы и положения, он возвращается в исходное место, а сила тока за время движения сохраняется постоянной, то общее количество работы, совершаемой электромагнитными силами, будет равно нулю. Так как это справедливо для любого цикла движения контура, то отсюда следует, что при помощи электромагнитных сил невозможно, преодолевая сопротивление трения и т. п., поддерживать непрерывное вращательное движение какой-либо части линейного контура с постоянной силой тока.

Непрерывное вращение, однако, может быть получено при условии, что электрический ток где-то на своем пути переходит от одного проводника к другому, скользящему или ползущему по первому проводнику.

Когда в контуре имеется скользящий контакт между проводником и гладкой поверхностью твердого или жидкого тела, то такую систему уже нельзя рассматривать как одиночный линейный контур с постоянной силой тока, ее следует считать системой, состоящей из двух или большего числа контуров с изменяющейся силой тока, распределенного по контурам таким образом, что в тех контурах, для которых N растет, токи текут в положительном направлении, а в тех, где N уменьшается,— в отрицательном.

Так, в устройстве, представленном на рис. 23, OP является подвижным проводником, один конец которого покоится в чаше со ртутью O, а другой погружен в концентричный относительно O кольцевой желоб со ртутью.

Ток i входит по AB и разделяется в кольцевом желобе на две части, одна из которых, x, течет по дуге BQP, а другая y — по дуге BRP. Эти токи, соединяясь в P, текут вдоль подвижного проводника PO и электрода OZ к цинковому полюсу батареи. Сила тока в PO и OZ равна $x+y$ или i. Здесь мы имеем два контура: контур $ABQPOZ$, в котором сила тока равна x и ток течет в положительном направле-

нии, а также контур $ABRPOZ$, в котором сила тока равна y и ток течет в отрицательном направлении.

Пусть $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, направленная вверх — по нормали к плоскости круга.

За время, пока OP переместится на угол ϑ в направлении, обратном движению часовой стрелки, площадь первого контура возрастет на $OP^2 \cdot \vartheta/2$, а площадь второго контура на ту же самую величину уменьшится. Так как сила тока в первом контуре равна x, то работа, совершенная им, равна $x \cdot OP^2 \cdot \vartheta \cdot \mathfrak{B}/2$; и так как сила тока во втором контуре равна y, работа, совершенная им, равна $y \cdot OP^2 \cdot \vartheta \cdot \mathfrak{B}/2$. Поэтому полная работа будет такой:

$$\frac{1}{2}(x+y)\, OP^2 \cdot \vartheta\mathfrak{B}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} i \cdot OP^2 \cdot \vartheta\mathfrak{B}.$$

Эта работа определяется только силой тока в PO. Таким образом, если ток i поддерживается постоянным, то плечо OP будет непрерывно вращаться по кругу под действием постоянной силы, момент которой равен $i \cdot OP^2 \cdot \mathfrak{B}/2$. Если, как это имеет место в северных широтах, $\mathfrak{B}$ действует вниз, то при токе, текущем внутрь, вращение будет происходить в отрицательном направлении, т. е. в направлении $PQBR$.

492. Теперь мы в состоянии перейти от взаимного действия магнитов и токов к действию одного контура с током на другой, ибо мы знаем, что магнитные свойства электрического контура C_1 по отношению к произвольной магнитной системе M_2 совпадают с магнитными свойствами магнитной оболочки S_1, граница которой совмещена с данным контуром, а мощность численно равна силе электрического тока. Пусть магнитная система M_2 является магнитной оболочкой S_2, тогда взаимное действие между S_1 и S_2 будет равно взаимодействию между S_1 и контуром C_2, который совмещен с краем оболочки S_2 и сила тока в котором равна мощности S_2. Но это последнее действие равносильно взаимодействию между C_1 и C_2.

Следовательно, взаимодействие между двумя контурами C_1 и C_2 совпадает с взаимодействием между магнитными оболочками S_1 и S_2.

В п. 423 мы уже исследовали взаимодействие между двумя магнитными оболочками, края которых представляют собой замкнутые кривые s_1 и s_2.

Положим $M = \int\limits_0^{s_2}\int\limits_0^{s_1} \frac{\cos \varepsilon}{r}\, ds_1\, ds_2$, где ε — угол между направлением элементов ds_1 и ds_2, r — расстояние между ними, а интегрирование один раз проводится по s_1, а второй раз — по s_2; будем называть эту величину M потенциалом двух замкнутых кривых s_1 и s_2. Тогда потенциальная энергия, обусловленная взаимодействием двух магнитных оболочек, ограниченных двумя контурами и имеющих мощности i_1 и i_2, окажется равной $-i_1 i_2 M$, а сила X, способствующая произвольному смещению δx, равна $i_1 i_2 (dM/dx)$.

Из этого результата может быть развита полная теория, описывающая силы, действующие на произвольный участок одного электрического контура со стороны другого электрического контура.

493. Метод, которому мы следовали в этой главе, принадлежит Фарадею. Вместо того чтобы начать (как мы, следуя Амперу, и будем делать в следующей главе)

с прямого воздействия участка одного контура на участок другого контура, мы показали, во-первых, что контур производит то же действие на магнит, что и магнитная оболочка, или, другими словами, мы определили характер магнитного поля, создаваемого контуром. Во-вторых, мы показали, что контур, помещенный в произвольное магнитное поле, испытывает действие той же силы, что и магнитная оболочка. Таким образом, мы определили силу, действующую на контур, помещенный в любое магнитное поле. Наконец, предположив, что магнитное поле обусловлено другим электрическим контуром, мы определили действие одного электрического контура на другой: причем и на весь контур в целом, и на любую его часть.

494. Применим этот метод к случаю бесконечно протяженного прямого тока, действующего на некоторый участок параллельного ему прямого проводника.

Предположим, что ток i в первом проводнике течет вертикально вниз. В этом случае конец магнита, указывающий на север, будет смотреть на правую руку наблюдателя, стоящего ногами вниз и смотрящего на этот магнит со стороны оси тока.

Поэтому линии магнитной индукции являются горизонтальными окружностями с центрами на оси тока, а положительный обход вдоль них определяется направлением север—восток—юг—запад.

Пусть теперь к западу от первого тока помещен другой вертикальный ток, текущий вниз. Линии магнитной индукции, обусловленной первым током, будут в этом случае направлены к северу. Направление силы, действующей на второй ток, должно определиться путем поворота рукоятки правого винта из надира, куда направлен ток, к северу, куда направлена магнитная индукция. Тогда винт будет перемещаться к востоку, т. е. действующая на второй ток сила окажется направленной в сторону первого тока, или, вообще говоря, поскольку это явление зависит лишь от относительного расположения токов, два параллельных текущих в одном направлении тока притягивают друг друга.

Тем же самым путем мы можем показать, что два параллельных текущих в противоположных направлениях тока отталкивают друг друга.

495. Интенсивность магнитной индукции на расстоянии r от прямого тока силы i, как мы уже показали в п. 479, равна $2i/r$.

Следовательно, отрезок второго проводника, параллельный первому и несущий ток i' в том же самом направлении, будет притягиваться к первому проводнику с силой $F=2ii'a/r$, где a — длина рассматриваемого отрезка, r — расстояние от него до первого проводника.

Так как отношение a к r является численной величиной, независящей от абсолютных значений любой из этих линейных величин, произведение двух токов, измеренное в электромагнитной системе, должно иметь размерность силы; следовательно, размерность единицы тока такова: $[i]=[F^{1/2}]=[M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}]$.

496. Другой метод определения направления силы, действующей на контур с током, состоит в рассмотрении отношения между магнитным действием тока и действием других токов и магнитов.

Если по одну сторону провода, несущего ток, магнитное действие, обусловленное этим током, направлено в том же (или почти в том же) самом направлении, что и магнитное действие другого тока, тогда по другую сторону от провода эти силы будут противоположно (или почти противоположно) направленными, и сила,

действующая на провод, окажется направленной от той стороны, где силы усиливают друг друга, к той стороне, где они противодействуют друг другу.

Таким образом, если текущий вниз ток помещен в поле магнитной силы, направленной к северу, его магнитное действие будет направлено к северу на западной стороне и к югу на восточной стороне. Поэтому силы увеличивают друг друга на западной стороне и уменьшают друг друга на восточной стороне, т. е. контур с током будет испытывать действие силы с запада на восток (см. рис. 22).

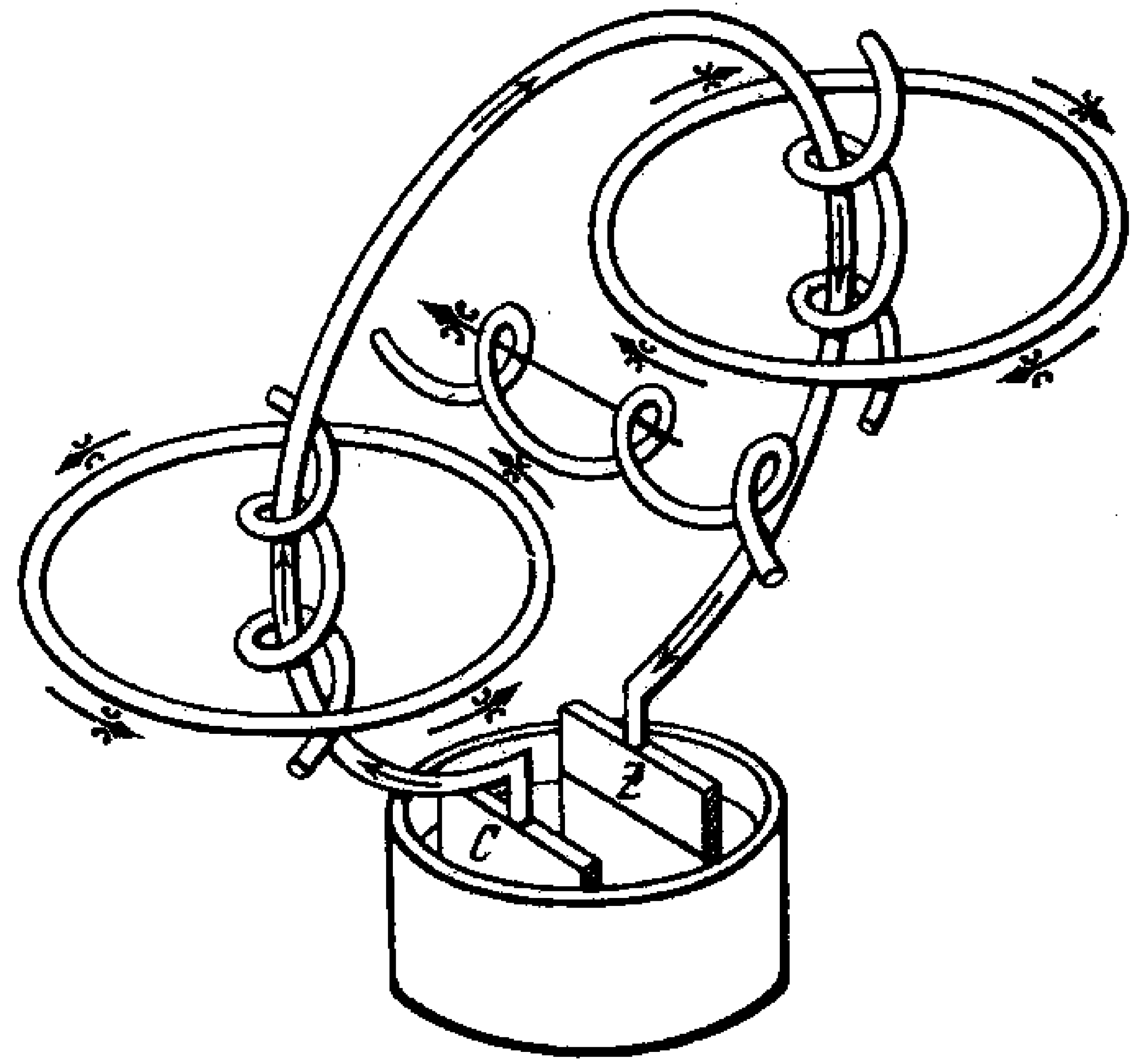


Рис. 24. Связь между электрическим током и линиями магнитной индукции определяется правым винтом

На рис. XVII в конце этого тома маленький кружок представляет сечение провода, несущего ток, текущий вниз, и помещенного в однородное поле магнитной силы, действующей в направлении левой стороны рисунка. Магнитная сила под проводом больше, чем над проводом. Следовательно, на провод будет действовать сила, заставляющая его двигаться снизу вверх.

497. Этот принцип мы можем применить и тогда, когда два тока расположены в одной плоскости, но не параллельны. Пусть один из проводников представляет собой бесконечный прямой провод в плоскости бумаги, которая предполагается горизонтальной. На правой стороне тока магнитная сила действует вниз, а на левой — вверх. То же самое верно и для магнитной силы, обусловленной любым коротким отрезком второго тока, расположенного в этой же плоскости. Если второй ток находится справа от первого, магнитные силы будут увеличивать друг друга справа от второго тока и уменьшать друг друга слева от второго тока. Поэтому второй ток будет испытывать действие силы, движущей его справа налево. Величина этой силы зависит только от положения второго тока, но не от его направления. Если же второй ток находится слева от первого, на него будет действовать сила, вынуждающая его двигаться слева направо.

Следовательно, если второй ток имеет то же самое направление, что и первый, он притягивается к первому; если же он течет в противоположном направлении, он отталкивается от первого тока. Если второй ток течет под прямым углом к первому току, удаляясь от него, то на второй ток действует сила в направлении протекания первого тока; если же второй ток течет, приближаясь к первому току, то сила действует в направлении, противоположном тому, в котором течет первый ток [рис. 24].

При рассмотрении взаимного действия двух токов нет необходимости удерживать в памяти те связи между электричеством и магнетизмом, которые мы пытались иллюстрировать с помощью правого винта. Даже если бы мы забыли их, то все равно пришли бы к правильным результатам при условии, что неизменно придерживались одной из двух возможных форм этой связи.

498. Сведем теперь воедино все магнитные явления, связанные с электрическим контуром в той мере, в какой мы их изучили.

Мы можем представить себе электрический контур состоящим из вольтовой батареи и провода, соединяющего ее клеммы, или из термоэлектрического устройства, или из заряженной лейденской банки с проводом, соединяющим ее положительную и отрицательную обкладки, или из любого иного устройства, предназначенного для создания электрического тока вдоль какого-то определенного пути.

Ток является причиной возникновения магнитных явлений, происходящих вблизи него.

Проведем какую-либо замкнутую кривую и возьмем вдоль всей этой кривой линейный интеграл от магнитной силы. Если замкнутая кривая не охватывает контур, то линейный интеграл обратится в нуль, если же замкнутая кривая охватывает контур, так что ток протекает сквозь эту кривую, то линейный интеграл будет равен $4\pi i$ и окажется положительным, когда направление интегрирования вдоль замкнутой кривой совпадает с направлением движения часовых стрелок в предположении, что наблюдатель смотрит на них, проходя сквозь замкнутую кривую в том же направлении, в котором течет ток.

Но для наблюдателя, который проходит сквозь электрический контур, двигаясь по замкнутой кривой в направлении интегрирования, ток также будет казаться текущим по направлению движения часовых стрелок. Мы можем выразить все это иначе, сказав, что соотношение между направлениями двух замкнутых кривых может быть представлено с помощью одного правостороннего винта, вставленного в электрический контур, и другого правостороннего винта, вставленного в замкнутую кривую. Если направление нарезки любого из винтов при движении вдоль нее совпадает с положительным направлением движения другого винта, то линейный интеграл положителен, в противоположном случае линейный интеграл отрицателен.

499. *Замечание*. Линейный интеграл $4\pi i$ зависит только от величины тока и ни от чего другого. Он не зависит от природы проводника, по которому проходит ток, будь то, например, металл или электролит или неидеальный проводник. У нас есть основания считать, что даже при отсутствии нужных токов проводимости, а только лишь при изменении электрического смещения (как это имеет место внутри стекла Лейденской банки при ее заряде или разряде) магнитный эффект, обусловленный электрическим движением, получается точно таким же.

Далее, величина линейного интеграла $4\pi i$ не зависит от природы среды, внутри которой проведена замкнутая кривая, и будет одной и той же и когда вся замкнутая кривая находится в воздухе, и когда проходит через магнит, или через мягкое железо, или через любое другое парамагнитное или диамагнитное вещество.

500. Когда контур помещен в магнитное поле, взаимное действие между током и другими элементами зависит от поверхностного интеграла от магнитной индукции, взятого по любой поверхности, ограниченной этим контуром. Если этот поверхностный интеграл может быть увеличен путем некоторого заданного перемещения всего контура или части его, то будет существовать механическая сила, стремящаяся заданным образом двигать этот проводник или какую-то его часть.

Движение проводника, приводящее к увеличению поверхностного интеграла, есть движение такого типа, при котором проводник перемещается перпендикулярно направлению тока и поперек линий индукции [рис. 25].

Если нарисовать параллелограмм, стороны которого параллельны и противо-

положны соответственно силе тока и магнитной индукции в одной и той же точке, то сила, действующая на единицу длины проводника, численно окажется равной площади этого параллелограмма и направленной перпендикулярно к этой плоскости в ту сторону, в какую возникало бы перемещение правого винта при вращательном движении его рукоятки от направления тока к направлению магнитной индукции.

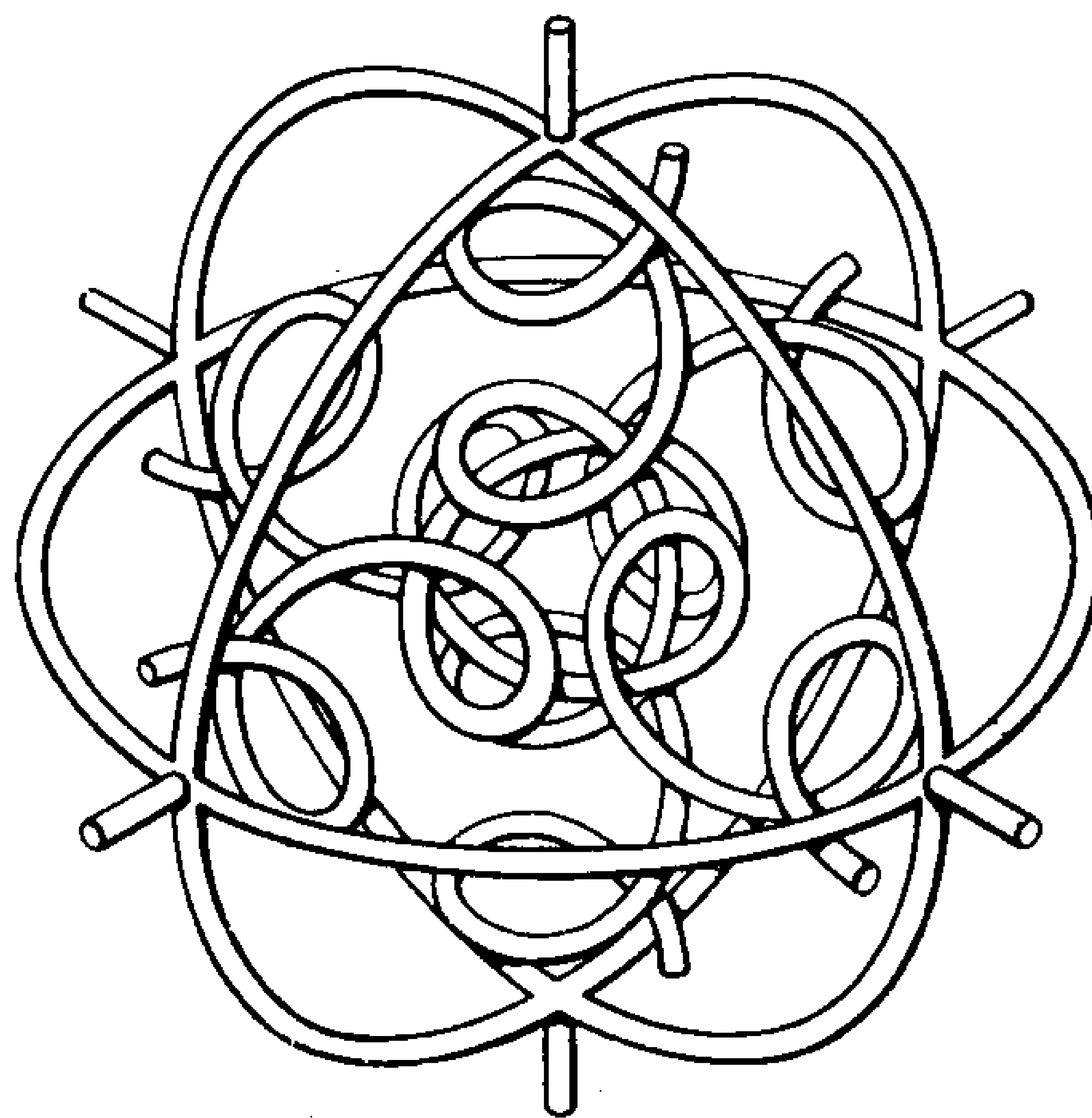


Рис. 25. Соотношения между положительными направлениями движения и вращением определяется тремя правыми винтами

Отсюда мы получаем новое определение линии магнитной индукции. Это линия, всегда перпендикулярная силе, действующей на проводник.

Ее можно также определить как такую линию, при передаче электрического тока вдоль которой проводник, несущий этот ток, не испытывал бы действия никакой силы.

501. Следует четко помнить, что механическая сила, стремящаяся перемещать проводник с током поперек линий магнитной индукции, действует не на электрический ток, а на токонесущий проводник. Если этот проводник представляет собой вращающийся диск или жидкость, он будет двигаться, подчиняясь действию этой силы, причем это движение может сопровождаться, а может и не сопровождаться изменением положения электрического тока, который несет этот проводник.

Единственной силой, воздействующей на электрические токи, является сила электродвижущая, и мы обязаны отличать ее от механической силы, которая и составляла предмет рассмотрения в настоящей главе.

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЯ АМПЕРА ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

502. В предыдущей главе мы рассмотрели природу магнитного поля, создаваемого электрическим током, а также механическое действие на помещенный в магнитное поле проводник с током. После этого мы перешли к рассмотрению действия одного электрического контура на другой, определив действие второго контура на первый как обусловленное магнитным полем, создаваемым вторым контуром. Но такое действие одного контура на другой было первоначально исследовано Ампером прямым путем почти сразу же после опубликования откры-

тия Эрстеда. Поэтому сначала мы изложим основные положения метода Ампера, а метод, принятый в этом трактате, резюмируем в следующей главе.

Идеи, которые руководили Ампером, принадлежат к системе взглядов, допускающих прямое действие на расстоянии. Мы увидим, что основанное на этих взглядах замечательное направление размышлений и исследований было продолжено Гауссом, Вебером, Ф. Е. Нейманом, Риманом, Бетти, К. Нейманом, Лоренцом и другими и оно привело к выдающимся результатам, состоящим как в открытии новых фактов, так и в построении теории электричества (см. п. 846—866).

Идеи, которым я попытался следовать, это идеи действия через среду — от одной части к другой, близлежащей, примыкающей к ней. Такой подход часто применялся Фарадеем; его развитие в математической форме, а также сравнение результатов с известными фактами было моей целью в нескольких опубликованных работах. Сопоставление с философской точки зрения результатов этих двух методов, столь противоположных в своих исходных принципах, должно давать ценный материал для изучения условий построения научных теорий.

503. Теория Ампера взаимодействия электрических токов базируется на четырех экспериментальных фактах и одном предположении.

Все основополагающие опыты Ампера являют собой примеры того, что было названо нулевым методом сравнения сил (см. п. 214). Вместо того чтобы измерять силы либо динамически — путем сообщения движения некоторому телу, либо статически — путем уравновешивания весом другого тела или упругостью нити, в нулевом методе две силы одинакового происхождения одновременно воздействуют на тело, уже и до того пребывающее в равновесии, и если при этом не возникает никаких эффектов, то это означает, что эти силы уравновешивают друг друга.

Этот метод особо ценен при сравнении эффектов, производимых электрическим током, когда он проходит по контурам различных конфигураций. Соединяя все проводники в один непрерывный ряд, мы обеспечиваем постоянство силы тока во всех точках его пути, и, поскольку ток всюду на своем пути начинается почти одновременно, мы можем доказать, что силы, обусловленные его действием на подвешенное тело, находятся в равновесии в том случае, если тело совершенно не реагирует ни на возникновение, ни на прекращение тока.

504. Весы Ампера состоят из легкой рамки, способной вращаться вокруг вертикальной оси и несущей провод, который образует два контура одинаковой площади; контуры лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях, а токи в них текут в противоположных направлениях. Цель этого устройства состоит в том, чтобы избавиться от влияния земного магнетизма на проводящую проволоку. Когда электрический контур может свободно перемещаться, он стремится расположиться так, чтобы охватить собою возможно бо́льшее число линий индукции. Если эти линии обусловлены земным магнетизмом, то для контура в вертикальной плоскости это будет положение, при котором плоскость контура совпадает с плоскостью, проходящей через магнитный восток и магнитный запад при направлении тока, противоположном кажущемуся направлению хода Солнца.

Жестко связывая расположенные в параллельных плоскостях контуры равной площади, в которых текут одинаковые, но противоположно направленные токи, мы образуем комбинацию, не подверженную действию земного магнетизма и пото-

му называемую астатической (см. рис. 26). Она испытывает, однако, действие сил, возникающих от токов или магнитов, расположенных столь близко к ней, что их воздействие на оба эти контура оказывается различным.

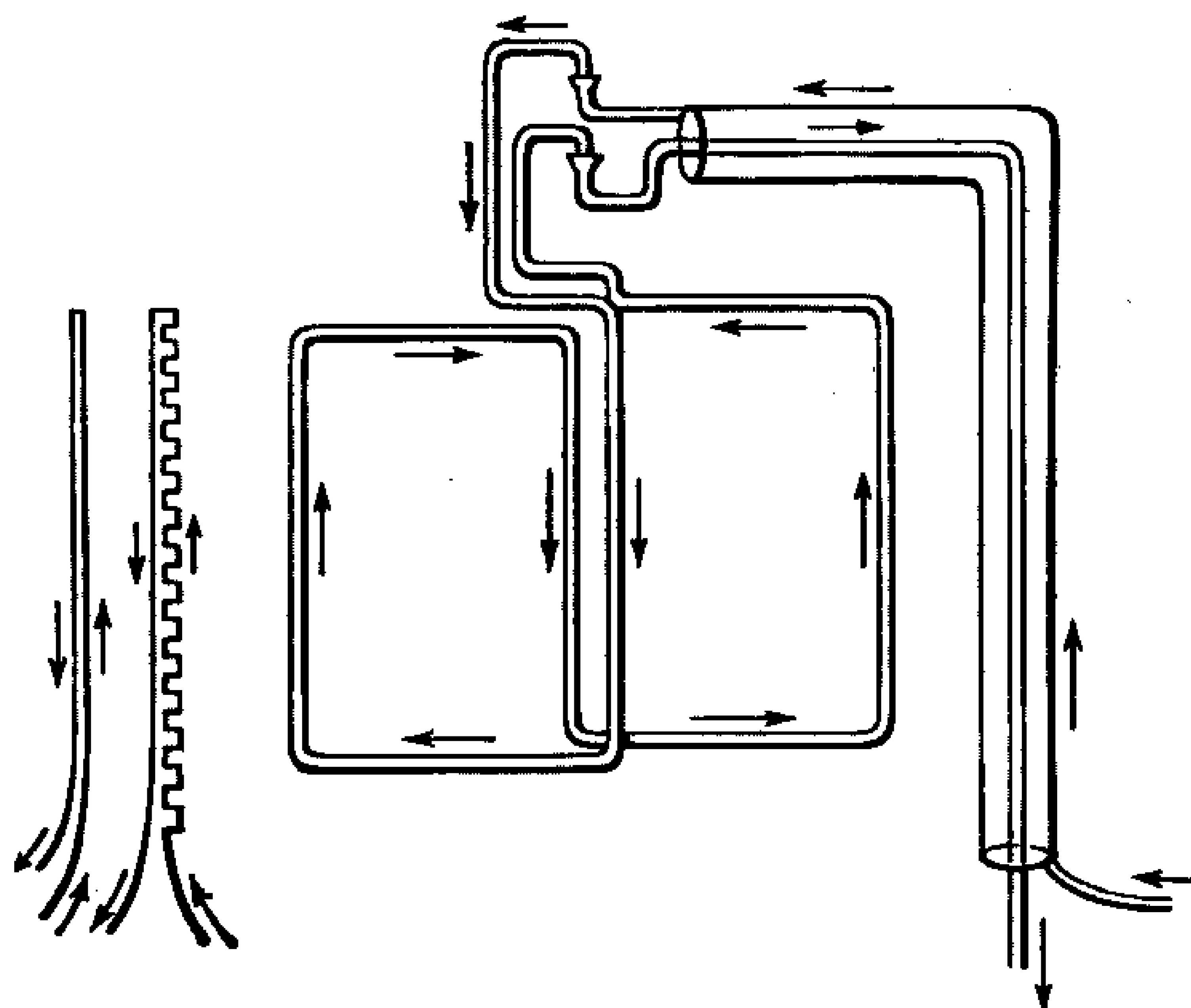


Рис. 26

505. Первый опыт Ампера относится к действию двух равных, но противоположно направленных токов, близко прилегающих друг к другу. Покрытый изоляционным материалом провод сдваивается и помещается поблизости от контуров астатических весов. Когда через провод и весы пропускается ток, равновесие весов остается невозмущенным, показывая тем самым, что два близких, равных и противоположно направленных тока нейтрализуют друг друга. Если вместо двух расположенных рядом проводов взять один провод, изолировать его, поместив в середину металлической трубки, и пропустить ток в одну сторону по проводу, а в другую — по трубке, то действие этого тока вне трубки уже совершенно точно, а не приблизительно будет равно нулю.

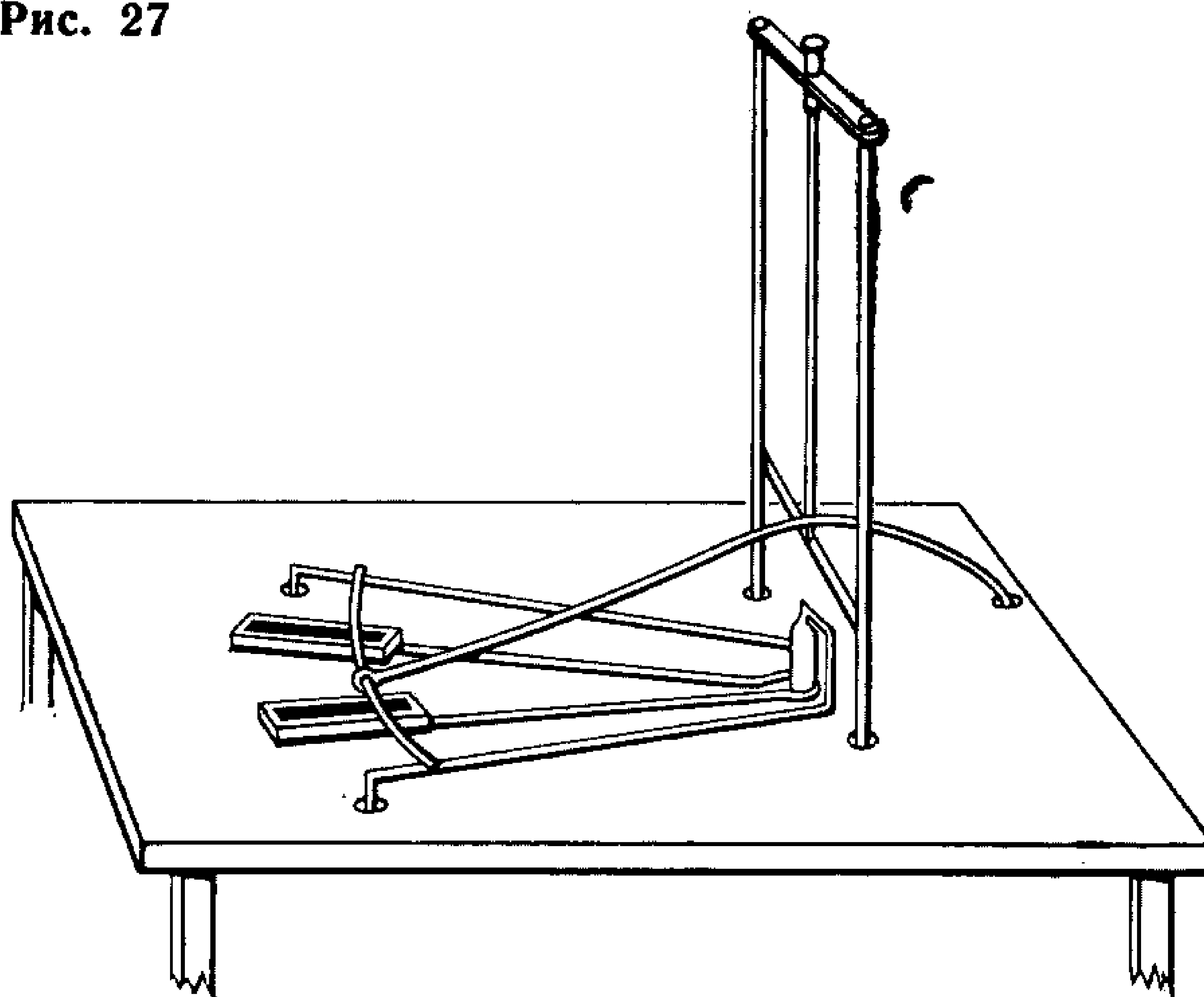
Этот принцип имеет огромное значение для конструирования электрических приборов, так как он позволяет осуществлять подвод и отвод тока к любому гальванометру или другому прибору без какого-либо электромагнитного эффекта, связанного с прохождением тока туда и обратно. На практике обычно бывает достаточно связать провода вместе, тщательно следя, чтобы они были совершенно изолированы друг от друга; однако там, где они должны проходить вблизи чувствительных элементов аппаратуры, лучше все же один из них выполнить в форме трубки, а другой — в виде протянутого внутри нее провода (см. п. 683).

506. Во втором опыте Ампера один из проводов многократно изогнут, образуя ряд небольших извилин, но так, что каждый участок его остается очень близким к прямому проводу. Оказывается, что ток, текущий в одну сторону по извилистому проводу, а обратно снова по прямому, не влияет на астатические весы. Это доказывает, что влияние тока, текущего по какой-нибудь искривленной части провода, эквивалентно влиянию такого же тока, текущего по прямой линии, соединяющей крайние точки искривления, при условии, что искривленная линия на каждом участке своего пути не сильно удалена от этой прямой. Следовательно, любой малый элемент контура эквивалентен элементам, состоящим из двух или многих элементов, и соотношение между составными элементами и результирующим элементом оказывается таким же, как и соотношение между компонентами и их векторной суммой в случае смещений или скоростей.

507. В третьем опыте астатические весы заменены проводником, способным перемещаться только вдоль своей длины; ток входит в проводник и покидает его в фиксированных точках пространства. Обнаружено, что никакой замкнутый контур, помещаемый поблизости, не в состоянии приводить этот проводник в движение [рис. 27].

Проводником в этом опыте служит провод в форме дуги окружности, подве-

Рис. 27



шенный на коромысло, способное вращаться вокруг вертикальной оси. Дуга горизонтальна, а ее центр совпадает с вертикальной осью. Два небольших корытца наполнены ртутью так, что выпуклая поверхность ртути возвышается над уровнем корытцев. Корытцы помещены под дугой окружности и подогнаны так, чтобы ртуть касалась проволоки, изготовленной из хорошо амальгированной меди.

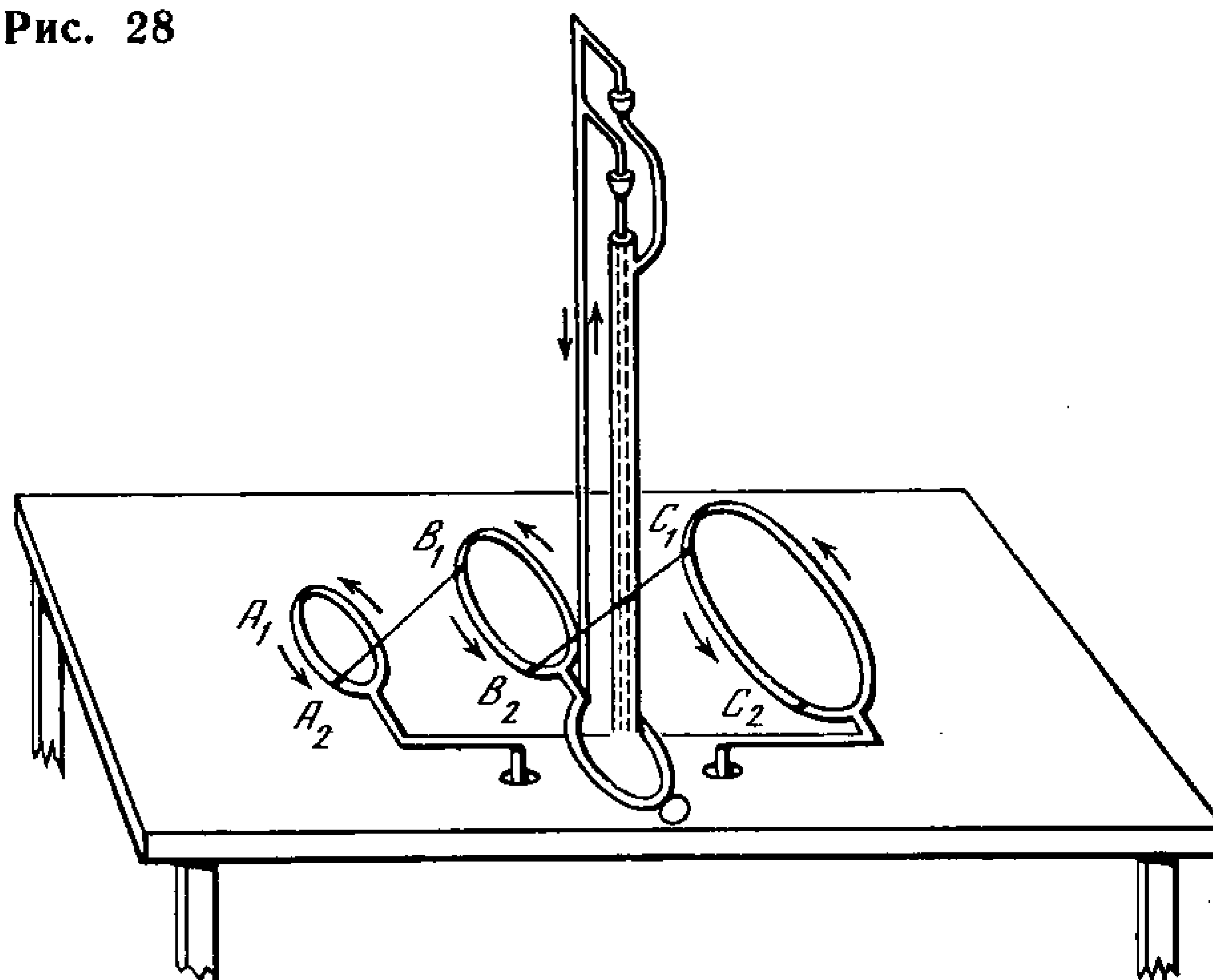
Ток направляется в одно из этих корытцев, проходит часть дуги окружности между корытцами и покидает ее через другое корытце. Таким образом, ток протекает по участку дуги окружности; дуга в то же время имеет возможность достаточно свободно перемещаться в направлении ее длины. К этому подвижному проводнику можно теперь приближать любые замкнутые контуры или магниты, не вызывая при этом ни малейших тенденций к его продольному перемещению.

508. В четвертом опыте с астатическими весами используются два контура, каждый из них подобен одному из контуров в самих весах, но один контур, C, обладает размерами в n раз большими, а другой, A,— в n раз меньшими. Они расположены на противоположных сторонах от контура весов, которые мы обозначим через B, и пропорционально удалены от него: расстояние от C до B в n раз превышает расстояние от B до A. Направление и сила тока в A и C одинаковы. Направление тока в B может быть либо таким же, либо противоположным. Как было найдено, в этих условиях B оказывается в равновесии под действием A и C, какие бы формы эти три контура ни принимали и на каких бы расстояниях при выполнении приведенных выше соотношений они ни находились.

Поскольку действия между полными контурами могут быть рассмотрены как обусловленные действиями между элементами контуров, мы можем использовать следующий метод установления закона этих действий.

Пусть A_1, B_1, C_1 на рис. 28 — соответствующие элементы трех контуров, A_2, B_2, C_2 — тоже соответствующие элементы, но в другой части этих контуров. Тогда расположение B_1 относительно A_2 подобно расположению C_1 относительно B_2, но расстояние и размеры C_1 и B_2 в n раз превышают расстояние и размеры B_1 и A_2 соответственно. Если закон для электромагнитного действия является

Рис. 28



функцией расстояния, то действие между B_1 и A_2, какими бы ни были его вид и качественный характер, может быть записано так: $F=B_1\cdot A_2 f\ (\overline{B_1A_2})ab$, а действие между C_1 и B_2: $F'=C_1\cdot B_2 f\ (\overline{C_1B_2})bc$, где a, b, c — силы токов в A, B, C. Но $nB_1=C_1$, $nA_2=B_2$, $n\overline{B_1A_2}=\overline{C_1B_2}$ и $a=c$. Отсюда

$$F'=n^2B_1A_2 f\ (n\overline{B_1A_2})ab,$$

и это, согласно опыту, равно F, так что мы имеем

$$n^2 f\ (n\overline{A_2B_1})=f\ (\overline{A_2B_1});$$

или *сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния.*

509. Имея в виду эти опыты, следует отметить, что каждый электрический ток образует замкнутый контур. Токи, использованные Ампером, создавались вольтовой батареей и, конечно, текли по замкнутым контурам. Можно было бы предположить, что в случае разряда проводника через искру мы могли бы иметь ток, образующий разомкнутый конечный отрезок, но в соответствии со взглядами этой книги даже этот пример относится к случаю замкнутого контура. Не осуществлено никаких опытов по взаимодействию незамкнутых контуров и, следовательно, не может быть высказано никаких опирающихся на чисто экспериментальные данные утверждений по поводу взаимодействия двух элементов контуров. Правда, мы можем сделать участок контура подвижным, чтобы установить воздействие на него со стороны других токов, но эти токи вместе с током на подвижном участке обязательно образуют замкнутые контуры, так что окончательным результатом опыта снова окажется действие одного или нескольких замкнутых токов либо на весь замкнутый ток, либо на часть его.

510. При анализе этих явлений, однако, мы можем рассматривать действие замкнутого контура на элемент этого же или какого-то другого контура как результирующую нескольких отдельных сил, зависящих от тех отдельных частей,

на которые первый контур может быть мысленно, для математических целей, разделен.

И поскольку это чисто математический анализ действия, он является совершенно законным независимо от того, как действуют силы в действительности,— раздельно или нет.

511. Мы начнем с рассмотрения чисто геометрических соотношений между двумя линиями в пространстве, представляющими контуры, а также между элементарными частями этих линий.

Пусть в пространстве имеется две кривых; на каждой из них берется какая-нибудь фиксированная точка, от которой в определенном направлении вдоль кри-

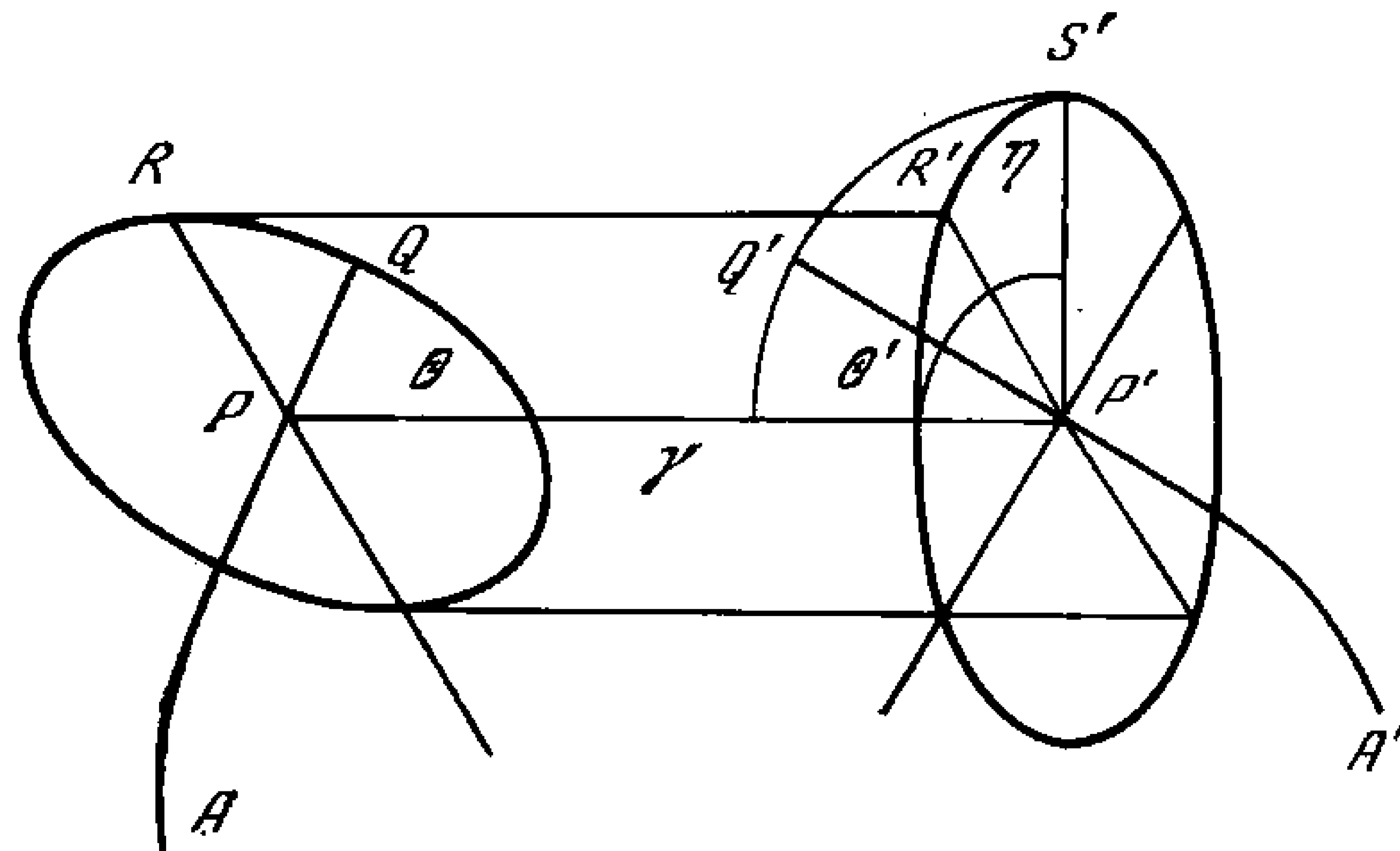


Рис. 29

вой измеряются дуги. Пусть этими точками будут A и A', а элементами этих двух кривых будут PQ и $P'Q'$ [рис. 29].

Пусть

$$\left.\begin{aligned} AP&=s, & A'P'&=s',\\ PQ&=ds, & P'Q'&=ds'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Обозначим расстояние PP' через r, угол $P'PQ$ — через ϑ, угол $PP'Q'$ — через ϑ', а угол между плоскостями этих углов — через η.

Относительное положение двух элементов полностью определяется расстоянием r между ними и тремя углами ϑ, ϑ' и η, поскольку, если эти величины заданы, то относительное положение элементов определено так же полно, как если бы они являлись частью твердого тела.

512. Если мы, используя прямоугольные координаты, сделаем x, y, z координатами точки P, x', y', z' — координатами точки P', а через l, m, n и l', m', n' обозначим соответственно направляющие косинусы PQ и $P'Q'$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds}&=l, & \frac{dy}{ds}&=m, & \frac{dz}{ds}&=n,\\ \frac{dx'}{ds'}&=l', & \frac{dy'}{ds'}&=m', & \frac{dz'}{ds'}&=n' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и

$$\left.\begin{aligned} l(x'-x)+m(y'-y)+n(z'-z)&=r\cos\vartheta,\\ l'(x'-x)+m'(y'-y)+n'(z'-z)&=-r\cos\vartheta',\\ ll'+mm'+nn'&=\cos\varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где ε — угол между направлениями самих элементов, а

$$\cos\varepsilon = -\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta. \tag{4}$$

Далее,

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2, \tag{5}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} r\frac{dr}{ds} &= -(x'-x)\frac{dx}{ds} - (y'-y)\frac{dy}{ds} - (z'-z)\frac{dz}{ds},\\ &= -r\cos\vartheta. \end{aligned}\right.$$

Аналогично

$$\left.\begin{aligned} r\frac{dr}{ds'} &= (x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'},\\ &= -r\cos\vartheta' \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и, дифференцируя $r\,(dr/ds)$ по s',

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} &= -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},\\ &= -(ll' + mm' + nn'),\\ &= -\cos\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы можем поэтому выразить три угла ϑ, ϑ' и η и вспомогательный угол ε через производные от r по s и s' следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= -\frac{dr}{ds},\\ \cos\vartheta' &= -\frac{dr}{ds'},\\ \cos\varepsilon &= -r\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},\\ \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta &= -r\frac{d^2r}{ds\,ds'}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

513. Рассмотрим далее, как факт воздействия друг на друга элементов PQ и $P'Q'$ может быть представлен математически; причем сначала мы не будем



Рис. 30

предполагать, что взаимодействие с необходимостью происходит вдоль линии, соединяющей эти элементы.

Мы видели, что каждый элемент можно считать разложенным на другие элементы при условии, что эти составляющие, если их скомбинировать по правилу сложения векторов, дадут в качестве своей результирующей исходный элемент.

Мы будем поэтому рассматривать элемент ds разложенным на $\cos\vartheta\,ds = \alpha$ в направлении r и на $\sin\vartheta\,ds = \beta$ — в направлении, перпендикулярном к r в плоскости $P'PQ$ [рис. 30].

Будем также рассматривать элемент ds' разложенным на $\cos\vartheta'\, ds'=\alpha'$ в направлении, обратном r, на $\sin\vartheta' \cos\eta\, ds'=\beta$ — в направлении, параллельном тому, в котором измерен β, и на $\sin\vartheta' \sin\eta\, ds'=\gamma'$ — в направлении, перпендикулярном к α' и β'.

Рассмотрим действие между составляющими α и β, с одной стороны, и между α', β', γ' — с другой.

(1). α и α' лежат на одной прямой. Сила между ними должна быть поэтому тоже направлена вдоль этой прямой. Будем считать ее притягивающей, $=A\,\alpha\alpha' ii'$, где A есть функция r, а i, i' — интенсивности токов соответственно в ds и ds'. Это выражение удовлетворяет условию изменения знака перед i и перед i'.

(2). β и β' параллельны друг другу и перпендикулярны линии, их соединяющей. Действие между ними записывается так: $B\beta\beta' ii'$.

Эта сила действует, очевидно, вдоль линии, соединяющей β и β', ибо она должна быть в плоскости, в которой лежат эти составляющие, и если бы мы измерили β и β' в обратном направлении, то это выражение осталось бы неизменным, значит, если оно представляет силу, то такую, у которой нет составляющих в направлении β и которая, следовательно, должна быть направлена по r. Будем считать, что это выражение, когда оно положительно, соответствует притяжению.

(3). β и γ' перпендикулярны друг к другу, а также к линии, их соединяющей. Единственным возможным действием между расположенными так элементами является пара сил с осью, параллельной r. Но мы сейчас заняты самими силами и поэтому оставим это в стороне.

(4). Действие α и β' (если они вообще действуют друг на друга) должно выражаться так: $C\alpha\beta' ii'$.

Знак этого выражения обращается на противоположный при обращении направления, в котором мы измеряем β'. Поэтому оно должно представлять собой либо силу в направлении β', либо момент пары сил в плоскости α и β'. Поскольку мы не изучаем пары, то будем принимать его за силу, действующую на α в направлении β'.

Существует, конечно, и равная ей сила, действующая на β' в противоположном направлении.

По той же причине мы имеем силу $C\alpha\gamma' ii'$, действующую на α в направлении γ', и силу $C\beta\alpha' ii'$, действующую на β в направлении, противоположном тому, в котором измеряется β.

514. Собирая вместе наши результаты, мы находим, что сила, действующая на ds, составляется из следующих сил:

$$\left.\begin{aligned} X &= (A\alpha\alpha' + B\beta\beta')\, ii' && \text{в направлении } r,\\ Y &= C\,(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, ii' && \text{в направлении } \beta,\\ Z &= C\alpha\gamma' ii' && \text{в направлении } \gamma'. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Предположим, что это действие на ds является результирующей трех сил: силы $Rii'dsds'$, действующей в направлении r, силы $Sii'ds\,ds'$, действующей в направлении ds, и силы $S'ii'ds\,ds'$, действующей в направлении ds', тогда в выражении через ϑ, ϑ' и η

$$R=(A+2C)\cos\vartheta \cos\vartheta' + B\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\eta$$
$$S=-C\cos\vartheta', \qquad S'=C\cos\vartheta. \qquad (10)$$

В выражении через производные от r

$$\left.\begin{aligned} R &= (A+2C)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - Br\frac{d^2r}{ds\,ds'}, \\ S &= C\frac{dr}{ds'}, \qquad S' = -C\frac{dr}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В выражении через l, m, n и l', m', n'

$$\left.\begin{aligned} R &= -(A+2C+B)\frac{1}{r^2}(l\xi+m\eta+n\zeta)(l'\xi+m'\eta+n'\zeta)+B(ll'+mm'+nn'), \\ S &= C\frac{1}{r}(l'\xi+m'\eta+n'\zeta), \qquad S' = C\frac{1}{r}(l\xi+m\eta+n\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где ξ, η, ζ написаны взамен $x'-x$, $y'-y$ и $z'-z$ соответственно.

515. Далее мы должны подсчитать силу, с которой конечный участок тока s' действует на конечный участок тока s. Участок тока s тянется от A, где $s=0$, до P, где оно имеет значение s, а участок тока s' тянется от A', где $s'=0$, до P', где оно имеет значение s'. Координаты точек на любом из токов являются функциями s или s'.

Если F есть функция положения точки, то мы будем употреблять нижний индекс $({}_{s,\,0})$ для обозначения превышения значения этой функции в P над ее значением в A, т. е. $F_{(s,\,0)}=F_P-F_A$. Для замкнутых контуров эти функции с необходимостью исчезают.

Пусть $ii'X$, $ii'Y$ и $ii'Z$ будут составляющими полной силы, с которой $A'P'$ действует на AP. Тогда параллельная X составляющая силы, с которой ds' действует на ds, будет равна

$$ii'\frac{d^2X}{ds\,ds'}ds\,ds'.$$

Откуда

$$\frac{d^2X}{ds\,ds'} = R\frac{\xi}{r}+Sl+S'l'. \tag{13}$$

Подставляя значения R, S и S' из (12) и помня, что

$$(l'\xi+m'\eta+n'\zeta) = r\frac{dr}{ds'}, \tag{14}$$

и группируя члены, содержащие l, m, n, мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{ds\,ds'} = l&\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi^2+C\frac{dr}{ds'}+(B+C)\frac{l'\xi}{r}\right\} \\ +m&\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi\eta+C\frac{l'\eta}{r}+B\frac{m'\xi}{r}\right\} \\ +n&\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi\zeta+C\frac{l'\zeta}{r}+B\frac{n'\xi}{r}\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Так как A, B и C являются функциями r, мы можем записать

$$P = \int_r^\infty (A+2C+B)\frac{1}{r^2}dr, \qquad Q = \int_r^\infty C\,dr. \tag{16}$$

Здесь интегрирование проводится между r и ∞, поскольку A, B, C исчезают при $r=\infty$.

Следовательно,

$$(A+B+2C)\frac{1}{r^2}=-\frac{dP}{dr}, \qquad C=-\frac{dQ}{dr}. \tag{17}$$

516. Но мы знаем, что, согласно третьему случаю равновесия Ампера, когда s' является замкнутым контуром, сила, действующая на ds, перпендикулярна к направлению ds, или, другими словами, составляющая силы в направлении самого элемента ds равна нулю. Предположим в связи с этим, что направление оси x параллельно ds, т. е. положим $l=1$, $m=0$, $n=0$. Уравнение (15) тогда станет таким:

$$\frac{d^2X}{ds\,ds'}=\frac{dP}{ds'}\xi^2-\frac{dQ}{ds'}+(B+C)\frac{l'\xi}{r}. \tag{18}$$

Чтобы найти dX/ds, т. е. силу на ds, отнесенную к единице длины, мы должны проинтегрировать это выражение по s'. Интегрируя первый член по частям, находим

$$\frac{dX}{ds}=(P\xi^2-Q)_{(s',\,0)}-\int\limits_0^{s'}(2Pr-B-C)\frac{l'\xi}{r}ds'. \tag{19}$$

Когда s' составляет замкнутый контур, это выражение должно быть нулем. Первый его член исчезнет сам. Второй член, однако, в случае замкнутого контура, вообще говоря, не исчезает, если величина, стоящая под знаком интеграла, не обращается тождественно в нуль. Следовательно, чтобы удовлетворить условию Ампера, мы должны положить

$$P=(B+C)/2r. \tag{20}$$

517. Мы можем теперь исключить P и найти общее выражение для dX/ds.

$$\frac{dX}{ds}=\left\{\frac{B+C}{2}\frac{\xi}{r}(l\xi+m\eta+n\zeta)+Q\right\}_{(s',\,0)}+m\int\limits_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi-l'\eta}{r}ds'-n\int\limits_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{l'\zeta-n'\xi}{r}ds'. \tag{21}$$

Когда s' является замкнутым контуром, первый член этого выражения исчезает, и, если положить

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\int\limits_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{n'\eta-m'\zeta}{r}ds',\\ \beta'&=\int\limits_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{l'\zeta-n'\xi}{r}ds',\\ \gamma'&=\int\limits_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi-l'\eta}{r}ds'\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(где интегрирование распространено на замкнутый контур s'), то мы сможем записать

$$\frac{dX}{ds} = m\gamma' - n\beta'$$

и аналогично

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY}{ds} &= n\alpha' - l\gamma', \\ \frac{dZ}{ds} &= l\beta' - m\alpha'. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Величины α', β', γ' иногда называют определителями контура s' относительно точки P, а их результирующая названа Ампером директрисой электромагнитного действия.

Из этого уравнения очевидно, что сила, имеющая компоненты $(dX/ds)ds$, $(dY/ds)ds$ и $(dZ/ds)ds$, перпендикулярна как к элементу ds, так и к его директрисе; эта сила представлена численно площадью параллелограмма, сторонами которого являются элемент ds и директриса действия.

На языке кватернионов результирующая сила, действующая на ds, есть векторная часть произведения директрисы на ds.

Поскольку мы уже знаем, что директриса есть то же самое, что и магнитная сила, обусловленная единичным током в контуре s', то далее мы будем говорить о директрисе, как о создаваемой контуром магнитной силе.

518. Теперь мы завершим вычисления составляющих силы, действующей между двумя конечными токами, замкнутыми или разомкнутыми.

Пусть ρ будет новой функцией r, такой, что

$$\rho = \frac{1}{2}\int_r^\infty (B - C)\,dr, \quad (24)$$

тогда в силу (17) и (20)

$$A + B + 2C = r\frac{d^2}{dr^2}(Q + \rho) - \frac{d}{dr}(Q + \rho), \quad (25)$$

и уравнения (11) становятся такими:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{d\rho}{dr}\cos\varepsilon + r\frac{d^2}{ds\,ds'}(Q + \rho), \\ S &= -\frac{dQ}{ds'}, \qquad S' = \frac{dQ}{ds}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

При таких значениях составляющих сил уравнение (13) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{ds\,ds'} &= -\cos\varepsilon\frac{d\rho}{dr}\frac{\xi}{r} + \xi\frac{d^2}{ds\,ds'}(Q + \rho) - l\frac{dQ}{ds'} + l'\frac{dQ}{ds}, \\ &= \cos\varepsilon\frac{d\rho}{dx} + \frac{d^2\{(Q + \rho)\xi\}}{ds\,ds'} + l\frac{d\rho}{ds'} - l'\frac{d\rho}{ds}. \end{aligned} \quad (27)$$

519. Пусть

$$F=\int_0^s l\rho\, ds,\qquad G=\int_0^s m\rho\, ds,\qquad H=\int_0^s n\rho\, ds,\tag{28}$$

$$F'=\int_0^{s'} l'\rho\, ds',\qquad G'=\int_0^{s'} m'\rho\, ds',\qquad H'=\int_0^{s'} n'\rho\, ds'.\tag{29}$$

Эти величины имеют определенные значения для любой заданной точки пространства. Для замкнутых контуров они соответствуют составляющим вектор-потенциалов контуров.

Пусть L будет новой функцией r, такой, что

$$L=\int_0^r r\,(Q+\rho)\,dr,\tag{30}$$

и пусть M будет двойным интегралом

$$\int_0^{s'}\int_0^{s} \rho\cos\varepsilon\, ds\, ds',\tag{31}$$

который для замкнутых контуров становится их взаимным потенциалом; тогда уравнение (27) может быть записано в виде

$$\frac{d^2X}{ds\,ds'}=\frac{d^2}{ds\,ds'}\left\{\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dx}+F-F'\right\}.\tag{32}$$

520. Интегрируя по s и s' между заданными пределами, находим

$$X=\frac{dM}{dx}-\frac{d}{dx}\left(L_{PP'}-L_{AP'}-L_{A'P}+L_{AA'}\right),$$
$$+F_{P'}-F_{A'}-F'_{P}+F'_{A},\tag{33}$$

где индексы у L характеризуют расстояние r, функцией которого является L, а индексы у F и F' характеризуют точки, в которых следует брать значения этих функций.

Исходя из этого, могут быть написаны выражения для Y и Z. Умножая эти три составляющие соответственно на dx, dy и dz, получаем

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=DM-D\left(L_{PP'}-L_{AP'}-L_{A'P}+L_{AA'}\right)$$
$$-(F'\,dx+G'\,dy+H'\,dz)_{(P-A)}+(F\,dx+G\,dy+H\,dz)_{(P'-A')},\tag{34}$$

где D обозначает полный дифференциал.

Так как выражение $F\,dx+G\,dy+H\,dz$ не является, вообще говоря, полным дифференциалом какой-либо функции от x, y, z, то и выражение $X\,dx+Y\,dy+$ $+Z\,dz$ не является полным дифференциалом токов в том случае, когда один из них разомкнут.

521. Если, однако, оба тока замкнутые, то члены в L, F, G, H, F', G', H' исчезают и

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=DM,\tag{35}$$

где M есть взаимный потенциал двух замкнутых контуров, несущих единичные токи. Величина M выражает работу, производимую электромагнитными силами над любым из проводящих контуров при его перемещении параллельно самому себе с бесконечного расстояния до места его фактического расположения. Любому изменению его положения, *увеличивающему* M, будет оказано *содействие* со стороны электромагнитных сил.

Можно показать, как в п. 490, 596, что и когда движение контура не параллельно самому себе, то силы, действующие на него, все равно определяются через вариацию M потенциала одного контура на другом.

522. Единственным экспериментальным фактом, использованным нами в этом исследовании, является факт, установленный Ампером и состоящий в том, что действие замкнутого контура на произвольный участок другого контура перпендикулярно направлению последнего. Все остальные этапы исследований связаны с чисто математическими соображениями, зависящими от свойств линии в пространстве. Эти рассуждения поэтому могут быть представлены в более сжатой и подходящей форме путем использования идей и языка математического метода, специально приспособленного для выражения таких геометрических соотношений, а именно метода *кватернионов* Гамильтона.

Это было сделано проф. Тэтом в Quarterly Journal of Mathematics, 1866, и в его трактате по *Кватернионам* в § 399 применительно к оригинальным исследованиям Ампера. Читатель, изучающий предмет, сможет легко распространить этот метод на несколько более общее исследование, приведенное здесь.

523. До сих пор мы не делали никаких предположений относительно величин A, B, C, кроме того, что они являются функциями расстояния между элементами r. Теперь мы должны установить вид этих функций; воспользуемся для этой цели четвертым случаем равновесия Ампера, п. 508, в котором показывается, что если линейные размеры и расстояния в системе двух контуров изменить в одинаковой пропорции, сохранив токи неизменными, то сила между двумя контурами останется прежней.

Но сила между двумя контурами для единичных токов равна dM/dx и, так как она не зависит от размеров системы, должна быть величиной численной. Следовательно, сама величина M, являющаяся коэффициентом взаимного потенциала контуров, должна иметь размерность длины. Тогда из (31) следует, что ρ должна быть величиной, обратной длине, и, следовательно, в силу (24) разность $B—C$ должна быть обратна квадрату длины. Но так как и B и C являются функциями r, то разность $B—C$ должна быть обратным квадратом r, возможно, с каким-то численным множителем перед ним.

524. Множитель, который мы принимаем, зависит от нашей системы измерений. Если мы принимаем электромагнитную систему (а она называется так потому, что согласуется с системой, уже установленной для магнитных измерений), то величина M должна совпадать с величиной потенциала двух магнитных оболочек единичной мощности, границами которых служат соответственно два этих контура. В этом случае величина M, согласно п. 423, равна:

$$M = \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds', \qquad (36)$$

где интегрирование производится по обоим контурам в положительном направлении. Приняв это выражение за численное значение M и ср. с (31), найдем

$$\rho=1/r, \quad B-C=2/r^2. \tag{37}$$

525. Мы можем теперь выразить составляющие силы, возникающей из-за действия элемента ds' на элемент ds, в наиболее общей форме, согласующейся с данными экспериментов.

Сила, действующая на ds, состоит из следующих сил притяжения:

$$Rii'\,ds\,ds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)ii'\,ds\,ds'+r\frac{d^2Q}{ds\,ds'}ii'\,ds\,ds' \quad \text{в направлении } r,$$

$$Sii'\,ds\,ds'=-\frac{dQ}{ds'}ii'\,ds\,ds' \quad \text{в направлении } ds,$$

$$S'ii'\,ds\,ds'=\frac{dQ}{ds}ii'\,ds\,ds' \quad \text{в направлении } ds', \tag{38}$$

где $Q=\int\limits_r^\infty C\,dr$, и, поскольку C является неизвестной функцией r, нам известно только, что Q есть функция r.

526. Величина Q не может быть без какого-то рода предположений определена из экспериментов, в которых активный ток образует замкнутый контур. Если мы вместе с Ампером будем считать, что действие между элементами ds и ds' происходит вдоль соединяющей их линии, то силы S и S' должны исчезнуть, а величина Q либо стать постоянной, либо обратиться в нуль. Тогда сила сводится к силе притяжения, величина которой равна

$$Rii'\,ds\,ds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)ii'\,ds\,ds'. \tag{39}$$

Ампер, проводивший это исследование задолго до установления магнитной системы единиц, пользовался формулой, содержащей численный множитель, равный половине этого, а именно

$$Rjj'\,ds\,ds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)jj'\,ds\,ds'. \tag{40}$$

Здесь сила тока измеряется в так называемых электродинамических мерах. Если i, i' — силы токов в электромагнитных единицах, а j, j' — в электродинамических единицах, то очевидно, что

$$jj'=2ii', \quad \text{или} \quad j=\sqrt{2}\,i. \tag{41}$$

Следовательно, единичный ток, принятый в электромагнитной мере, больше такового в электродинамической мере в отношении $\sqrt{2}$ к 1.

Единственным аргументом в пользу обращения к электродинамической единице является то, что эта единица первоначально была принята Ампером — первооткрывателем закона взаимодействия токов. Но связанное с ней непрерывное появление $\sqrt{2}$ в вычислениях неудобно; электромагнитная система обладает большим преимуществом: численно она совпадает со всеми нашими магнитными формулами. И, поскольку обучающемуся трудно удерживать в памяти, должен

ли он что-то умножать или что-то делить на $\sqrt{2}$, мы будем впредь использовать только электромагнитную систему, принятую Вебером и большинством других авторов.

Так как ни вид, ни величина Q не влияют на какие-либо проделанные до сих пор опыты, в которых, по крайней мере, активный ток всегда был замкнутым, мы можем при желании принять для Q любое значение, если нам покажется, что это упростит формулы.

Так, Ампер предположил, что сила между двумя элементами действует вдоль линии, их соединяющей. Это дает $Q=0$,

$$Rii'\,ds\,ds' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) ii'\,ds\,ds', \quad S=0, \quad S'=0. \tag{42}$$

Грассман[1] предположил, что два элемента, расположенные вдоль одной и той же прямой линии, не взаимодействуют. Это дает

$$Q=-\frac{1}{2r}, \qquad R=-\frac{3}{2r}\frac{d^2r}{ds\,ds'}, \qquad S=-\frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S'=\frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}. \tag{43}$$

Мы можем, если угодно, предположить, что притяжение между двумя элементами, расположенными на заданном расстоянии друг от друга, пропорционально косинусу угла между ними. В этом случае

$$Q=-\frac{1}{r}, \qquad R=\frac{1}{r^2}\cos\varepsilon, \qquad S=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S'=\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}. \tag{44}$$

Наконец, мы могли бы предположить, что и силы притяжения, и наклонные силы зависят только от углов, образуемых элементами с линией, их соединяющей, и тогда получили бы

$$Q=-\frac{2}{r}, \qquad R=-3\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}, \qquad S=-\frac{2}{r^2}\frac{dr}{ds'}, \qquad S'=\frac{2}{r^2}\frac{dr}{ds}. \tag{45}$$

527. Из четырех этих предположений несомненно наилучшим является принадлежащее Амперу, так как это единственное предположение, которое делает силы между двумя элементами не только равными и противоположными, но и действующими по прямой линии, их соединяющей.

ГЛАВА III

ОБ ИНДУКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

528. Открытие Эрстедом магнитного действия электрического тока привело путем прямых рассуждений к открытию намагничивания электрическими токами и механического действия между электрическими токами. Однако только в 1831 г. Фарадей, в течение некоторого времени пытавшийся создавать электрические токи при помощи магнитного или электрического действия, открыл условия магнитоэлектрической индукции. Метод, примененный Фарадеем в его исследованиях,

[1] Pogg. *Ann.*, 64, p. 1 (1845).

состоял в постоянном обращении к эксперименту как средству проверки правильности его идей и в постоянном развитии идей под непосредственным влиянием эксперимента. В его опубликованных работах эти идеи выражены на языке, более всего пригодном для науки, находящейся в стадии зарождения, ибо язык этот до некоторой степени даже чужд стилю тех физиков, которые привыкли устанавливать математические формы мышления.

Экспериментальное исследование, с помощью которого Ампер установил законы механического действия между электрическими токами, является одним из наиболее блестящих достижений в науке.

Все вместе, и теория, и эксперимент, полностью созревшие и оснащенные, как будто выскочили из головы «Ньютона электричества». Совершенные по форме и неуязвимые по точности, эти результаты были сведены в одну формулу, из которой можно вывести все явления и которая должна навсегда остаться фундаментальной формулой электродинамики.

Метод Ампера, однако, хотя и представлен в индуктивной форме, не позволяет проследить процесс образования идей, характеризующий этот метод. Мы с трудом можем поверить в то, что Ампер на самом деле открыл закон действия лишь с помощью экспериментов, им описанных. Мы вынуждены заподозрить (впрочем, он и сам признается в этом [1]), что он открыл свой закон каким-то способом, оставшимся для нас нераскрытым, и что построив впоследствии безупречное доказательство, он удалил все следы лесов, с помощью которых возвел его.

Фарадей же, насборот, демонстрирует нам неудачные свои эксперименты наряду с удачными и незрелые свои идеи наряду с развитыми; поэтому читатель, каким бы он ни был менее способным по сравнению с Фарадеем в отношении индуктивного мышления, испытывает скорее симпатию, нежели чувство восхищения, и искушение поверить, что при удачном стечении обстоятельств он и сам стал бы первооткрывателем. Поэтому каждому изучающему следовало бы прочитать труды Ампера в качестве великолепного образца научного стиля изложения открытия, но ему следовало бы изучить и Фарадея тоже для культивирования научного духа на основе тех действий и противодействий, которые будут происходить между фактами, открываемыми ему Фарадеем, и идеями, зарождающимися в его собственном мозгу.

Возможно, большую пользу науке принесло то, что Фарадей, хотя и глубоко осознавший фундаментальные свойства пространства, времени и силы, не был профессиональным (professed) математиком. У него не возникало искушения входить во многие интересные исследования в области чистой математики, которые подсказали бы ему его открытия, если бы они были представлены в математической форме, и он не чувствовал потребности втискивать свои результаты в приемлемые — по математическим нормам того времени — формы, т. е. выражать их в виде, доступном для нападок со стороны математиков. Благодаря этому он был оставлен в покое и мог делать работу, ему присущую,— находить соответствие между своими идеями и своими фактами, прибегая к языку естественному, а не профессиональному.

Главным образом в надежде положить эти идеи в основу математической теории взялся я за настоящий трактат.

---

[1] *Théorie des phénomènes Électrodynamiques*, p. 9.

529. Мы привыкли считать, что мир состоит из отдельных частей; поэтому обычно математики начинают с рассмотрения отдельной частицы, постигают ее связь с другой частицей и так далее. Обычно такой подход считается наиболее естественным.

Однако для того, чтобы вообразить какую-то частицу, требуется прибегнуть к некоторому процессу абстрагирования, ибо все наши восприятия относятся к телам протяженным, и идея *целого*, существующая в нашем сознании на данный момент, возможно, столь же первична, как и представление о любой вещи, обладающей индивидуальными свойствами. Поэтому может существовать математический метод, где, отправляясь от целого, мы переходим к его частям вместо того, чтобы идти от частей к целому. Например, Евклид в своей первой книге представляет себе линию как след, прочерчиваемый точкой, поверхность — как место, заметаемое линией, а объем — как область, производимую поверхностью. Но он также определяет поверхность как границу объема, линию — как край поверхности и точку — как конец линии.

Аналогичным способом мы можем представить себе и потенциал материальной системы как функцию, найденную с помощью определенной процедуры интегрирования, где учитываются массы тел, помещенных в поле, или же мы можем предположить, что эти массы сами по себе лишены иного математического смысла, кроме того, что они равны объемному интегралу от $(1/4\pi)\nabla^2\Psi$, где Ψ — потенциал.

Изучая электричество, мы можем пользоваться формулами, содержащими такие величины, как расстояния между определенными телами, или такие, как электризация или токи в этих телах, но мы можем также пользоваться формулами, содержащими совсем другие величины, каждая из которых непрерывна во всем пространстве.

Математические операции, применяемые в первом методе,— это интегрирование вдоль линий, по поверхностям и по ограниченным объемам пространства, а во втором методе — это дифференциальные уравнения в частных производных и интегрирование по всему пространству.

Метод Фарадея, по-видимому, органически связан со вторым подходом. Фарадей никогда не рассматривает тела, между которыми не существует ничего, кроме расстояния, и которые действуют друг на друга лишь в соответствии с некоторой функцией этого расстояния. Он представляет себе все пространство как некое поле силы, силовые линии которого в общем случае оказываются криволинейными, а линии, обусловленные каким-то определенным телом,— исходящими из него во все стороны в направлениях, изменяющихся под влиянием присутствия других тел. Фарадей даже говорит [2] о принадлежащих телу силовых линиях в известном смысле как о частях самого этого тела, так что при его действии на удаленные тела нельзя сказать, что оно действует там, где его нет. Однако не это составляет главную, определяющую идею, связанную с Фарадеем. Я думаю, он, скорее всего, хотел сказать, что поле пространства заполнено силовыми линиями, расположение которых зависит от расположения тел в этом поле, а электрическое и механическое воздействие на каждое тело определяется силовыми линиями, в это тело упирающимися.

[2] *Exp. Res.*, vol. II, p. 293; vol. III, p. 447.

ЯВЛЕНИЯ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ[3]

530. 1. *Индукция путем изменения первичного тока*

Пусть имеются два проводящих контура — первичный и вторичный. Первичный контур соединен с вольтовой батареей, и ток в нем можно создавать, поддерживать, прекращать или менять на обратный. Во вторичный контур включается гальванометр, регистрирующий любые токи, которые могут сформироваться в контуре. Этот гальванометр помещается на таком удалении от всех частей первичного контура, что первичный ток не оказывает никакого прямого влияния на его показания.

Пусть какая-то часть первичного контура состоит из прямого провода, какая-то часть вторичного контура тоже состоит из прямого провода, расположенного рядом с первым, параллельно ему; остальные же части контуров находятся на значительном расстоянии друг от друга.

Установлено, что в момент посылки тока через прямой провод первичного контура гальванометр вторичного контура регистрирует во вторичном прямом проводе ток противоположного направления. Он называется индуцированным током. Если первичный ток поддерживается постоянным, индуцированный ток быстро исчезает и первичный ток, по-видимому, не производит никакого эффекта на вторичный контур. Если затем прервать первичный ток, то наблюдается появление вторичного тока в том же направлении, в котором протекал первичный ток. Каждое изменение первичного тока производит электродвижущую силу во вторичном контуре. При увеличении первичного тока электродвижущая сила направлена противоположно току, а при уменьшении — в том же самом направлении, что и ток. Когда же первичный ток постоянен, электродвижущая сила отсутствует.

Если сблизить провода, эти эффекты индукции увеличиваются. Они также возрастают при образовании из проводов двух кольцевых витков или спиральных катушек, близко расположенных друг к другу. А при помещении внутрь этих витков (катушек) железного стержня или пучка железных проволок отмеченные выше эффекты возрастают еще сильнее.

2. *Индукция путем перемещения первичного контура*

Мы видели, что, когда первичный ток неподвижен и поддерживается постоянным, вторичный ток быстро исчезает.

Пусть теперь первичный ток остается постоянным, а первичный прямой провод приближается к вторичному прямому проводу. При этом сближении появится вторичный ток в направлении, *противоположном* первичному.

Если первичный контур удаляется от вторичного, то появится вторичный ток в том же самом направлении, что и первичный.

3. *Индукция путем перемещения вторичного контура*

Если перемещать вторичный контур, то при приближении вторичного провода к первичному вторичный ток противоположен первичному, а при удалении проводов друг от друга вторичный и первичный токи текут в одинаковом направлении.

---

[3] Прочтите у Фарадея *Experimental Researches*, Series I and II.

Во всех случаях направление вторичного тока таково, что механическое действие между двумя проводами противоположно направлению движения. Это действие имеет характер отталкивания при сближении проводов и притяжения — при их удалении друг от друга. Этот очень важный факт был установлен Ленцем [4].

4. *Индукция путем относительного перемещения магнита и вторичного контура*

Если заменить первичный контур магнитной оболочкой, край которой совпадает с контуром, а мощность численно равна силе тока в контуре, и если аустральная (южная) сторона оболочки будет соответствовать положительной стороне контура, то явления, производимые перемещением этой оболочки относительно вторичного контура, окажутся неотличимыми от явлений, наблюдаемых в случае перемещения первичного контура.

531. Совокупность всех этих явлений может быть сведена в один закон. Когда число линий магнитной индукции, проходящих сквозь вторичный контур в положительном направлении, изменяется, то в контуре действует электродвижущая сила, измеряемая скоростью убывания потока магнитной индукции через контур.

532. Пусть, например, рельсы железной дороги изолированы от земли; на одном конце они соединены через гальванометр, а замыкание контура осуществляется через колеса и ось железнодорожного вагона на расстоянии x от того конца, где находится гальванометр. Если пренебречь высотой оси над уровнем рельсов, то поток индукции через вторичный контур будет обусловлен только наличием вертикальной составляющей земной магнитной силы, которая в северных широтах направлена вниз. Отсюда, если b есть ширина железнодорожной колеи, то горизонтальная площадь контура равна bx и поверхностный интеграл магнитной индукции через нее будет $Z\,bx$, где Z — вертикальная составляющая магнитной силы Земли. Поскольку Z смотрит вниз, то нижнюю сторону контура следует считать положительной, а положительным направлением в самом контуре будет направление север—восток—юг—запад, что совпадает с кажущимся дневным ходом Солнца.

Пусть теперь железнодорожный вагон приведен в движение, тогда x начнет меняться, и в контуре возникнет электродвижущая сила, по величине равная $-Zb\,dx/dt$.

Если x увеличивается, т. е. если вагон удаляется от конца с гальванометром, то электродвижущая сила окажется отрицательной, т. е. направленной соответственно обходу север—запад—юг—восток. Следовательно, на оси эта сила будет направлена справа налево. Если бы расстояние x уменьшалось, то абсолютное направление силы было бы обратным, но поскольку направление движения вагона при этом тоже обращается на противоположное, то электродвижущая сила на оси по-прежнему останется направленной справа налево (в предположении, что наблюдатель в вагоне всегда двигается лицом вперед). В северных широтах, где южный конец стрелки отклоняется вниз, электродвижущая сила в движущемся теле направлена слева направо.

Таким образом, мы имеем следующее правило для определения электродвижущей силы в проводе, движущемся через поле магнитной силы. Поместите мыс-

---

[4] Pogg. *Ann.*, XXXI, 483 (1834).

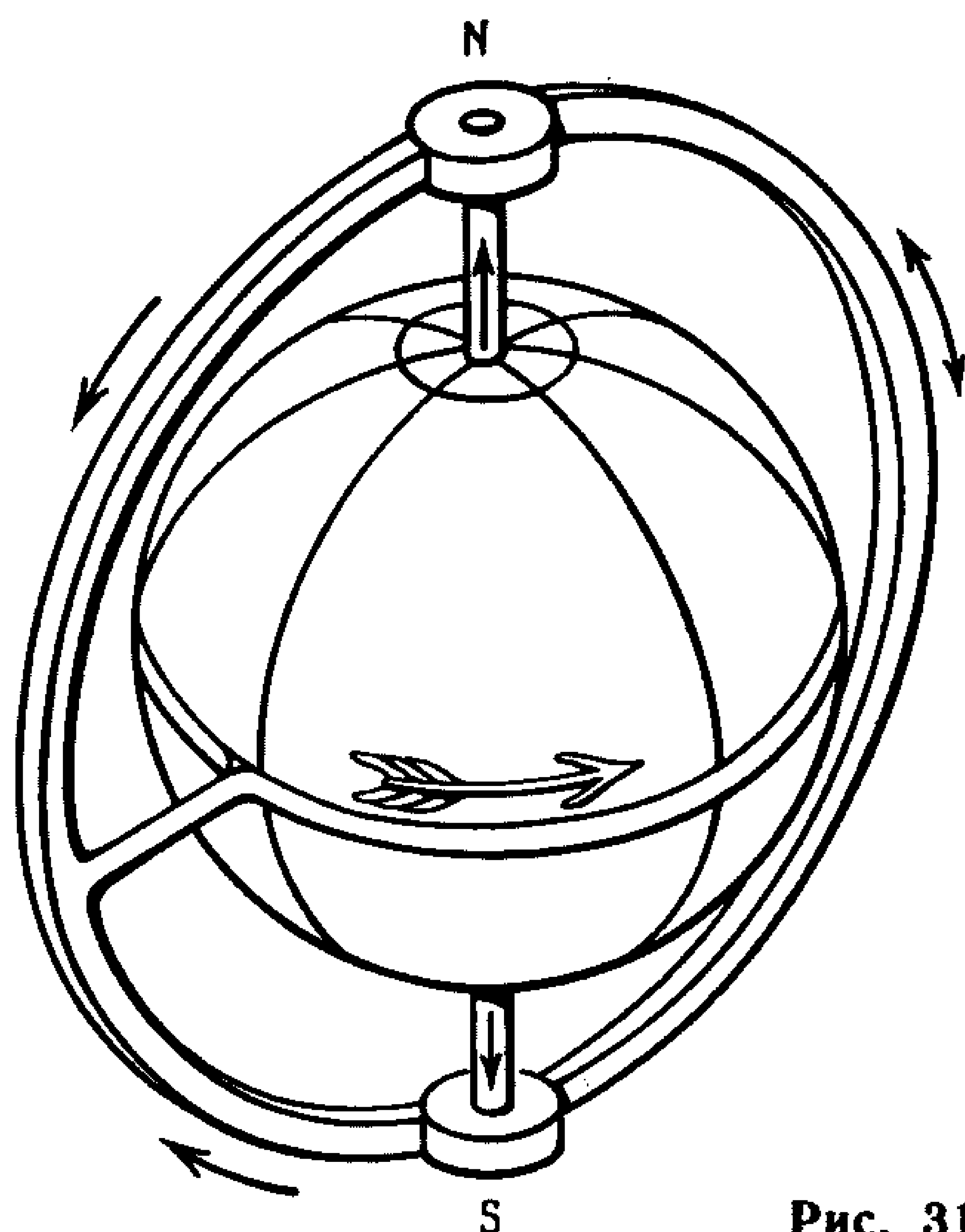


Рис. 31

ленно себя вдоль стрелки компаса так, чтобы ваша голова и ваши ноги располагались у концов стрелки, указывающих соответственно на север и юг, повернитесь лицом вперед по движению, тогда обусловленная этим движением электродвижущая сила окажется направленной слева направо.

533. Поскольку эти соотношения между направлениями представляются важными, мы приведем еще одну иллюстрацию. Предположим, что вокруг земли по экватору уложен металлический пояс, а вдоль Гринвичского меридиана от экватора к северному полюсу протянут металлический провод.

Допустим, что сооружена такая огромная металлическая дуга квадранта, что один ее конец прикреплен к оси на северном полюсе, а другой перемещается вдоль экватора, скользя по большому поясу земли и вслед за солнцем в его дневном движении. Тогда вдоль движущегося квадранта возникнет электродвижущая сила, действующая от полюса к экватору [рис. 31].

Эта электродвижущая сила будет одинаковой — считаем ли мы, что покоится земля, а квадрант перемещается с востока на запад или что покоится квадрант, а земля вращается с запада на восток. Если предположить, что вращается земля, то электродвижущая сила будет одинаковой, какую бы форму ни имел фиксированный в пространстве участок контура, один конец которого касается полюса, а другой экватора. На этом участке контура ток течет от полюса к экватору.

Другая же часть контура, фиксированная относительно земли, также может иметь любую форму и располагаться как в пределах земли, так и вне ее. В этой части ток течет от экватора к любому из полюсов.

534. Напряженность электродвижущей силы магнитоэлектрической индукции совершенно не зависит от природы вещества того проводника, в котором она действует, и также от природы проводника, несущего индуцирующий ток.

Чтобы показать это, Фарадей [6] изготовил проводник из двух проволок, сделанных из разных металлов; он изолировал их шелковой обмоткой, сплел вместе и на одном из концов спаял. Другие же концы проводов он подсоединил к гальванометру. При этом оба провода по отношению к первичному контуру располагались равноправно, и если бы электродвижущая сила в одном из них превысила бы электродвижущую силу в другом, то гальванометр зарегистрировал бы возникновение тока. Фарадей обнаружил, однако, что такая комбинация может находиться под действием самых мощных электродвижущих сил, обусловленных индукцией, без каких-либо отклонений гальванометра. Он нашел также, что независимо от того, состояли ли обе ветки этого составного проводника из двух ме-

[6] *Exp. Res.*, 195.

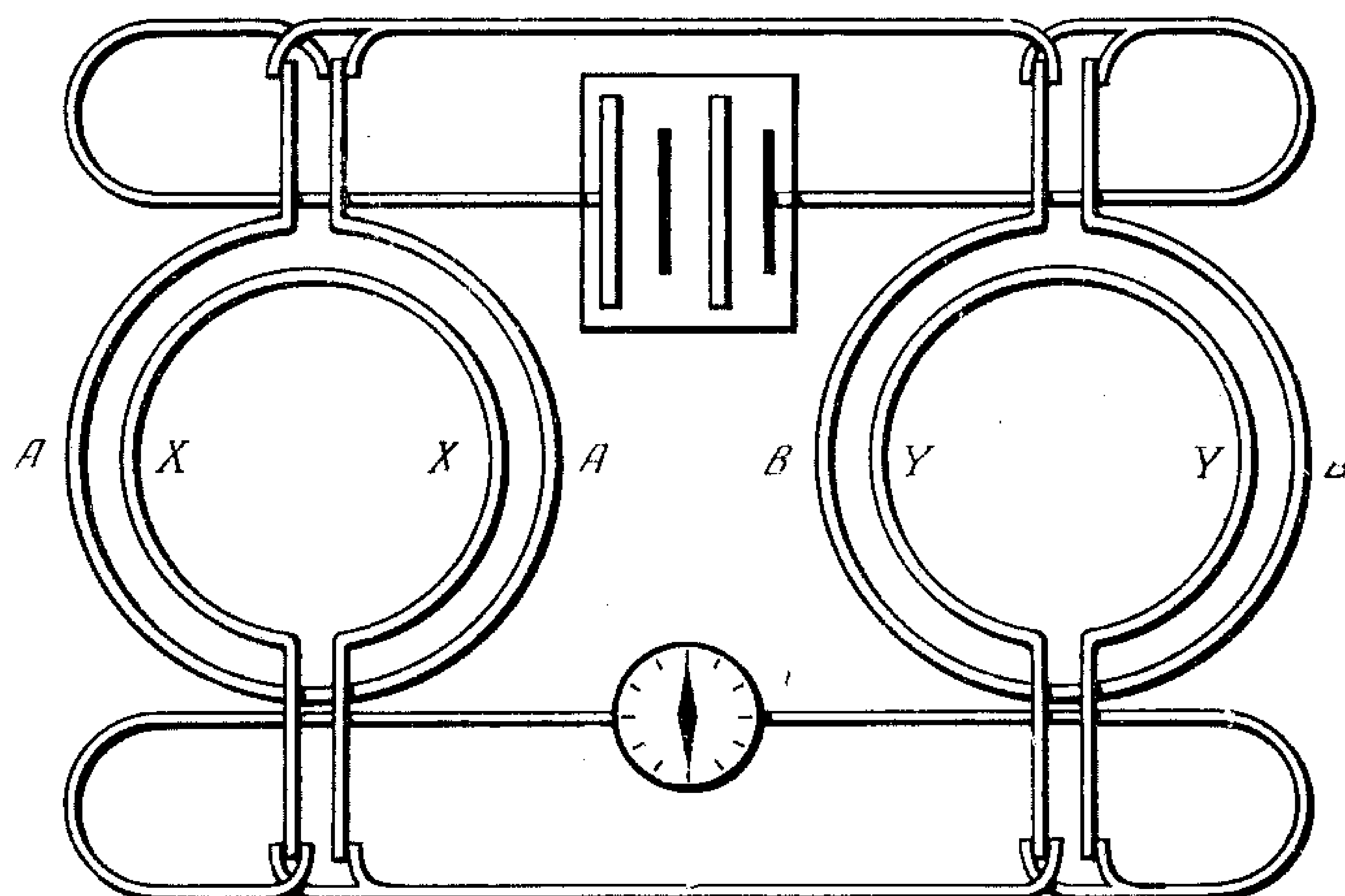


Рис. 32

таллов или из металла и электролита, никакого воздействия на гальванометр не возникало [6].

Следовательно, электродвижущая сила в любом проводнике зависит только от формы и движения этого проводника, а также от силы, формы и движения электрических токов в поле.

535. Другое негативное свойство электродвижущей силы состоит в том, что она сама по себе не проявляет никакой тенденции вызывать механическое движение какого-либо тела, она только вызывает в нем электрический ток.

Если она действительно создает ток в теле, то появляется механическое действие, обусловленное этим током, но если воспрепятствовать образованию тока, то механического действия на само тело не возникнет. Однако если тело электризовано, то электродвижущая сила будет приводить его в движение, что мы уже описывали в Электростатике.

536. Экспериментальное исследование законов индукции электрических токов в неподвижных контурах может быть проведено со значительной точностью при помощи методов, в которых электродвижущая сила (а следовательно, и ток в цепи гальванометра) сводится к нулю [рис. 32].

Так, например, если мы хотим показать, что индукция витка A на виток X равна индукции витка B на виток Y, поместим первую пару витков A и X на достаточном расстоянии от второй пары B и Y и подсоединим витки A и B к вольтовой батареи, так чтобы можно было получить один и тот же первичный ток, текущий через A в положительном, а затем через B в отрицательном направлении. Соединим также X и Y с гальванометром, чтобы вторичный ток, если он появится, потек в одном и том же направлении последовательно через X и Y.

Тогда, если индукция A на X равна индукции B на Y, гальванометр не покажет присутствия тока индукции при замыкании или размыкании цепи батареи.

Точность этого метода повышается с ростом силы первичного тока и чувствительности гальванометра к мгновенным токам; эти эксперименты проводятся

[6] *Exp. Res.*, 200.

значительно проще, чем опыты, связанные с электромагнитными притяжениями, где сам проводник должен очень деликатно подвешиваться.

Очень поучительную серию хорошо продуманных и разработанных опытов такого рода описал профессор Феличи из Пизы [7].

Я только вкратце укажу некоторые из законов, которые могут быть доказаны таким способом.

(1). Электромагнитная сила индукции одного контура на другой не зависит от площади поперечного сечения проводников и от материала, из которого они сделаны.

Действительно, мы можем без изменения результатов опыта заменять любой из контуров на другой, отличающийся сечением, материалом, но не формой.

(2). Индукция контура A на контур X равна индукции X на A.

Действительно, если мы поместим A в цепь гальванометра, а X — в цепь батареи, равновесие электродвижущей силы не нарушается.

(3). Индукция пропорциональна индуцирующему току.

Действительно, если мы удостоверились, что индукция A на X равна индукции B на Y, а также индукции C на Z, мы можем заставить ток батареи сначала течь через A, а потом разделиться в любом отношении между B и C. После этого, если подсоединить последовательно к гальванометру X в обратном, а Y и Z в прямом направлениях, то электродвижущая сила в X уравновесится суммой электродвижущих сил в Y и Z.

(4). У пары контуров, образующих геометрически подобную систему, индукция пропорциональна их линейным размерам.

Действительно, если три пары контуров, упомянутых выше, являются подобными, а линейные размеры первой пары равны сумме соответствующих линейных размеров второй и третьей пар, то, соединив A, B и C последовательно с батареей, а X, Y, Z — последовательно с гальванометром (причем X — в обратном направлении), получим равновесие.

(5). Электродвижущая сила, производимая в катушке, состоящей из n витков, током, текущим в катушке из m витков, пропорциональна произведению nm.

537. В экспериментах того типа, которые мы рассматривали, гальванометр должен быть возможно более чувствительным, а его стрелка — по возможности более легкой, с тем чтобы давать заметные показания при очень малых переходных токах. Для опытов, проводимых с индукцией, обусловленной движением, требуется, чтобы стрелка имела несколько больший период колебаний и проводник успевал совершить нужные движения, пока стрелка еще не удалилась от своего положения равновесия. В предыдущих экспериментах электромагнитные силы в цепи гальванометра пребывали в равновесии в течение всего времени, и через катушку гальванометра не проходило никакого тока. В опытах, которые будут описаны сейчас, электродвижущие силы действуют сначала в одном, а потом в другом направлении и тем самым создают последовательно два тока, проходящих через гальванометр в противоположных направлениях; мы должны показать, что импульсы, действующие на стрелку гальванометра и обусловленные этими следующими друг за другом токами, в определенных случаях равны и противоположны.

---

[7] *Annales de Chimie*, XXXIV, p. 64 (1852); *Nuovo Cimento*, IX, p. 345 (1859).

Теория применения гальванометра для измерения переходных токов будет рассмотрена более подробно в п. 748. Сейчас же для наших целей достаточно заметить, что, пока стрелка гальванометра близка к своему положению равновесия, отклоняющая сила тока пропорциональна самому току, и если полное время действия тока мало по сравнению с периодом колебаний стрелки, то конечная скорость магнита будет пропорциональна полному количеству электричества в токе. Следовательно, если два тока проходят, быстро следуя друг за другом и перенося в противоположных направлениях равное количество электричества, то стрелка в конце процесса не будет иметь никакой скорости.

Таким образом, чтобы показать, что индуцированные токи во вторичном контуре, обусловленные замыканием и размыканием первичного контура, равны по своей полной величине, но противоположны по направлению, мы можем так устроить соединение первичного контура с батареей, чтобы, дотрагиваясь до ключа, можно было посылать ток в первичный контур, а снимая палец с ключа, прерывать контакт по желанию. Если ключ нажат в течение некоторого времени, гальванометр во вторичном контуре показывает в момент образования контакта переходный ток в направлении, противоположном первичному току. Если контакт сохраняется, то индуцированный ток просто проходит и исчезает. Если теперь разорвать контакт, то через вторичную цепь пройдет, но уже в противоположном направлении, другой переходный ток и стрелка гальванометра получит импульс в противоположном направлении.

Но если мы осуществим контакт только на одно мгновение и затем прервем его, то два индуцированных тока пройдут через гальванометр в столь быстрой последовательности, что стрелка под действием первого тока не успеет еще сдвинуться на заметное расстояние от своего положения равновесия и будет остановлена вторым током. В силу точного равенства между величинами этих двух переходных токов стрелка не сдвинется с места.

Если внимательно проследить за стрелкой, то окажется, что она внезапно дернулась от одного положения покоя к другому, очень близкому к первому.

Таким путем мы доказываем, что количество электричества в токе индукции при прерывании контакта в точности равно и противоположно количеству электричества в индукционном токе при установлении контакта.

538. Феличи во второй серии своих «*Исследований*» приводит другое применение этого метода, состоящее в следующем.

Всегда можно найти множество разных положений вторичного витка B, при которых образование и разрыв контакта в первичном контуре A не создает индуктивных токов в B. В таких случаях говорят, что положения этих двух витков *сопряжены* друг другу.

Пусть B_1 и B_2 будут два таких положения. Если катушка B внезапно переместилась из положения B_1 в положение B_2, то алгебраическая сумма переходных токов в катушке B будет в точности равна нулю, так что стрелка гальванометра останется в покое, когда движение B будет закончено.

Это верно независимо от того, каким путем катушка B перемещается из B_1 в B_2, а также независимо от того, остается ли ток в первичной катушке A постоянным или меняется во время перемещения.

Далее, пусть B' будет какое-то другое положение B, не сопряженное A, так что

создание или прерывание контакта в A создает индуцированный ток, когда B находится в положении B'.

Пусть контакт образован, когда B находится в сопряженном положении B_1 и ток индукции отсутствует. Переместим B в B', тогда появится индуцированный ток, обусловленный движением, но если B быстро передвинуть в B', а затем разорвать первичный контакт, то индуцированный ток, обусловленный разрывом контакта, в точности уничтожит эффект тока индукции, обусловленного движением, и стрелка гальванометра останется в покое. Следовательно, ток, возникающий из-за движения из сопряженного положения в любое другое положение, равен и противоположен току, возникающему из-за разрыва контакта в этом последнем положении.

Так как эффект при образовании контакта равен и противоположен эффекту при разрыве контакта, отсюда следует, что эффект образования контакта в момент, когда катушка B находится в положении B', эквивалентен эффекту перенесения катушки из любого сопряженного положения B_1 в B' при наличии тока, протекающего через A.

Результат окажется тем же самым, если изменение относительного положения катушек осуществляется путем перемещения первичного контура вместо вторичного.

539. Как следует из этих экспериментов, полный ток индукции, обусловленный одновременным перемещением A из A_1 в A_2 и B из B_1 в B_2, при котором ток в A изменяется от γ_1 до γ_2, зависит только от начального состояния A_1, B_1, γ_1 и конечного A_2, B_2, γ_2 и совсем не зависит от характера промежуточных состояний, через которые может проходить система.

Следовательно, величина полного тока индукции должна иметь вид $F(A_2, B_2, \gamma_2) - F(A_1, B_1, \gamma_1)$, где F есть функция A, B и γ.

Относительно вида этой функции нам, согласно п. 536, известно, что при отсутствии движения, т. е. когда $A_1=A_2$ и $B_1=B_2$, ток индукции пропорционален первичному току. Следовательно, γ входит просто как один из множителей, другой же множитель является функцией формы и положения контуров A и B.

Мы также знаем, что значение этой функции зависит от относительных, а не от абсолютных положений A и B, поэтому она должна допускать выражение в виде функции расстояний между различными элементами, из которых составлены контуры, и от углов, которые эти элементы образуют друг с другом.

Пусть M будет этой функцией, тогда полный ток индукции может быть записан как $C\{M_1\gamma_1 - M_2\gamma_2\}$, где C — проводимость вторичного контура, $M_1\gamma_1$ — начальные, $M_2\gamma_2$ — конечные значения M и γ.

Эти эксперименты, таким образом, показали, что полный ток индукции зависит от изменения некоторой величины $M\gamma$, а оно может возникнуть либо из-за вариации первичного тока γ, либо от каких-либо движений первичного или вторичного контура, изменяющих M.

540. Концепция, связанная с существованием такой величины, от изменения которой (но не от ее абсолютного значения) зависит ток индукции, встречается у Фарадея на ранней стадии его «*Исследований*» [8]. Он обнаружил, что вторичный

---

[8] *Exp. Res.*, series I, 60.

контур, покоящийся в электромагнитном поле, напряженность которого остается постоянной, не проявляет никаких электрических эффектов, в то время как если поле приобретет то же самое состояние внезапно, это приводит к возникновению тока. Далее, если первичный контур удаляется из поля или магнитные силы устраняются, то возникает ток противоположного вида. Фарадей в связи с этим усматривал во вторичном контуре, находящемся в электромагнитном поле, «особое электрическое состояние вещества», которому дал название электротонического состояния. Впоследствии он счел возможным освободиться от этой идеи при помощи соображений, основанных на линиях магнитной силы [9], но даже в своих позднейших «*Исследованиях*» [10] он говорит: «Снова и снова в уме моем настойчиво возникает идея *электротонического* состояния» [11].

Вся история возникновения и развития этой идеи в голове Фарадея так, как она показана в его опубликованных «*Исследованиях*», вполне заслуживает изучения. Ход экспериментов, направляемых напряженными усилиями его мысли без помощи каких-либо математических вычислений, привел Фарадея к необходимости признания существования некоторой величины, которая, как мы теперь знаем, является величиной математической и которая даже может быть названа основной величиной в теории электромагнетизма. Но, поскольку Фарадей был подведен к этой концепции чисто экспериментальным путем, он приписал ей физическое существование, предположив, что это есть особое состояние материи; правда, он был готов отставить эту теорию сразу же, как только ему удалось бы объяснить явления с помощью любых более привычных рассуждений.

Другие исследователи пришли к этой идее чисто математическим путем, но значительно позже, и, насколько я знаю, никто из них не распознал в своей рафинированной математической идее о потенциале двух контуров смелую гипотезу Фарадея об электротоническом состоянии. Поэтому те, кто знакомились с этим предметом, следуя указаниям выдающихся исследователей, которые впервые выразили его законы в математической форме, иногда находили для себя затруднительным оценить научную точность формулировок, данных Фарадеем в первых двух сериях его «*Исследований*» с такой удивительной полнотой.

Научное значение фарадеевской концепции об электротоническом состоянии состоит в нацеливании нашего сознания на освоение некоторой новой величины, от изменения которой зависят реальные явления. Однако без дальнейшего, существенного по сравнению с Фарадеем, развития этой концепции она не могла бы эффективно служить для объяснения явлений. К этому вопросу мы еще вернемся в п. 584.

541. Гораздо более мощным методом в руках Фарадея был метод, связанный с использованием тех самых линий магнитной силы, которые всегда стояли перед его мысленным взором, когда он исследовал магниты и токи; изображение линий с помощью опилок Фарадей справедливо относил [12] к числу наиболее ценных вспомогательных средств, имеющихся у экспериментатора.

Фарадей считал, что не только направление этих линий выражает направление магнитной силы, но и что их число и концентрация определяют напряженность

[9] *Exp. Res.*, series II, 242.
[10] *Exp. Res.*, 3269.
[11] *Exp. Res.*, 60, 1114, 1661, 1729, 1733.
[12] *Exp. Res.*, 3234.

силы; в своих последних *«Исследованиях»* [13] он показал, каким образом следует представлять единичные силовые линии. В различных частях этого трактата я объяснил, как соотносятся свойства, которые Фарадей распознавал в силовых линиях, с математическими условиями для электрических и магнитных сил, и как фарадеевское замечание об единичных линиях и о числе линий внутри определенных границ может быть сделано математически точным. См. п. 82, 404, 490.

В первой серии своих *«Исследований»* [14] он показывает, как направление тока в контуре, часть которого является подвижной, зависит от характера пересечения линий магнитной силы этой движущейся частью контура.

Во второй серии [15] он показывает, как можно объяснить явления, вызываемые изменением силы тока или мощности магнита, если предположить, что система силовых линий отжимается от провода или магнита или прижимается к ним в зависимости от того, возрастает или уменьшается их мощность.

Я не знаю, с какой степенью ясности он в то время придерживался доктрины, которая была столь четко изложены им впоследствии [16], что движущийся проводник при пересечении силовых линий суммирует действие, обусловленное площадью или сечением этих силовых линий. Такой подход, однако, не должен казаться новым, если принять во внимание исследования, изложенные во второй серии [17].

Концепция, которой придерживался Фарадей относительно непрерывности силовых линий, исключала возможность их внезапного рождения там, где раньше их не существовало вообще. Следовательно, число силовых линий, пронизывающих проводящий контур, можно менять лишь путем перемещения контура поперек силовых линий или перемещением силовых линий поперек контура. В любом случае в контуре образуется ток.

Число силовых линий, проходящих сквозь контур в произвольный момент времени, математически эквивалентно более ранней концепции Фарадея об электротоническом состоянии этого контура; оно представлено величиной $M\gamma$.

Только после того, как определение электродвижущей силы (п. 69, 274) и способы ее измерения были сделаны более точными, мы можем полностью сформулировать истинный закон магнитоэлектрической индукции следующим образом:

Полная электродвижущая сила, действующая вдоль контура в произвольный момент времени, измеряется скоростью уменьшения числа линий магнитной силы, проходящих сквозь контур.

Будучи проинтегрированным по времени, это утверждение становится таким:

Интеграл по времени от полной электродвижущей силы, действующей вдоль контура, вместе с числом проходящих сквозь контур линий магнитной силы составляет постоянную величину.

Вместо того, чтобы говорить о числе линий магнитной силы, мы можем говорить о потоке магнитной индукции сквозь контур или о поверхностном интегра-

---

[13] *Exp. Res.*, 3122.
[14] *Exp. Res.*, 114.
[15] *Exp. Res.*, 238.
[16] *Exp. Res.*, 3082, 3087, 3113.
[17] *Exp. Res.*, 217.

ле от магнитной индукции, распространенном на любую поверхность, ограниченную контуром.

Мы потом снова вернемся к этому методу Фарадея. Перед этим нам следует перечислить теории индукции, основанные на других соображениях.

Закон Ленца

542. В 1834 г. Ленц [18] сформулировал следующее замечательное соотношение между явлениями механического действия электрических токов (так, как они были определены формулой Ампера) и индукцией электрических токов, обусловленной относительным движением проводников. Более ранняя попытка установления такого соотношения была изложена Ритчи (Ritchie) в журнале *Philosophical Magazine* в январе того же года, но направление индуцированного тока в каждом случае было установлено им неверно. Закон Ленца состоит в следующем:

Если в первичном контуре А течет постоянный ток и если при перемещении первичного контура А или вторичного контура В в этом вторичном контуре В индуцируется ток, то его направление будет таким, чтобы своим электромагнитным воздействием на А он стремился воспрепятствовать относительному перемещению контуров.

Ф. Е. Нейман [19] основал, опираясь на этот закон, свою математическую теорию индукции, в которой установил математический закон для токов индукции, вызванных движением первичного или вторичного проводника. Он показал, что величина M, названная нами потенциалом одного контура на другом, совпадает с электромагнитным потенциалом одного контура на другом, который мы уже изучали в связи с формулой Ампера.

Таким образом, мы можем считать, что математический метод, ранее примененный Ампером для описания механического действия токов, был распространен Ф. Е. Нейманом на индукцию токов.

543. Вскоре Гельмгольц в своем «*Очерке о сохранении силы*» [20] и сэр У. Томсон [21], занявшийся этим вопросом независимо от него, но несколько позже, сделали шаг, представляющий еще большую научную важность. Они показали, что открытая Фарадеем индукция электрических токов может быть выведена математически путем применения принципа сохранения энергии из открытых Эрстедом и Ампером электромагнитных действий.

Гельмгольц рассматривает случай проводящего контура с сопротивлением R, в котором действует электродвижущая сила A, возникающая от вольтовой или термоэлектрической батареи. Ток в контуре в какой-то момент времени равен I. Он предполагает, что движется вблизи контура какой-либо магнит и что его потенциал относительно проводника равен V; поэтому в течение любого малого интервала времени dt энергия, сообщаемая магниту электромагнитным действием, равна $I(dV/dt)dt$.

---

[18] Pogg. *Ann.*, XXXI, p. 483 (1834).

[19] *Berlin Akad.*, 1845 and 1847.

[20] Прочитано вначале перед Берлинским физическим обществом 23 июля 1847 г. Затем переведено в «Научных трудах» Тейлора (Tailor's «Scientific Memoirs», part II, p. 114).

[21] *Trans. Brit. Ass.*, 1848 and *Phil. Mag.*, Dec. 1851. См. также его статью «Переходные электрические токи» («Transient Electric Currents», *Phil. Mag.*, June 1853).

Работа, затраченная на образование тепла в контуре, равна (в соответствии с законом Джоуля, п. 242) $I^2R\,dt$, а работа, затраченная электродвижущей силой A на поддержание тока I в течение времени dt, равна $AI\,dt$. Следовательно, так как полная выполненная работа должна быть равна работе затраченной, то

$$AI\,dt = I^2R\,dt + I\frac{dV}{dt}\,dt.$$

Отсюда мы находим силу тока: $I = \dfrac{A - \frac{dV}{dt}}{R}$.

Но значение A мы можем выбрать любым по своему усмотрению. Возьмем $A=0$, тогда, $I = -\dfrac{1}{R}\dfrac{dV}{dt}$, или, иначе говоря, должен существовать ток, обусловленный движением магнита, равный току, обусловленному электродвижущей силой — (dV/dt).

Полный индуцированный ток за время движения магнита от места, где его потенциал V_1, к месту, где его потенциал V_2, равен

$$\int I\,dt = -\frac{1}{R}\int\frac{dV}{dt}\,dt = \frac{1}{R}(V_1 - V_2),$$

и, следовательно, полный ток не зависит от скорости или пути магнита, а зависит только от его начального и конечного положений.

В своем первоначальном исследовании Гельмгольц принял систему единиц, основанную на измерении тепла, образуемого током в проводнике. Рассматривая единицу тока как произвольную, мы получим, что единица сопротивления есть сопротивление проводника, в котором единичный ток за единицу времени порождает единицу тепла. Единицей электродвижущей силы в этой системе является такая, которая требуется для получения единичного тока в проводнике с единичным сопротивлением. Принятие этой системы единиц делает необходимым введение в уравнения величины a, являющейся механическим эквивалентом единицы тепла. Поскольку мы неизменно принимаем либо электростатическую, либо электромагнитную систему единиц, то этот множитель не встречается в приводимых здесь уравнениях.

544. Гельмгольц вычисляет также ток индукции для случая, когда проводящий контур и контур, несущий постоянный ток, движутся друг относительно друга.

Пусть R_1, R_2 будут сопротивления; I_1, I_2 — токи; A_1, A_2 — внешние электродвижущие силы, а V — потенциал одного контура на другом при единичном токе в каждом из контуров, тогда, как и раньше, мы имеем

$$A_1I_1 + A_2I_2 = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_1I_2\frac{dV}{dt}.$$

Если мы предположим, что ток I_1 является первичным, а ток I_2 настолько мал по сравнению с I_1, что своей индукцией он не вносит ощутимого изменения в I_1, так что можно положить $I_1 = \dfrac{A_1}{R_1}$, тогда получим $I_2 = \dfrac{A_2 - I_1\frac{dV}{dt}}{R_2}$.

Этот результат может быть интерпретирован точно так же, как это было сделано в случае магнита.

Если же мы предположим, что ток I_2 является первичным, а ток I_1 — много меньшим I_2, то для I_1 получим $I_1 = \frac{A_1 - I_2 \frac{dV}{dt}}{R_1}$.

Это показывает, что при одинаковых токах электродвижущая сила от первого контура во втором равна электродвижущей силе от второго контура в первом, какую бы форму ни имели эти контуры.

В указанной работе Гельмгольц не обсуждает случай индукции, обусловленной усилением или ослаблением первичного тока или индукции тока на самого себя. Томсон [22] применил тот же самый принцип к определению механического действия тока; он указал, что, когда работа совершается взаимодействием двух постоянных токов, их механическое действие *увеличивается* на ту же самую величину, и, следовательно, батарея должна обеспечить *двойное* количество работы по отношению к той, которая требуется для поддержания токов при преодолении сопротивления контуров [23].

545. Введение В. Вебером системы абсолютных единиц для измерения электрических величин является одним из наиболее важных шагов, способствовавших развитию науки. Поставив вместе с Гауссом измерение магнитных величин в ранг высшей категории точности, Вебер в его «*Электромагнитных измерениях*» не только продолжает излагать свои глубокие принципы установления подлежащих использованию единиц, но и дает определение отдельных электрических величин через значения этих единиц с такой степенью точности, которой ранее никто даже и не пытался достигнуть. Как электромагнитная, так и электростатическая системы единиц обязаны своим развитием и практическим применением именно этим исследованиям.

Вебер создал также общую теорию электрического действия, из которой вывел как электростатическую, так и электромагнитную силы, а также индукцию электрических токов. Мы рассмотрим эту теорию вместе с некоторыми ее обобщениями, полученными недавно, в отдельной главе (см. п. 846).

ГЛАВА IV

О САМОИНДУКЦИИ ТОКА

546. Девятая серия «*Исследований*» Фарадея посвящена изучению класса явлений, вызываемых током в проводе, образующем катушку электромагнита.

М-р Дженкин обнаружил, что хотя и нельзя произвести заметного удара при непосредственном воздействии гальванической системы, состоящей только из одной пары пластин, тем не менее сильный удар будет ощущаться, если пропустить ток через катушку электромагнита и затем прервать контакт между концами двух

[22] Mechanical Theory of Electrolysis, *Phil. Mag.*, Dec. 1851.

[23] Nichol's *Cyclopaedia of Physical Science*, ed. 1860, Article «Magnetism, Dynamical Relations of», and Reprint, § 571.

проводов, находящихся в руках. Такой удар не ощущается при замыкании контакта.

Фарадей показал, что и это, и другие описываемые им явления обусловлены тем же самым индуктивным действием, которое, по его наблюдениям, ток оказывает на соседние проводники. В данном случае, однако, индуктивному действию подвергается сам токонесущий проводник, а поскольку он расположен ближе к различным элементам тока, чем любой другой провод, то и индуктивное действие оказывается гораздо более сильным.

547. Как замечает, впрочем, Фарадей [1], «первая мысль, которая приходит в голову, состоит в том, что циркулирующее в проводе электричество обладает чем-то, похожим на импульс или инерцию». Действительно, когда мы рассматриваем один-единственный провод, то явления в точности аналогичны явлениям в трубе, наполненной водой, текущей непрерывным потоком. Если при протекании потока воды быстро закрыть конец трубы, то импульс воды создаст резкое повышение давления, значительно превышающее давление, обусловленное перепадом уровней воды, что может привести к разрыву трубы.

Если же перекрыть основное отверстие, оставив воде возможность вытекать узкой струей, то она будет выбрасываться с гораздо большей скоростью, чем под действием гидростатического напора, а если она имеет возможность вытекать через клапан в резервуар, то это будет происходить, даже когда давление в резервуаре превышает давление, обусловленное перепадом уровней воды.

Именно на этом принципе построен гидравлический «домкрат», поднимающий небольшое количество воды на большую высоту при помощи большого количества воды, стекающего вниз с гораздо меньшей высоты.

548. Эффекты, связанные с инерцией жидкости в трубе, зависят лишь от количества протекающей через трубу жидкости, от длины трубы и от ее поперечного сечения на разных участках. Они не зависят от всего, что находится вне трубы, а при неизменной длине трубы — от того, как труба изогнута.

В случае провода с током положение иное, поскольку эффект очень мал, если длинный провод сложен вдвое; эффект больше, если эти две части разнесены друг от друга, он еще больше, если провод свернут в спираль, и максимален, если внутрь такой спиральной катушки поместить кусок мягкого железа.

Опять-таки если взять второй провод и, изолировав его от первого, свернуть их вместе в катушку, то эффект не изменится, если второй провод разомкнут; если же второй провод образует замкнутый контур, то в нем возникает индукционный ток и эффекты самоиндукции в первом проводе замедляются.

549. Эти результаты ясно показывают, что если данные явления обусловлены импульсом, то этот импульс, конечно, не является импульсом электричества в проводе, поскольку тот же самый провод, передающий тот же самый ток, обнаруживает эффекты различные в зависимости от формы провода, и, даже когда форма остается неизменной, присутствие других тел, таких, как кусок железа или замкнутый металлический контур, влияет на результат.

550. Для человеческого разума, который однажды усмотрел аналогию между явлениями самоиндукции и движения материальных тел, все-таки трудно полностью отказаться от обращения к ней или допустить, что она является чисто

[1] *Exp. Res.*, 1077.

поверхностной и вводящей в заблуждение. Основополагающее динамическое представление о том, что материя способна воспринимать импульс и энергию через движение настолько переплелось с нашим образом мыслей, что стоит нам уловить лишь проблеск этой идеи в любой части природы, как мы чувствуем, что перед нами открывается путь, который рано или поздно приведет к полному пониманию предмета.

551. В случае электрического тока мы обнаруживаем, что, когда начинает действовать электродвижущая сила, она не сразу создает полный ток; ток нарастает постепенно. Что же делает электродвижущая сила в то время, когда противостоящее ей сопротивление не может уравновесить ее? Она увеличивает электрический ток.

Обычная сила, действующая на тело в направлении его движения, увеличивает его импульс и сообщает ему кинетическую энергию, т. е. способность совершать работу за счет этого движения.

Аналогичным образом часть электродвижущей силы, не встречающая сопротивления, идет на увеличение электрического тока. Обладает ли созданный таким образом электрический ток импульсом или кинетической энергией?

Мы уже показали, что у него есть что-то, очень напоминающее импульс, оно оказывает сопротивление внезапной остановке и может на короткое время вызывать большую электродвижущую силу.

Но проводящий контур, в котором течет электрический ток, обладает способностью совершать работу за счет этого тока, и эту способность нельзя назвать чем-то, очень напоминающим энергию, ибо это действительно и есть энергия.

Так, если ток предоставить самому себе, он будет продолжать циркулировать до тех пор, пока не прекратится из-за сопротивления контура. До момента остановки он произведет определенное количество тепла, которое, будучи выраженным в динамической мере, равно энергии, первоначально существовавшей в токе.

С другой стороны, предоставленный самому себе ток можно заставить совершать механическую работу по перемещению магнитов: индуктивный эффект этих перемещений будет, по закону Ленца, останавливать ток скорее, чем это происходило бы при наличии одного лишь сопротивления контура. При этом часть энергии тока может быть превращена не в тепло, а в механическую работу.

552. Итак, система, содержащая электрический ток, является, по-видимому, вместилищем какого-то вида энергии, и, поскольку мы не можем создать себе иного представления об электрическом токе, кроме как о явлении кинетическом [2], его энергия должна быть кинетической, т. е. энергией, которой движущееся тело обладает благодаря своему движению.

Мы уже показали, что электричество в проводе нельзя рассматривать как некое движущееся тело, в котором и следует отыскивать эту энергию, ведь энергия движущегося тела ни от чего, находящегося вне тела, не зависит, в то же время присутствие около тока других тел меняет его энергию.

Мы, таким образом, подошли к вопросу о том, не может ли существовать какого-либо движения вне провода, в пространстве, не занятом электрическим током, в котором проявляются электромагнитные эффекты тока.

---

[2] Faraday, *Exp. Res.*, 283.

Сейчас я не буду вдаваться в причины, по которым такие движения следует искать преимущественно в том, а не другом месте, или рассматривать эти движения как движения того, а не иного вида.

То, что я предполагаю сделать сейчас, состоит в изучении следствий, вытекающих из предположения о том, что явления, связанные с электрическим током, относятся к явлениям движущейся системы, причем от одной части к другой это движение передается силами, природу и законы которых мы даже не будем и пытаться определить, поскольку для любой связанной системы их можно исключить из уравнений движения, пользуясь методом Лагранжа.

В последующих пяти главах трактата я предполагаю, исходя из такого рода динамической гипотезы, вывести основную структуру теории электричества, вместо того чтобы следовать пути, который привел Вебера и других исследователей ко многим замечательным открытиям и экспериментам, а также к представлениям, некоторые из которых столь же прекрасны, сколь и смелы. Я избрал данный метод, желая продемонстрировать существование и других способов рассмотрения явлений, и он по сравнению с методами, вытекающими из гипотезы непосредственного действия на расстоянии, кажется мне более удовлетворительным и в то же время более согласованным с методами, излагаемыми в других частях этой книги.

ГЛАВА V

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

553. В четвертом разделе второй части своей *«Аналитической механики»* Лагранж дал метод сведения обычных динамических уравнений движения отдельных частей системы со связями к набору уравнений, число которых равно числу степеней свободы системы.

Уравнения движения такой связанной системы были представлены Гамильтоном в другой форме, что привело к значительному развитию этого высшего раздела чистой динамики [1].

Мы посвятим эту главу изложению идей динамики с физической точки зрения, поскольку сочли необходимым выразить их в форме, пригодной для непосредственных применений в физических вопросах, пытаясь отнести электрические явления к области, охватываемой динамикой.

554. Целью Лагранжа было подчинить динамику власти математики. Он начал с того, что выразил элементарные динамические соотношения через соответствующие связи между чисто алгебраическими величинами, и из полученных таким образом уравнений вывел чисто алгебраическим путем окончательные уравнения. В уравнениях движения составных частей системы появляются определен-

[1] См. Prof. Cayley's «Report on Theoretical Dynamics», *British Association*, 1857 and Thomson and Tait's *Natural Philosophy*.

ные величины, представляющие реакции между отдельными частями системы; они вовлечены в игру благодаря их физическим связям; если взглянуть на исследования Лагранжа с математической точки зрения, то они представляют собой метод исключения этих величин из окончательных уравнений.

Прослеживая этапы этого исключения, разум упражняется в проведении вычислений и потому должен бы оставаться свободным от вмешательства динамики. Однако мы поставили своей целью развитие именно этих динамических идей; поэтому, обращаясь к трудам математиков, мы переводим их результаты с математического языка на язык динамики, с тем чтобы соответствующие слова могли мысленно ассоциироваться с некоторым свойством движущихся тел, а не просто с каким-либо алгебраическим действием.

Язык динамики был значительно расширен теми, кто в популярной форме изложил учение о сохранении энергии. В дальнейшем будет видно, что большая часть последующих утверждений была навеяна нам исследованиями, приведенными в «*Натуральной Философии*» Томсона и Тэта, особенно тем методом, который исходит из теории импульсных сил. Я применил этот метод, чтобы отойти от явного рассмотрения движения каких-либо иных частей системы, кроме координат и переменных, определяющих движение всей системы в целом. Важно, конечно, чтобы читатель был в состоянии проследить связь движения каждой из частей системы с движением переменных, но нет никакой необходимости делать это по ходу получения окончательных уравнений, не зависящих от конкретного вида этих связей.

Переменные

555. Число степеней свободы системы — это такое число величин, которые должны быть заданы для полного определения положения системы. Этим величинам можно придавать различные формы, но число их определяется только природой самой системы и не может быть изменено.

Для того чтобы конкретизировать принятые нами представления, мы можем вообразить себе некоторую систему, которая при помощи подходящего механизма связана с определенным числом подвижных частей, не способных совершать никаких других движений, кроме прямолинейных. Следует предположить, что этот воображаемый механизм, соединяющий рассматриваемую систему с каждой из подвижных частей, не обладает ни трением, ни инерцией и что под действием приложенных сил он не испытывает деформации. Его назначение состоит лишь в том, чтобы облегчить работу воображения и приписать положение, скорость и импульс тому, что в исследованиях Лагранжа фигурирует в качестве чисто алгебраических величин.

Пусть q обозначает положение одной из подвижных частей, определенное через расстояние от некоторой фиксированной точки на линии ее движения. Будем отличать величины q, соответствующие различным частям, с помощью индексов $_1$, $_2$, ...; в случае набора величин, принадлежащих только к одной части системы, этот индекс может быть опущен.

Пусть заданы значения всех переменных (q), тогда положения всех подвижных частей известны и благодаря воображаемому механизму определена конфигурация всей системы.

Скорости

556. Во время движения системы ее конфигурация некоторым определенным образом изменяется, и поскольку она в каждый момент времени полностью определяется значениями переменных (q), то скорость каждой части системы, равно как и ее конфигурация, также будет определена полностью, если известны значения переменных (q) вместе с их скоростями (dq/dt, или согласно обозначениям Ньютона $\dot{q}$).

Силы

557. Распоряжаясь нужным образом движением переменных, можно осуществить любое движение системы, совместимое с характером связей. Для того чтобы произвести это движение перемещением изменяемых частей системы, к ним должны быть приложены силы.

Силу, которую следует приложить к произвольной переменной q_r, мы обозначим через F_r. Система сил (F) механически эквивалентна (благодаря наличию связей) той произвольной системе сил, которая в действительности производит движение.

Импульсы

558. Когда тело перемещается, сохраняя неизменной свою конфигурацию по отношению к действующей на него силе (как, например, в случае силы, действующей на одиночную частицу вдоль линии ее движения), то движущая сила измеряется скоростью увеличения импульса. Если F есть движущая сила, а p — импульс, то $F=dp/dt$, откуда $p=\int F\,dt$.

Интеграл от силы по времени называется Импульсом силы, поэтому мы можем утверждать, что импульс (количество движения) тела равен импульсу силы, который переводит это тело из состояния покоя в данное состояние движения.

В случае связанной системы, находящейся в движении, ее конфигурация непрерывно меняется, причем быстрота этого изменения зависит от скоростей ($\dot{q}$), и мы не можем уже предполагать, что импульс системы равен интегралу по времени от действующей на него силы.

Но приращение любой переменной δq не может превышать $\dot{q}\delta t$, где δt — время, за которое происходит приращение, а $\dot{q}'$ — наибольшее значение скорости за это время. Очевидно, что для системы, движущейся из состояния покоя под действием сил одного направления, максимальной является конечная скорость.

Если конечная скорость и конфигурация системы заданы, мы можем представлять себе, что скорость сообщается системе за очень малое время δt и что начальная конфигурация отличается от конечной на величины δq_1, $\delta q_2, \ldots$, которые соответственно меньше величин $\dot{q}_1\delta t$, $\dot{q}_2\delta t, \ldots$.

Чем меньшим предполагается приращение времени δt, тем большими должны быть приложенные силы, но интеграл по времени от каждой силы, или импульс каждой силы, останется конечным. Предельное значение импульса силы при уменьшении интервала времени до нуля определяется как *мгновенный* импульс силы, а импульс системы p, соответствующий любой переменной q, определяется

как относящийся к той же самой переменной импульс силы, при котором система мгновенно переводится из состояния покоя в заданное состояние движения.

Такой подход, согласно которому импульсы системы могут создаваться в результате действия на покоящуюся систему мгновенных импульсов сил, вводится лишь как способ определения величины импульсов, ибо импульсы системы зависят только от мгновенного состояния ее движения, но не от процесса получения этого состояния.

В связанной системе импульс, соответствующий любой переменной, является в общем случае линейной функцией скоростей всех переменных вместо того, чтобы быть величиной, пропорциональной скорости, как это имеет место в динамике одной частицы.

Импульсы силы, необходимые для мгновенного изменения скоростей системы от $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$,. . . до $\dot{q}_1'$, $\dot{q}_2'$,. . ., очевидно, равны изменениям импульсов, относящихся к различным переменным $p_1'-p_1$, $p_2'-p_2$.

Работа, совершаемая малым импульсом силы

559. Работа, совершаемая силой F_1 за время действия импульса силы, равна пространственному интегралу от силы, или

$$W=\int F_1 dq_1, \quad =\int F_1\dot{q}_1 dt.$$

Если $\dot{q}_1'$—наибольшее, а $\dot{q}_1''$—наименьшее значение скорости $\dot{q}_1$ за время действия силы, то работа W должна быть меньшей, чем $\dot{q}_1\int F\,dt$, или $\dot{q}_1'(p_1'-p_1)$, и большей, чем $\dot{q}_1''\int F\,dt$, или $\dot{q}_1''(p_1'-p_1)$.

Если мы теперь предположим, что импульс силы $\int F\,dt$ будет беспредельно уменьшаться, то величины $\dot{q}_1'$ и $\dot{q}_1''$ будут сближаться и в конечном счете совпадут с величиной $\dot{q}_1$; значит, мы можем написать $p_1'-p_1=\delta p_1$, так что совершенная работа в пределе будет равна $\delta W_1=\dot{q}_1\delta p_1$, или *работа, совершаемая очень малым импульсом силы, в пределе равна произведению импульса силы на скорость.*

Приращение кинетической энергии

560. Когда на приведение в движение консервативной системы затрачивается некоторая работа, то системе сообщается энергия, в результате у нее появляется способность совершать равное количество работы на преодоление сопротивлений при переходе системы в состояние покоя.

Энергия, которой обладает система благодаря своему движению, называется кинетической энергией; эта энергия сообщается системе в форме работы, совершаемой силами, приводящими ее в движение.

Если T — кинетическая энергия системы, и она за счет действия бесконечно малого импульса сил с компонентами δp_1, δp_2,. . . становится равной $T+\delta T$, то приращение δT должно быть суммой количества работ, совершаемых составляющими импульса силы, или в формульном представлении

$$\delta T=\dot{q}_1\delta p_1+\dot{q}_2\delta p_2+\ldots, =\Sigma\,(\dot{q}\delta p). \qquad (1)$$

Мгновенное состояние системы полностью определено, если заданы ее переменные и импульсы. Следовательно, кинетическая энергия, зависящая от мгновенного состояния системы, может быть выражена через переменные (q) и импульсы (p). Этот способ представления T был введен Гамильтоном. Когда T выражена таким образом, мы будем отличать это при помощи индекса $_p$, т. е. T_p.

Полная вариация T_p равна

$$\delta T_p = \sum \left(\frac{dT_p}{dp} \delta p \right) + \sum \left(\frac{dT_p}{dq} \delta q \right). \tag{2}$$

Последний член может быть записан в виде $\sum \left(\frac{dT_p}{dq} \dot{q} \delta t \right)$, он уменьшается вместе с δt и в пределе, когда импульс силы становится мгновенным, исчезает.

Следовательно, приравнивая в уравнениях (1) и (2) коэффициенты перед δp, получаем

$$\dot{q} = dT_p/dp, \tag{3}$$

или, *скорость, соответствующая переменной q, равна частной производной от T_p по соответствующему импульсу p.*

Мы пришли к этому результату, рассматривая импульсные силы и тем самым избежав рассмотрения изменения конфигурации системы за время их действия. Но мгновенное состояние системы оказывается одним и тем же во всех отношениях независимо от того, была ли система приведена в данное состояние движения из состояния покоя путем приложения к ней короткодействующих импульсных сил или же система пришла в это состояние каким-то другим способом, хотя бы и постепенным.

Другими словами, и переменные, и соответствующие скорости, и импульсы зависят от фактического состояния движения системы в данный момент, а не от его предыстории.

Следовательно, уравнение (3) одинаково справедливо, предполагаем ли мы, что состояние движения системы обусловлено импульсными силами или силами, действующими каким бы то ни было другим способом.

Мы можем поэтому устранить из рассмотрения импульсные силы вместе со всеми ограничениями, налагаемыми на продолжительность их действия и на изменения конфигурации системы в течение их действия.

Уравнения движения Гамильтона

561. Мы показали уже, что

$$dT_p/dp = \dot{q}. \tag{4}$$

Пусть система движется произвольным образом, подчиняясь наложенным на нее связям, тогда вариации p и q будут равны

$$\delta p = (dp/dt)\delta t, \qquad \delta q = \dot{q}\delta t. \tag{5}$$

Отсюда

$$\frac{dT_p}{dp} dp = \frac{dp}{dt} \dot{q} \delta t, \ = \frac{dp}{dt} \delta q, \tag{6}$$

а полная вариация T_p равна

$$\delta T_p=\sum\left(\frac{dT_p}{dp}\delta p+\frac{dT_p}{dq}\delta q\right), =\sum\left(\left(\frac{dp}{dt}+\frac{dT_p}{dq}\right)\delta q\right). \tag{7}$$

Но приращение кинетической энергии появляется за счет работы, совершаемой приложенными силами, т. е.

$$\delta T_p=\Sigma\ (F\,\delta q). \tag{8}$$

Вариации δq, входящие в эти два выражения, независимы, и мы вправе приравнять в (7) и (8) коэффициенты при них. В результате получаем

$$F_r=\frac{dp_r}{dt}+\frac{dT_p}{dq_r}, \tag{9}$$

где импульс p_r и сила F_r относятся к переменной q_r.

Уравнений такого вида существует столько же, сколько и переменных. Эти уравнения получены Гамильтоном. Они показывают, что сила, соответствующая какой-либо переменной, представляется в виде суммы двух частей. Первая есть скорость увеличения во времени импульса, относящегося к данной переменной. Вторая часть есть скорость увеличения кинетической энергии, приходящейся на единицу приращения данной переменной при условии, что другие переменные, а также все импульсы остаются постоянными.

Кинетическая энергия, выраженная через импульсы и скорости

562. Пусть p_1, p_2,... — импульсы, а $\dot q_1$, $\dot q_2$,... — скорости в данный момент времени, и пусть p_1, p_2,..., $\dot{\mathrm{q}}_1$, $\dot{\mathrm{q}}_2$,... — другая система импульсов и скоростей, таких, что

$$\mathrm{p}_1=np_1,\qquad \dot{\mathrm{q}}_1=n\dot q_1,\ldots \tag{10}$$

Ясно, что наборы p, $\dot{\mathrm{q}}$ будут совместны друг с другом, если совместны наборы p, $\dot q$.

Пусть теперь значение n изменяется на δn. Работа, совершаемая силой F_1, равна

$$F_1\delta\mathrm{q}_1=\dot{\mathrm{q}}_1\delta\mathrm{p}_1=\dot q_1 p_1 n\delta n. \tag{11}$$

Если n увеличивается от 0 до 1, то система переводится из состояния покоя в состояние движения ($\dot q$, p) и вся работа, затраченная на создание этого движения, равна

$$(\dot q_1 p_1+\dot q_2 p_2+\ldots)\int_0^1 n\,dn. \tag{12}$$

Но $\int_0^1 n\,dn=\frac{1}{2}$, а работа, затрачиваемая на создание движения, эквивалентна кинетической энергии. Отсюда

$$T_{p\dot q}=(p_1\dot q_1+p_2\dot q_2+\ldots)/2, \tag{13}$$

где через $T_{p\dot{q}}$ обозначена кинетическая энергия, выраженная через импульсы и скорости. Переменные q_1, q_2,. . . в это выражение не входят.

Таким образом, кинетическая энергия равна полусумме произведений импульсов на соответствующие скорости.

Выраженную в таком виде кинетическую энергию мы будем обозначать символом $T_{p\dot{q}}$. Она является функцией только импульсов и скоростей и не включает в себя сами переменные.

563. Существует и третий метод представления кинетической энергии, который обычно рассматривается как основной. Решая уравнения (3), мы можем выразить импульсы через скорости, а затем, вводя эти величины в (13), получим выражение для T, содержащее только скорости и переменные. Когда энергия T выражена в этом виде, мы будем отмечать ее символом $T_{\dot{q}}$. Именно в таком представлении кинетическая энергия фигурирует в уравнениях Лагранжа.

564. Ясно, что поскольку T_p, $T_{\dot{q}}$ и $T_{p\dot{q}}$ представляют собой три различных выражения для одной и той же величины, то $T_p+T_{\dot{q}}-2T_{p\dot{q}}=0$, или

$$T_p+T_{\dot{q}}-p_1\dot{q}_1-p_2\dot{q}_2-\ldots=0. \tag{14}$$

Отсюда, если варьируются все величины p, q, и $\dot{q}$, то

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1\right)\delta p_1+\left(\frac{dT_p}{dp_2}-\dot{q}_2\right)\delta p_1+\ldots\\&+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}-p_1\right)\delta\dot{q}_1+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}-p_2\right)\delta\dot{q}_2+\ldots\\&+\left(\frac{dT_p}{dq_1}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}\right)\delta q_1+\left(\frac{dT_p}{dq_2}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2}\right)\delta q_2+\ldots=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Вариации δp не являются независимыми от вариаций δq и $\delta\dot{q}$, так что мы не можем сразу утверждать, что коэффициент при каждой вариации в этом уравнении равен нулю. Но из уравнений (3) мы знаем, что

$$\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1=0,\ \ldots, \tag{16}$$

и поэтому члены, содержащие вариации δp, исчезают сами по себе.

Теперь уже все оставшиеся вариации δq и $\delta\dot{q}$ независимы, так что, приравнивая нулю коэффициенты при $\delta\dot{q}_1$ и т. д., мы находим

$$p_1=\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1},\quad p_2=\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2},\ \ldots, \tag{17}$$

или *составляющие импульса равны производным от $T_{\dot{q}}$ по соответствующим скоростям.*

Далее, приравнивая нулю коэффициенты при δq_1,. . . ,

$$\frac{dT_p}{dq_1}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}=0, \tag{18}$$

или *производная от кинетической энергии, выраженная как функция скоростей, равна по величине и противоположна по знаку производной от энергии T, выраженной как функция импульсов.*

В силу уравнения (18) мы можем записать уравнение движения (9) так:

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{dT_{\dot q}}{dq_1}, \tag{19}$$

или

$$F_1 = \frac{d}{dt}\frac{dT_{\dot q}}{d\dot q_1} - \frac{dT_{\dot q}}{dq_1}. \tag{20}$$

Уравнения движения в такой форме были даны Лагранжем.

565. В предыдущих исследованиях мы избегали рассмотрения вида функции, выражающей кинетическую энергию через скорости или импульсы, и приняли для нее единственное явное выражение

$$T_{p\dot q} = (p_1\dot q_1 + p_2\dot q_2 + \ldots)/2, \tag{21}$$

в котором кинетическая энергия выражена как полусумма произведений каждого импульса на соответствующую ему скорость.

Мы можем выразить скорости через частные производные от T_p по импульсам, как и в уравнении (3):

$$T_p = \frac{1}{2}\left(p_1\frac{dT_p}{dp_1} + p_2\frac{dT_p}{dp_2} + \ldots\right). \tag{22}$$

Это показывает, что T_p является однородной функцией вторых степеней импульсов p_1, p_2, . . .

Мы можем также выразить импульсы через $T_{\dot q}$ и найдем

$$T_{\dot q} = \frac{1}{2}\left(\dot q_1\frac{dT_{\dot q}}{d\dot q_1} + \dot q_2\frac{dT_{\dot q}}{d\dot q_2} + \ldots\right), \tag{23}$$

откуда видно, что $T_{\dot q}$ есть однородная функция вторых степеней скоростей $\dot q_1$, $\dot q_2$, ...

Если мы запишем

$$P_{11} \text{ вместо } \frac{d^2T_{\dot q}}{d\dot q_1^2}, \qquad P_{12} \text{ вместо } \frac{d^2T_{\dot q}}{d\dot q_1\, d\dot q_2}, \ \ldots$$

и

$$Q_{11} \text{ вместо } \frac{d^2T_p}{dp_1^2}, \qquad Q_{12} \text{ вместо } \frac{d^2T_p}{dp_1\, dp_2}, \ \ldots,$$

то, поскольку $T_{\dot q}$ и T_p являются функциями второй степени $\dot q$ и p соответственно, Q и P должны быть функциями только переменных q и не зависеть от скоростей и импульсов. Таким образом, мы получаем выражения для T:

$$2T_{\dot q} = P_{11}\dot q_1^2 + 2P_{12}\dot q_1\dot q_2 + \ldots, \tag{24}$$

$$2T_p = Q_{11}p_1^2 + 2Q_{12}p_1p_2 + \ldots. \tag{25}$$

Импульсы выражаются через скорости с помощью линейных уравнений

$$p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \ldots, \tag{26}$$

и скорости выражаются через импульсы с помощью линейных уравнений

$$\dot{q}_1 = Q_{11}p_1 + Q_{12}p_2 + \ldots. \tag{27}$$

В трактатах по динамике твердого тела коэффициенты, соответствующие величинам P_{11}, т. е. имеющие одинаковые индексы, называются моментами инерции, а коэффициенты, соответствующие величинам P_{12}, в которых индексы различны, называются произведениями инерции. Мы можем распространить эти названия и на более общую задачу, которая в настоящее время стоит перед нами и в которой эти величины, в отличие от случая твердого тела, не являются абсолютными константами, а зависят от переменных q_1, q_2, ...

Подобным же образом мы можем назвать коэффициенты типа Q_{11} моментами подвижности, а коэффициенты типа Q_{12} — произведениями подвижности. Однако нам не часто представится возможность говорить об этих самых коэффициентах подвижности.

566. Кинетическая энергия системы является величиной, существенно положительной или равной нулю. Отсюда следует, что коэффициенты должны быть такими, чтобы никакие вещественные значения переменных величин не могли бы сделать энергию отрицательной, независимо от того, выражена ли она через скорости или через импульсы.

Таким образом, существует целый набор необходимых условий, которым должны удовлетворять значения коэффициентов P. Эти условия следующие.

Все величины P_{11}, P_{12}, . . . должны быть положительны.

Все $(n—1)$ определителей, которые последовательно получаются из детерминанта

$$\begin{vmatrix} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & \ldots & P_{1n} \\ P_{21}, & P_{22}, & P_{23}, & \ldots & P_{2n} \\ P_{31}, & P_{32}, & P_{33}, & \ldots & P_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1}, & P_{n2}, & P_{n3}, & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

путем убирания членов, содержащих индекс 1, затем членов, содержащих индекс 1 или 2, и т. д., должны быть положительны.

Число условий для n переменных равно, таким образом, $2n—1$.

Коэффициенты Q подчиняются условиям того же вида.

567. В этой сводке основных принципов динамики системы со связями мы оставили вне поля зрения сам механизм, при помощи которого связаны различные части системы. Мы даже не выписали систему уравнений, показывающих зависимость движения какой-либо части системы от изменения переменных, и ограничили наше внимание лишь рассмотрением переменных, их скоростей, импульсов, а также сил, действующих на описываемые этими переменными части системы. Единственные принятые нами допущения состоят в том, что система имеет только

такие связи, в уравнения для которых время не входит явно, и что к системе применим принцип сохранения энергии.

Такое изложение методов чистой динамики не является излишним. Лагранж и большинство его последователей, которым мы обязаны этим методам, как правило, ограничивались лишь их демонстрацией, и, чтобы полностью сосредоточиться на рассматриваемых ими символах, они попытались исключить все понятия, кроме понятия чистой величины; они не только обходились без графических представлений, но избавились даже от понятий скорости, импульса и энергии, заменив их раз и навсегда просто символами в исходных уравнениях.

Развитие идей и методов чистой математики позволило, создав математическую теорию динамики, пролить свет на многие истины, открытие которых было бы невозможно без математической подготовки. И если нам предстоит построение динамической теории для других областей науки, мы должны проникнуться в равной мере и математическими методами, и этими динамическими истинами.

Образуя понятия и составляя терминологию в какой-либо науке, которая, подобно науке об электричестве, имеет дело с силами и их проявлениями, мы непременно должны руководствоваться идеями, присущими фундаментальной науке динамике. И тогда на начальной стадии развития этой науки нам удастся избежать несоответствия с уже установленными утверждениями, а после обретения более ясного понимания принятый нами язык может сослужить нам пользу, а не быть помехой.

ГЛАВА VI

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

568. В п. 552 мы показали, что существующий в контуре электрический ток обладает способностью совершать определенное количество механической работы независимо от поддерживающей его внешней электродвижущей силы. Но способность совершать работу в любом ее проявлении есть не что иное, как энергия, а все виды энергии по сути одинаковы, хотя и могут различаться по форме. Энергия электрического тока относится либо к той энергии, которая состоит в действительном движении материи, либо к той, которая состоит в способности вызывать движение, обусловленной наличием сил, действующих между телами, находящимися в определенных положениях относительно друг друга.

Энергия первого типа, т. е. энергия движения, называется кинетической; однажды понятая, она представляется таким фундаментальным фактом природы, что мы вряд ли можем воспринять возможность сведения ее к чему-либо другому. Второй вид энергии, зависящий от положения, называется потенциальной энергией и обусловлен действием того, что мы обычно называем силами, иначе говоря, тенденциями к изменению относительного положения. Хотя мы и можем принять существование этих сил как некий установленный факт, тем не менее мы всегда чувствуем, что любое объяснение того механизма, который приводит тела в движение, образует заметный вклад в наши знания.

569. Электрический ток нельзя понимать иначе, как явление кинетическое. Даже Фарадей, который постоянно пытался избавить свой интеллект от влияния тех ассоциаций, которые способны вызвать слова «электрический ток» и «электрическая жидкость», говорит об электрическом токе, как о «чем-то распространяющемся, а не просто как о состоянии»[1].

Эффекты, вызываемые током, такие, как электролиз и перенос электризации от одного тела к другому, относятся к действиям распространяющимся, т. е. к действиям, требующим времени для их осуществления, и, следовательно, являющимися по природе своей движениями.

Что касается скорости тока, то мы показали, что нам о ней ничего неизвестно; эта скорость может составлять и десятые доли дюйма в час, и сотни тысяч миль в секунду[2]. В любом случае мы настолько далеки от знания ее абсолютного значения, что даже не знаем, является ли направление, называемое нами положительным, истинным направлением движения или противоположным ему.

Однако здесь мы лишь предполагаем, что в электрическом токе заключено какого-то рода движение. Тому, что является причиной электрических токов, дано название Электродвижущей Силы. Оно применяется уже давно и с большой пользой, и ни разу не вызвало какой-либо несогласованности в научном языке. Электродвижущую силу всегда следует понимать как силу, действующую только на электричество, а не на тела, в которых оно существует. Ее никогда нельзя путать с обычной механической силой, которая действует только на тела и не действует на электричество внутри них. Если мы когда-либо установим формальную связь между электричеством и обычной материей, то, по-видимому, узнаем также и связь между электродвижущей и обычной силами.

570. Когда на тело действует обычная сила и тело подчиняется ее действию, то работа, совершаемая силой, измеряется произведением силы на величину смещения тела. Так, при пропускании воды через трубу работа, совершаемая в произвольном сечении, измеряется произведением давления жидкости в этом сечении на количество воды, проходящей через сечение.

Аналогично работа, совершаемая электродвижущей силой, измеряется произведением электродвижущей силы на количество электричества, которое проходит через сечение проводника под действием электродвижущей силы.

Работа, совершаемая электродвижущей силой, является по своей природе точно такой же, как и работа, совершаемая обычной силой; обе они измеряются одними и теми же стандартами, или единицами.

Часть работы, совершаемой электродвижущей силой, действующей на проводящий контур, расходуется на преодоление сопротивления контура и тем самым превращается в тепло. Другая часть работы расходуется на электромагнитные явления, изученные Ампером, при которых проводники приводятся в движение электромагнитными силами. Остальная часть работы тратится на увеличение кинетической энергии тока; эффекты, связанные с этой частью действия, проявляются в явлениях индукции токов, наблюдавшихся Фарадеем.

Таким образом, наши знания об электрических токах достаточны для того, чтобы распознать в системе материальных проводников, несущих токи, дина-

[1] *Exp. Res.*, 283.
[2] *Exp. Res.*, 1648.

мическую систему, являющуюся резервуаром энергии, одна часть которой может быть кинетической, а другая — потенциальной.

Природа связей отдельных частей этой системы между собой нам неизвестна, однако, поскольку в нашем распоряжении имеются динамические методы исследования, не требующие знания устройства системы, мы и применим их к этому случаю.

Вначале мы изучим те следствия, к которым приводит предположение о наиболее общем виде функции, выражающей кинетическую энергию системы.

571. Пусть система состоит из проводящих контуров, форма и положение которых определяются значениями переменных $x_1, x_2, \ldots$; их число равно числу степеней свободы системы.

Если бы вся кинетическая энергия системы была обусловлена движением этих проводников, она выражалась бы формулой

$$T=\frac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2+\ldots+(x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2+\ldots,$$

где символы $(x_1x_1), \ldots$ обозначают величины, которые мы назвали моментами инерции, а $(x_1x_2), \ldots$ обозначают произведения инерции.

Если X' — приложенная сила (стремящаяся увеличить координату x), необходимая для осуществления истинного движения, то, согласно уравнению Лагранжа, $\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}=X'$.

Когда T обозначает энергию, обусловленную только видимым движением, мы будем отмечать ее нижним индексом $_m$, т. е. как T_m.

Но в системе проводников, несущих электрические токи, часть кинетической энергии обусловлена существованием этих токов. Пусть движение электричества, а также всего того, чьим движением оно управляет, определяется другим набором координат $y_1, y_2, \ldots$; тогда T будет однородной функцией квадратов и произведений всех скоростей двух наборов координат. Мы, таким образом, можем разделить T на три части, в первой из которых T_m встречаются только скорости координат x, во второй T_e — только скорости координат y, а в третьей T_{me} каждый член содержит произведение скоростей двух координат, одной из которых является x, а второй — y.

Таким образом, мы имеем

$$T=T_m+T_e+T_{me},$$

где

$$T_m=\frac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2+\ldots+(x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2+\ldots,$$

$$T_e=\frac{1}{2}(y_1y_1)\dot{y}_1^2+\ldots+(y_1y_2)\dot{y}_1\dot{y}_2+\ldots,$$

$$T_{me}=(x_1y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1+\ldots.$$

572. В общей динамической теории коэффициенты перед каждым членом могут быть функциями всех координат, как x, так и y. Однако в случае электрических токов легко увидеть, что координаты класса y не входят в коэффициенты.

Действительно, если все электрические токи поддерживаются постоянными, а проводники покоятся, общее состояние поля остается неизменным. Но в этом

случае координаты y переменны, хотя скорости $\dot{y}$ постоянны. Следовательно, координаты y не могут входить в выражение для T или в другие выражения, относящиеся к чему-либо реальному.

Кроме того, согласно уравнению непрерывности, если проводники по своему характеру являются линейными контурами, для выражения силы тока в каждом из них требуется только одна переменная. Пусть скорости $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$, . . . представляют собой силы токов в нескольких проводниках.

Все это оставалось бы верным, и если вместо электрических токов мы имели бы потоки несжимаемой жидкости, текущей в гибких трубах. В этом случае скорости потоков вошли бы в выражение для T, но коэффициенты зависели бы только от переменных x, определяющих форму и положение труб.

В случае жидкости ее движение в одной трубе не влияет непосредственно на движение любой другой трубы или жидкости в ней. Следовательно, в значение T_e входят только квадраты скоростей $\dot{y}$, но не их произведения, а в T_{me} любая скорость $\dot{y}$ связана лишь с теми скоростями класса $\dot{x}$, которые принадлежат ее собственной трубе.

Мы знаем, что в случае электрических токов это ограничение не имеет места, поскольку токи в различных контурах действуют друг на друга. Следовательно, мы должны допустить наличие членов, включающих произведения вида $\dot{y}_1\dot{y}_2$, и это предполагает существование чего-то находящегося в движении, которое зависит от силы обоих электрических токов $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_2$. И эта движущаяся материя, чем бы она ни оказалась, не находится во внутренних областях проводников, несущих оба тока, а, вероятно, распределена во всем окружающем их пространстве.

573. Рассмотрим далее, какой вид принимают уравнения движения Лагранжа в этом случае. Пусть X' — приложенная сила, соответствующая координате x — одной из тех, которые определяют форму и положение проводящих контуров. Она является силой в обычном смысле, т. е. величиной, определяющей тенденцию к изменению положения и задаваемой уравнением

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}.$$

Мы можем рассматривать эту силу как сумму трех частей в соответствии с частями, на которые мы разделили кинетическую энергию системы, различая их с помощью тех же индексов. Таким образом, $X' = X'_m + X'_e + X'_{me}$.

Часть X'_m определяется с помощью обычного динамического метода, и у нас нет необходимости рассматривать ее.

Поскольку T_e не содержит $\dot{x}$, первый член в выражении для X'_e равен нулю, и ее значение сводится к следующему: $X'_e = -dT_e/dx$.

Это есть выражение для механической силы, которую следует приложить к проводнику, чтобы уравновесить электромагнитную силу; оно означает, что сила измеряется скоростью *уменьшения* чисто электрокинетической энергии, обусловленной изменением координаты x. Электромагнитная сила X_e, которая вводит в игру эту внешнюю механическую силу, равна по величине, но противоположна по знаку силе X'_e и измеряется, следовательно, скоростью *увеличения* электрокинетической энергии, соответствующей увеличению координаты x. Поскольку

значение X_e зависит от квадратов и произведений токов, оно остается тем же самым, если поменять направления всех токов на обратные.

Третья часть X' равна $X'_{me}=\frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{x}}-\frac{dT_{me}}{dx}$.

Величина T_{me} содержит только произведения вида $\dot{x}\dot{y}$, так что $dT_{me}/d\dot{x}$ является линейной функцией сил токов $\dot{y}$. Первый член, таким образом, зависит от скорости изменения сил токов и определяет механическую силу, действующую на проводник; сила эта равна нулю, когда токи постоянны, и положительна или отрицательна в зависимости от того, увеличиваются или уменьшаются величины токов.

Второй член зависит не от изменения токов, а от их действительной величины. Поскольку относительно этих токов он является линейной функцией, то его знак меняется при смене знака токов. Поскольку скорость $\dot{x}$ входит во все члены, они обращаются в нуль, когда проводники покоятся. Из-за изменения во времени коэффициентов при $\dot{y}$ в выражении для $dT_{me}/d\dot{x}$ появляются еще несколько членов. Сделанные нами замечания относятся и к ним.

Мы можем, таким образом, исследовать эти члены отдельно: если проводники покоятся, иметь дело только с первым членом, если токи постоянны — только со вторым.

574. Очень важно установить, представляется ли какая-нибудь доля кинетической энергии в форме T_{me}, т. е. в форме, содержащей произведения обычных скоростей и сил электрических токов; поэтому было бы желательным проведение экспериментов, относящихся к этому вопросу, с особой тщательностью.

Трудно определить силы, действующие на тела при их быстром движении; поэтому мы проследим за первым членом, который зависит от изменения силы тока.

Если какая-то часть кинетической энергии зависит от произведения обычной скорости и силы тока, то, вероятно, ее легче всего наблюдать в условиях, когда скорость и ток имеют одинаковые или противоположные направления. Возьмем круговую катушку с большим числом витков и подвесим ее на тонком вертикальном проводе так, чтобы витки были горизонтальны, а катушка могла вращаться вокруг вертикальной оси либо в направлении, совпадающем с направлением тока в катушке, либо в противоположном направлении.

Мы будем предполагать, что ток подводится к катушке с помощью подвешивающего провода, а после прохождения тока через витки катушки его цепь замыкается через провод, идущий вниз вдоль линии подвеса и погруженный в чашку со ртутью.

Поскольку при прохождении тока через катушку действие горизонтальной компоненты земного магнетизма стремится повернуть эту катушку вокруг горизонтальной оси, мы будем предполагать, что горизонтальная компонента земного магнетизма в точности нейтрализуется с помощью неподвижных магнитов, или что эксперимент производится на магнитном полюсе. К катушке прикрепляется вертикальное зеркальце, позволяющее обнаружить любое ее азимутальное движение [рис. 33].

Пусть теперь по катушке в направлении север—восток—юг—запад пропускается электрический ток. Если бы электричество было жидкостью, подобной воде, текущей вдоль проводника, то, как в момент начала тока, так и по мере нараста-

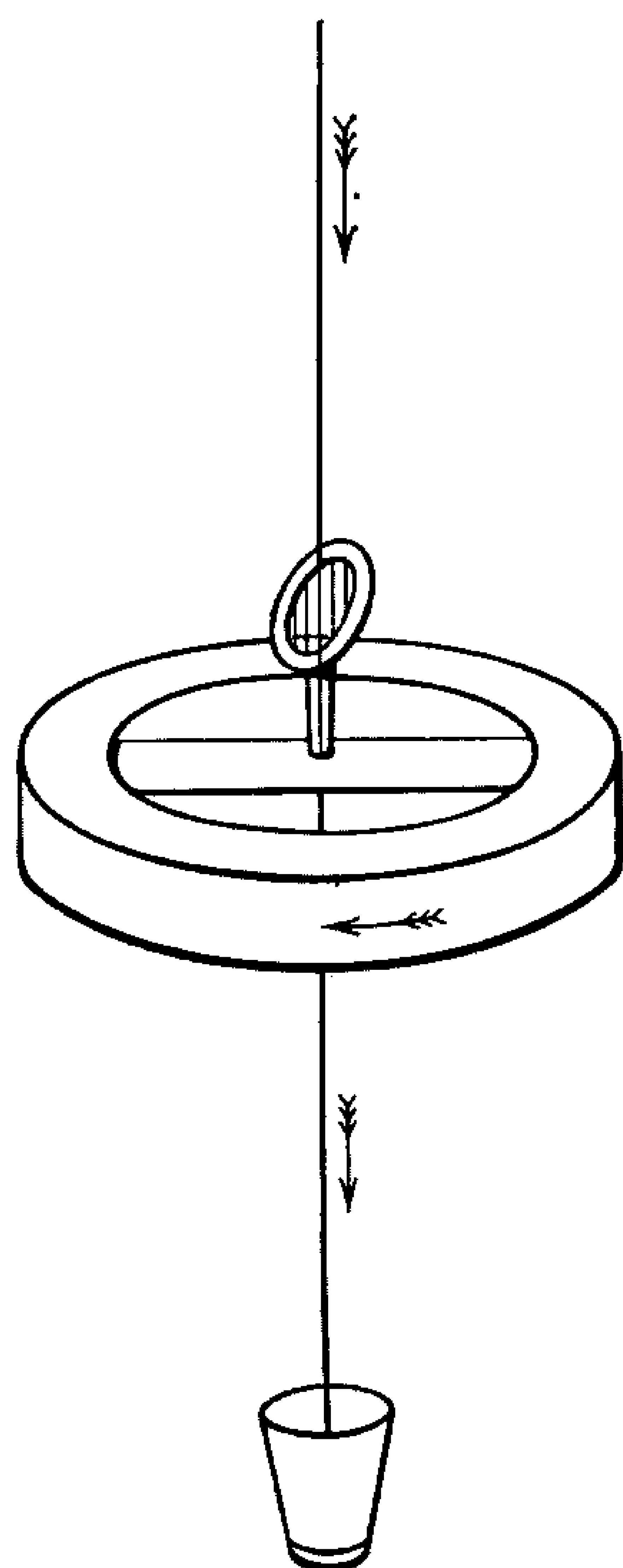


Рис. 33

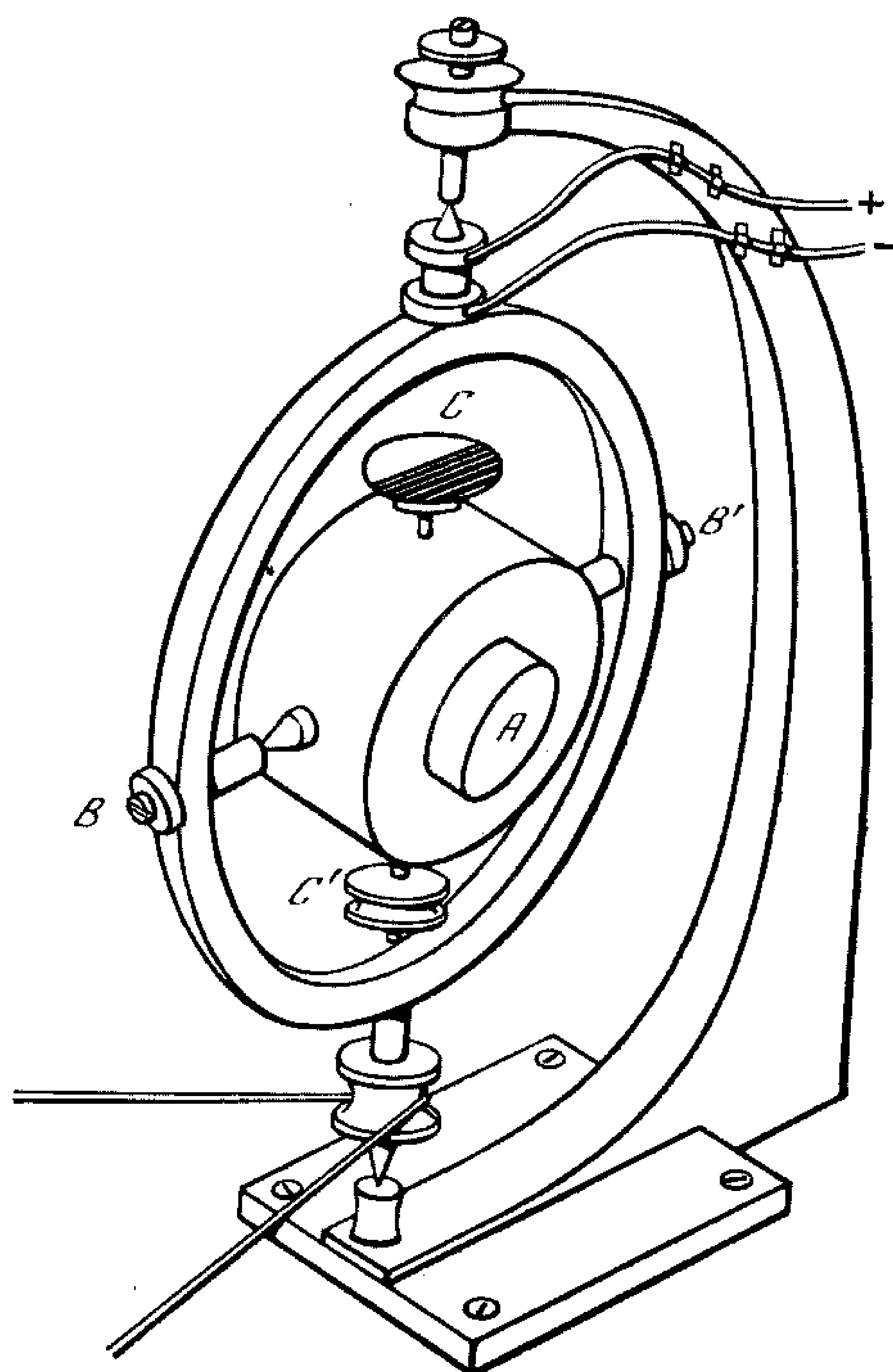


Рис. 34

ния его скорости, было бы необходимо приложить силу, создающую угловой момент жидкости, проходящей через катушку. Эта сила должна была бы быть силой упругости провода подвеса, и катушка в начальный момент поворачивалась бы в обратном направлении, т. е. в направлении запад—юг—восток—север, что и было бы зарегистрировано с помощью зеркала. При прекращении тока зеркало двигалось бы иначе, на этот раз — в направлении тока.

Никаких явлений подобного рода до сих пор не наблюдалось. Если бы такой эффект существовал, его легко было бы отличить от уже известных действий тока по следующим особенностям.

(1). Он возникал бы только при изменении силы тока, например, когда цепь замыкается или размыкается, а не тогда, когда ток постоянен.

Все известные *механические* действия тока зависят от сил токов, а не от скорости их изменения. С этим электромагнитным действием не надо смешивать то электродвижущее действие, которое возникает в случае индуцированных токов.

(2). Направление этого действия токов было бы противоположным при смене знаков у всех токов в поле.

Все известные механические действия тока остаются неизменными при смене направлений всех токов на обратные, поскольку они зависят от квадратов и произведений этих токов.

Если бы было обнаружено какое-либо действие такого рода, мы могли бы

рассматривать один из так называемых видов электричества (положительный или отрицательный) как некоторое реальное вещество и описывать электрический ток как действительное движение этого вещества в определенном направлении. Действительно, если бы электрические движения были бы каким-то образом сопоставимы с движениями обычной материи, то существовали бы члены вида T_{me} и это проявлялось бы через механическую силу X_{me}.

В рамках гипотезы Фехнера (Fechner) о том, что электрический ток состоит из двух равных токов положительного и отрицательного электричества, текущих через один и тот же проводник в противоположных направлениях, члены второго рода T_{me} обращались бы в нуль, поскольку каждому из них, относящемуся к положительному току, соответствовал бы равный член противоположного знака, относящийся к отрицательному току, и не существовало бы никаких явлений, зависящих от этих членов.

Мне думается, однако, что, несмотря на те большие выгоды, которые дает нам признание многих аналогий между током электричества и потоком материальной жидкости, мы должны тщательно избегать делать любые предположения, не подкрепленные экспериментальными свидетельствами. Я считаю, что пока еще нет экспериментальных данных, показывающих, является ли электрический ток действительно током материального вещества или двойным током; неизвестно также мала или велика его скорость, измеренная в футах в секунду.

Знание этих фактов было бы равнозначно, по крайней мере, отправному моменту для создания полной динамической теории электричества, где электрическое действие рассматривалось бы иначе, чем в этом трактате, т. е. не как явление, причина которого неизвестна и которое подчиняется только общим законам динамики, а как результат известных движений известных элементов материи. При этом предметом исследования служили бы не только общие эффекты и конечные результаты, но и весь промежуточный механизм и детали движения.

575. Еще более трудным является экспериментальное исследование второго члена X_{me}, а именно величины dT_{me}/dx, так как это исследование связано с наблюдением эффектов действия силы на быстро движущееся тело.

На рис. 34 показан прибор, который я построил в 1861 г., чтобы проверить существование силы такого рода.

Электромагнит A может вращаться вокруг горизонтальной оси BB', находящейся в кольце, которое само вращается вокруг вертикальной оси.

Пусть A, B, C являются моментами инерции электромагнита относительно оси катушки, относительно горизонтальной оси BB' и относительно третьей оси CC' соответственно.

Пусть CC' образует с вертикалью угол ϑ, азимут оси BB' равен φ, а ψ является переменной, от которой зависит движение электричества в катушке.

Тогда для кинетической энергии электромагнита T можно записать $2T = A\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + B\dot{\vartheta}^2 + C\dot{\varphi}^2\cos^2\vartheta + E(\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi})^2$, где E — величина, которую можно назвать моментом инерции электричества в катушке.

Если момент приложенной силы, стремящейся увеличить ϑ, равен Θ, то из уравнений динамики мы имеем

$$\Theta = B\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \{(A-C)\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + E\dot{\varphi}\cos\vartheta(\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi})\}.$$

Приравнивая нулю момент Ψ приложенной силы (стремящейся увеличить ψ), получаем константу $\dot{\varphi}\sin\vartheta+\dot{\psi}=\gamma$, которая, как можно считать, представляет собой силу тока в катушке.

Если C несколько превышает A, то величина Θ обратится в нуль и равновесие относительно оси BB' будет устойчивым при условии, что $\sin\vartheta=E\gamma/(C-A)\dot{\varphi}$.

Это значение ϑ зависит от величины γ, т. е. от электрического тока, и является положительным или отрицательным в соответствии с направлением тока.

Ток подводится к катушке через подшипники в точках B и B', которые присоединены к батарее с помощью пружинок, трущихся о металлические кольца, размещенные на вертикальной оси.

Для определения значения ϑ в точке C помещен бумажный диск, который делит пополам диаметр, параллельный BB'; одна из этих половин окрашена в красный цвет, другая — в зеленый.

Когда прибор приведен в движение, при положительных значениях ϑ в точке C виден красный кружок; его радиус приближенно указывает величину ϑ. При отрицательных ϑ в точке виден зеленый кружок.

Чтобы сделать инструмент очень чувствительным к действию силы (если таковая существует), с помощью гайки, перемещающейся вдоль прикрепленного к электромагниту винта, производится регулировка, в результате которой ось CC' делается главной осью с моментом инерции, слегка превышающим момент инерции относительно оси A.

Главная трудность в экспериментах возникает из-за возмущающего действия земной магнитной силы, в результате чего электромагнит ведет себя как вертикальный компас. В связи с этим полученные результаты были весьма грубыми, хотя никаких признаков изменения ϑ не удавалось обнаружить даже при помещении в катушку железного сердечника и превращении ее тем самым в мощный электромагнит.

Итак, если магнит и содержит быстро вращающуюся материю, угловой момент этого вращения должен быть очень мал по сравнению с любыми величинами, которые мы можем измерять, и у нас по-прежнему отсутствуют доказательства существования членов T_{me}, вычисленных на основании их механического действия.

576. Рассмотрим далее силы, действующие на токи электричества, т. е. электродвижущие силы.

Пусть эффективная электродвижущая сила, связанная с индукцией, равна Y; для того чтобы скомпенсировать ее, на контур извне должна действовать электродвижущая сила $Y'=-Y$. Из уравнения Лагранжа

$$Y=-Y'=-\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{y}}+\frac{dT}{dy}.$$

Второй член равен нулю, поскольку в T нет членов, зависящих от координаты y, так что сила Y сводится к первому члену. Следовательно, электродвижущая сила не может существовать в покоящейся системе с постоянными токами.

Далее, если мы разделим Y на три части Y_m, Y_e и Y_{me}, соответствующие трем частям T, мы найдем, что $Y_m=0$, поскольку T_m не содержит $\dot{y}$.

Мы также найдем $Y_e=-\frac{d}{dt}\frac{dT_e}{d\dot{y}}$.

Здесь $dT_e/d\dot{y}$ является линейной функцией токов, соответствующая часть электродвижущей силы равна скорости изменения этой функции. Это есть электродвижущая сила индукции, открытая Фарадеем. Мы рассмотрим ее более подробно впоследствии.

577. Из части T, зависящей от произведения скоростей и токов, мы находим $Y_{me} = -\frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{y}}$.

Теперь $dT_{me}/d\dot{y}$ является линейной функцией скоростей проводников. Следовательно, если бы какие-то члены T_{me} реально существовали, было бы возможно вызвать появление электродвижущей силы простым изменением скоростей проводников независимо от всех существующих токов. Например, в случае подвешенной катушки п. 574 при внезапном приведении во вращение (вокруг вертикальной оси) первоначально покоящейся катушки пришла бы в действие электродвижущая сила, пропорциональная ускорению этого движения. Она исчезла бы при равномерном движении и сменила бы знак при замедлении движения.

Немногие научные наблюдения можно выполнить с большей точностью, чем то, при котором определяется наличие или отсутствие тока с помощью гальванометра. Точность этого метода намного превосходит точность большинства приборов, предназначенных для измерения действующей на тело механической силы. Следовательно, если какие-то токи и можно было бы создать указанным способом, то они, даже будучи очень слабыми, должны были быть зарегистрированы. Их отличие от обычных токов индукции определялось бы следующими характеристиками.

(1). Они зависели бы только от движений проводников и совсем не зависели бы от силы токов или от уже существующих в поле магнитных сил.

(2). Они зависели бы не от абсолютных значений скоростей проводников, а от ускорения проводников, а также от квадратов и произведений их скоростей и меняли бы знак при обращении ускорения на замедление, хотя при этом абсолютное значение скорости оставалось бы прежним.

Во всех реально наблюдавшихся случаях индуцированные токи зависели как от величин, так и от изменений токов в поле и не могли возбуждаться в поле, где магнитная сила и токи отсутствуют. В той мере, в какой они определяются движением проводников, они зависят не от изменения скорости, а от абсолютной скорости этих движений.

Таким образом, в нашем распоряжении имеется три способа обнаружить существование членов вида T_{me}, и ни один из них до сих пор не привел к какому-либо положительному результату. Я особенно внимательно отметил эти возможности, ибо мне казалось важным иметь наибольшее количество подтверждений (в доступных нам пределах) по вопросу, столь сильно влияющему на правильную теорию электричества.

Поскольку, однако, никаких подтверждений наличия таких членов нет, я далее буду исходить из предположения, что они не существуют или, по крайней мере, не производят заметного эффекта, что существенно упростит нашу динамическую теорию. Тем не менее нам еще представится случай при обсуждении отношения магнетизма к свету показать, что движение, составляющее свет, может входить в качестве коэффициента при членах, включающих движение, которое образует магнетизм.

ГЛАВА VII
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

578. Теперь мы можем ограничить наше внимание лишь той частью кинетической энергии системы, которая зависит от квадратов и произведений сил электрических токов. Ее можно назвать электрокинетической энергией системы. Та часть кинетической энергии, которая зависит от движения проводников, относится к обычной динамике, а той части, которая зависит от произведений скоростей на токи, как мы показали, вообще не существует.

Обозначим через A_1, A_2, . . . различные проводящие контуры. Пусть их форма и относительное положение выражаются через переменные x_1, x_2, . . ., число которых равно числу степеней свободы механической системы. Мы будем называть их Геометрическими Переменными.

Пусть y_1 обозначает количество электричества, прошедшее через данное сечение проводника A_1 с начала отсчета времени t. Силу тока мы будем обозначать через $\dot{y}_1$, т. е. как производную от этой величины.

Величину $\dot{y}_1$ мы будем называть истинным током, а величину y — интегральным током. Для каждого контура в системе существует одна переменная такого рода.

Обозначим через T электрокинетическую энергию системы. Она является однородной функцией вторых степеней сил токов и имеет вид

$$T=\frac{1}{2}L_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{y}_2^2+\ldots+M_{12}\dot{y}_1\dot{y}_2+\ldots, \tag{1}$$

где коэффициенты L, M, . . . представляют собой функции геометрических переменных x_1, x_2, ... Электрические переменные y_1, y_2 в это выражение не входят.

Величины L_1, L_2, . . . можно назвать электрическими моментами инерции контуров A_1, A_2, . . ., а M_{12} — электрическим произведением инерции двух контуров A_1 и A_2. Когда мы захотим избежать языка динамической теории, мы будем называть L_1 коэффициентом самоиндукции контура A_1, а M_{12} — коэффициентом взаимной индукции контуров A_1 и A_2. Величину M_{12} называют также потенциалом контура A_1 по отношению к контуру A_2. Эти величины зависят только от формы и взаимного расположения контуров. Мы увидим, что в электромагнитной системе измерений они являются величинами, имеющими размерность длины, см. п. 627.

Дифференцируя T по $\dot{y}_1$, мы получаем величину p_1, которая в динамической теории может быть названа импульсом, соответствующим y_1. В теории электричества мы будем называть p_1 электрокинетическим импульсом контура A_1. Его величина равна

$$p_1=L_1\dot{y}_1+M_{12}\dot{y}_2+\ldots .$$

Электрокинетический импульс контура A_1 составляется, таким образом, из произведения его собственного тока на коэффициент самоиндукции и суммы произведений токов в других контурах на их коэффициенты взаимной индукции с контуром A_1.

Электродвижущая сила

579. Пусть E является электродвижущей силой в контуре A, возникающей от какого-либо источника (например, вольтовой или термоэлектрической батареи), которая создает ток независимо от магнитоэлектрической индукции.

Пусть R будет сопротивлением контура, тогда по закону Ома для преодоления сопротивления требуется электродвижущая сила $R\dot{y}$, а для изменения импульса контура остается электродвижущая сила $E-R\dot{y}$. Называя эту силу Y', мы согласно общим уравнениям имеем $Y'=\frac{dp}{dt}-\frac{dT}{dy}$, но, поскольку T не содержит y, последний член исчезает.

Отсюда для электродвижущей силы имеем уравнение

$$E-R\dot{y}=Y'=(dp/dt), \qquad \text{или} \quad E=R\dot{y}+(dp/dt).$$

Приложенная электродвижущая сила E, следовательно, есть сумма двух частей: первая, равная $R\dot{y}$, необходима для того, чтобы, преодолевая сопротивление R, поддерживать ток $\dot{y}$; вторая часть требуется для увеличения электромагнитного импульса p. Эта электродвижущая сила должна создаваться источниками, независимыми от магнитоэлектрической индукции. Электродвижущая сила, возникающая только вследствие магнитоэлектрической индукции, равна, очевидно, $-dp/dt$, т. е. *скорости уменьшения электрокинетического импульса контура*.

Электромагнитная сила

580. Обозначим через X' приложенную механическую силу, возникающую от внешних источников и стремящуюся увеличить переменную x. Согласно общим уравнениям $X'=\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}$.

Так как выражение для электрокинетической энергии не содержит скорости $(\dot{x})$, то первый член в правой части исчезает, и мы находим $X'=-dT/dx$.

Здесь X' — внешняя сила, требуемая для уравновешивания сил, возникающих от электрических источников. Ее принято обычно рассматривать как реакцию на электромагнитную силу, которую мы будем называть X и которая равна и противоположна X'.

Следовательно, $X=dT/dx$, или *электромагнитная сила, стремящаяся увеличить какую-либо переменную, равна скорости увеличения электрокинетической энергии на единицу приращения этой переменной при условии, что токи поддерживаются постоянными*.

Если в течение всего перемещения, за время которого электродвижущая сила совершает работу W, токи с помощью батареи поддерживаются постоянными, то электрокинетическая энергия системы за то же время увеличится на W. Поэтому в дополнение к той энергии, которая расходуется на создание тепла в контуре, из батареи извлекается дополнительно такое же количество энергии W. Впервые на это было указано сэром У. Томсоном [1]. (Сравните эти результаты с электростатическим свойством в п. 93).

[1] Nichol's *Cyclopaedia of the Physical Sciences*, ed. 1860, article «Magnetism, Dynamical Relations of».

Случай двух контуров

581. Назовем контур A_1 первичным, а контур A_2 — вторичным. Электрокинетическая энергия системы может быть записана в виде

$$T=\frac{1}{2}L\dot{y}_1^2+M\dot{y}_1\dot{y}_2+\frac{1}{2}N\dot{y}_2^2,$$

где L и N — коэффициенты самоиндукции первичного и вторичного контуров соответственно, а M — коэффициент их взаимной индукции.

Предположим, что на вторичный контур не действует никакая электродвижущая сила, кроме силы, обусловленной индукцией со стороны первичного контура. Тогда мы имеем

$$E_2=R_2\dot{y}_2+\frac{d}{dt}(M\dot{y}_1+N\dot{y}_2)=0.$$

Интегрируя это уравнение по t, получим

$$R_2y_2+M\dot{y}_1+N\dot{y}_2=C=\text{const},$$

где y_2 — интегральный ток во вторичном контуре.

Метод измерения интегрального тока малой длительности будет описан в п. 748; легко удостовериться, что в большинстве случаев длительность вторичного тока весьма незначительна.

Будем отмечать штрихами величины переменных в уравнении, относящиеся к концу времени t, тогда, если y_2 обозначает интегральный ток, т. е. полное количество электричества, протекшее через сечение вторичного контура за время t, то

$$R_2y_2=M\dot{y}_1+N\dot{y}_2-(M'\dot{y}_1'+N'\dot{y}_2').$$

Пусть вторичный ток возникает целиком благодаря индукции, тогда его начальное значение $\dot{y}_2$ должно равняться нулю, если перед началом отсчета времени t первичный ток был постоянен, а проводники покоились.

Если время t окажется достаточным для того, чтобы дать затухнуть вторичному току, то его конечное значение $\dot{y}_2'$ также равно нулю и уравнение будет таким: $R_2y_2=M\dot{y}_1-M'\dot{y}_1'$.

В этом случае интегральный ток вторичного контура зависит от начального и конечного значений $M\dot{y}_1$.

Индуцированные токи

582. Начнем с предположения, что первичный контур разомкнут, т. е. $\dot{y}_1=0$, и пусть при замыкании контакта в нем устанавливается ток $\dot{y}_1$.

Вторичный интегральный ток определяется уравнением $R_2y_2=-M'\dot{y}_1'$.

Когда контуры помещены рядом друг с другом и имеют одинаковые направления, величина M' положительна. Поэтому при замыкании первичного контура во вторичном контуре индуцируется отрицательный ток.

При размыкании контакта в первичном контуре первичный ток прекращается, индуцированный интегральный ток равен y_2, причем $R_2y_2=M\dot{y}_1$. В этом случае вторичный ток положителен.

Если первичный ток поддерживается постоянным, а форма или относительное положение контуров изменяется так, что M становится равным M', то интегральный вторичный ток будет равен y_2, причем $R_2 y_2 = (M - M')\dot{y}_1$.

В случае двух контуров, помещенных рядом и имеющих одинаковые направления, с увеличением расстояния между контурами величина M уменьшается. Поэтому индуцированный ток положителен, когда это расстояние растет, и отрицателен, когда оно уменьшается.

Все эти элементарные случаи индуцированных токов описаны в п. 530.

Механическое действие между двумя контурами

583. Пусть x является любой из геометрических переменных, от которых зависит форма и относительное положение контуров; электромагнитная сила, стремящаяся увеличить x, равна

$$X = \frac{1}{2}\dot{y}_1^2\frac{dL}{dx} + \dot{y}_1\dot{y}_2\frac{dM}{dx} + \frac{1}{2}\dot{y}_2^2\frac{dN}{dx}.$$

Если движение системы, соответствующее изменению x, таково, что каждый из контуров перемещается как твердое тело, то L и N будут независимыми от x, и уравнение сведется к виду $X = \dot{y}_1\dot{y}_2(dM/dx)$.

Следовательно, если первичный и вторичный токи имеют одинаковые знаки, то сила X, действующая между контурами, будет стремиться смещать их так, чтобы увеличить значение M.

Если контуры расположены рядом, а токи текут в них в одинаковых направлениях, то M будет увеличиваться при их сближении. Таким образом, в этом случае сила X оказывается силой притяжения.

584. Все явления взаимодействия двух контуров, будь то индукция токов или механическая сила между ними, зависят от величины M, названной нами коэффициентом взаимной индукции. Метод расчета этой величины из геометрических соотношений между контурами дан в п. 524, однако в исследованиях, помещенных в следующей главе, мы не будем предполагать, что математическое выражение для этой величины известно. Мы будем считать, что она найдена из опытов, связанных с индукцией, например, путем наблюдения интегрального тока при внезапном перемещении вторичного контура из данного положения на бесконечное расстояние или в любое такое положение, для которого известно, что $M = 0$.

ГЛАВА VIII

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ВТОРИЧНОГО КОНТУРА

585. В п. 582, 583, 584 мы доказали, что электромагнитное действие между первичным и вторичным контурами зависит от некоторой величины, являющейся функцией формы и относительного положения двух контуров и обозначенной нами через M.

Хотя эта величина M фактически представляет собой то же самое, что и потенциал двух контуров, математическую форму и свойства которого мы вывели в п. 423, 521, 539, исходя из магнитных и электромагнитных явлений, не будем здесь ссылаться на эти результаты, а начнем сначала, с нового обоснования, не делая никаких иных допущений, кроме установленных в главе VII для динамической теории.

Электрокинетический импульс вторичного контура состоит из двух частей (п. 578): одна, Mi_1, зависит от первичного тока i_1, а вторая, Ni_2,— от вторичного тока i_2. Мы будем исследовать сейчас первую из этих частей, которую обозначим через p:

$$p=Mi_1. \tag{1}$$

Мы предположим также, что первичный контур неподвижен, а ток в нем постоянен. Величина p, являющаяся электрокинетическим импульсом вторичного контура, будет в этом случае зависеть только от формы и положения вторичного контура; если в качестве вторичного контура взять произвольную замкнутую кривую, приняв какое-либо направление вдоль нее за положительное, то величина p для этой замкнутой кривой будет определена; если же положительным было бы выбрано противоположное направление вдоль этой кривой, то знак p сменился бы на противоположный.

586. Так как величина p зависит от формы и положения контура, мы можем предположить, что каждый участок контура дает определенный вклад в величину p и что доля вклада каждого участка контура зависит от формы и положения только этого участка, но не от расположения других частей контура.

Это допущение является законным, потому что мы не рассматриваем сейчас *ток*, части которого могут действовать (и действительно действуют) одна на другую, мы рассматриваем просто *контур*, т. е. замкнутую кривую, являющуюся чисто геометрической фигурой, вдоль которой *может* течь ток, и поэтому нельзя представлять, что части этой фигуры оказывают друг на друга какое-то физическое воздействие.

Таким образом, мы можем предположить, что доля вклада от элемента контура ds равна Jds, где J — величина, зависящая от положения и направления элемента ds. Следовательно, значение p допускает выражение через линейный интеграл

$$p=\int Jds, \tag{2}$$

где интегрирование проводится по замкнутому контуру однократно.

587. Далее мы должны определить вид величины J. Прежде всего, если направление ds изменить на противоположное, то знак изменится. Поэтому, когда два контура $ABCE$ и $AECD$ имеют общую дугу AEC, отсчитываемую в этих контурах в противоположных направлениях, то сумма значений p для двух контуров $ABCE$ и $AECD$ будет равна значению p для контура $ABCD$, составленного из этих двух контуров [рис. 35].

Действительно, части линейного интеграла, относящиеся к дуге AEC, для обоих парциальных контуров равны по величине и противоположны по знаку; когда берется их сумма, они взаимно уничтожаются, и остаются только части линейного интеграла, зависящие от внешней границы ABCD.

Таким же путем мы можем показать, что если поверхность, ограниченную замкнутой кривой, разделить на произвольное число частей и границу каждой из них рассматривать как контур (положительное направление каждого контура совпадет с положительным направлением внешней замкнутой кривой), то значение p для замкнутой кривой окажется равным сумме значений p для всех этих контуров, см. п. 483.

588. Рассмотрим теперь участок поверхности, размеры которого настолько малы по сравнению с главными радиусами кривизны поверхности, что изменением направления нормали в пределах этого участка можно пренебречь. Будем предполагать также, что если любой очень маленький контур перенести параллельно самому себе от одной части этого участка к другой, то величина p для этого малого

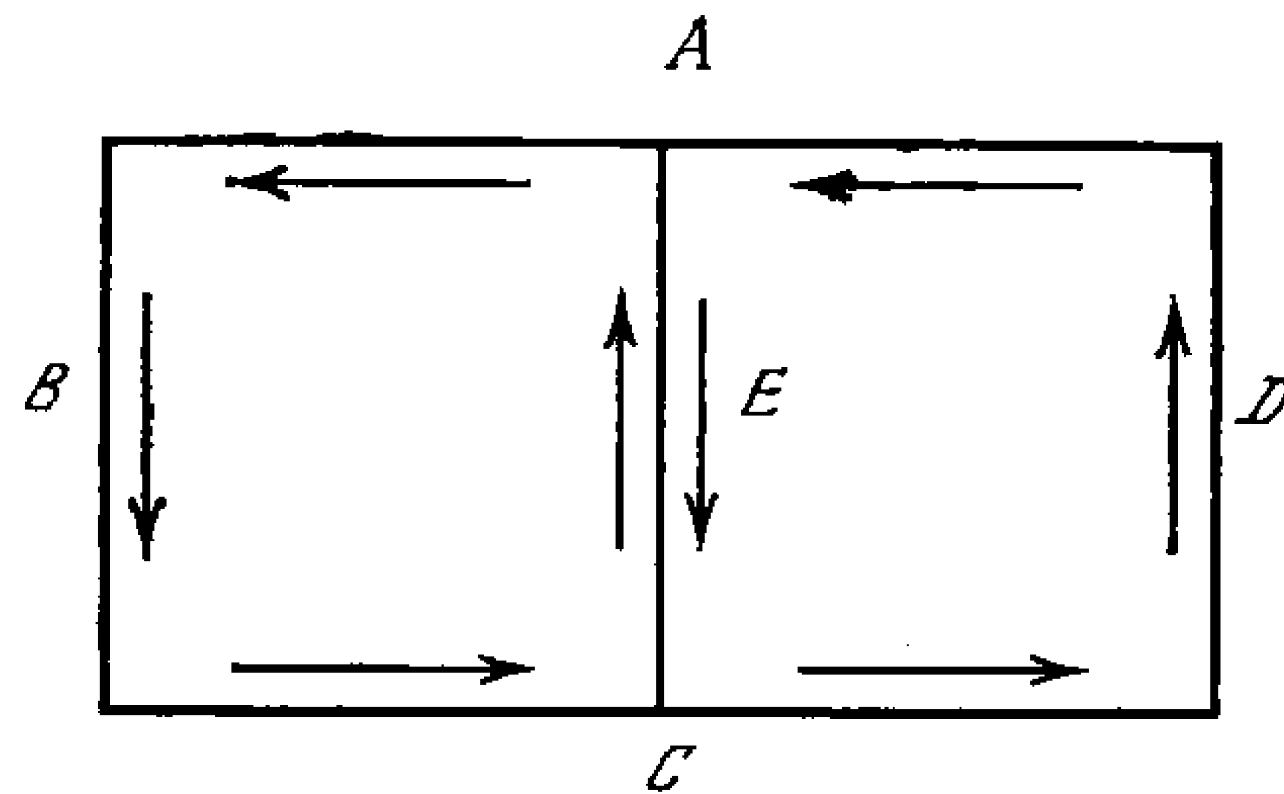


Рис. 35

контура заметно не изменится и это, очевидно, относится к тому случаю, когда размеры участка поверхности достаточно малы по сравнению с его расстоянием от первичного контура.

Если на этом участке поверхности провести произвольную замкнутую кривую, то значение p будет пропорционально площади, ею охватываемой.

Действительно, площади любых двух контуров могут быть разделены на малые элементы, имеющие одинаковые размеры и одинаковые значения p. Площади этих двух контуров пропорциональны числу тех элементов, из которых они состоят, и в таком же отношении между собой находятся их значения p.

Отсюда значение p для контура, который ограничивает некоторый элемент поверхности dS, имеет вид IdS, где I есть величина, зависящая от положения элемента dS и от направления его нормали. Поэтому мы имеем новое выражение для p:

$$p=\iint IdS, \tag{3}$$

где двойное интегрирование распространяется на любую поверхность, ограниченную контуром.

589. Пусть $ABCD$ будет контуром, у которого AC является элементарным участком, настолько малым, что его можно считать прямолинейным. Пусть APB и CQB будут малые, равные между собой площадки, лежащие в той же плоскости, тогда значение p будет одинаковым для обоих малых контуров APB и CQB [рис. 36], или

$$p(APB)=p(CQB).$$

Рис. 36

Отсюда

$$p(APBQCD) = p(ABQCD) + p(APB),$$
$$= p(ABQCD) + p(CQB),$$
$$= p(ABCD),$$

т. е. значение p не меняется при замене прямой линии AC на ломаную линию $APQC$, если охватываемая контуром площадь при этом не меняется существенно. Фактически это есть принцип, установленный вторым опытом Ампера (п. 506), где показано, что искривленный участок контура эквивалентен прямолинейному при условии, что ни одна из его частей заметно не удалена от прямолинейного участка.

Следовательно, если мы заменим элемент ds на три малых элемента dx, dy и dz, проведенных в такой последовательности, чтобы образовать непрерывный путь от начала элемента ds к его концу, и если через Fdx, Gdy и Hdz мы обозначим элементы линейного интеграла, соответствующие dx, dy, dz, то

$$Jds = Fdx + Gdy + Hdz. \tag{4}$$

590. Мы теперь в состоянии установить, каким образом величина J зависит от направления элемента ds, поскольку согласно (4)

$$J = F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Это есть выражение для составляющей (в направлении ds) вектора, компоненты которого в направлениях x, y и z равны F, G и H соответственно.

Обозначим этот вектор через $\mathfrak{A}$, а вектор, проведенный из начала координат в точку на контуре,— через ρ, тогда элемент контура будет равен $d\rho$, и кватернионным выражением для Jds будет $-S.\mathfrak{A}d\rho$.

Мы можем теперь записать уравнение (2) в виде

$$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{6}$$

или

$$p = -\int S.\mathfrak{A}\, d\rho. \tag{7}$$

Вектор $\mathfrak{A}$ и его составляющие F, G, H зависят от положения элемента ds в поле, но не от направления, в котором он проведен. Следовательно, они являются функциями координат x, y, z элемента ds, но не его направляющих косинусов l, m, n.

Вектор $\mathfrak{A}$ и по направлению, и по величине представляет собой интеграл по времени от электродвижущей напряженности, действие которой испытывала бы частица, помещенная в точку (x, y, z) при внезапном прекращении первичного тока. Поэтому мы назовем его Электрокинетическим Импульсом *в точке* (x, y, z).

Он равен той величине, которую мы исследовали в п. 405 под названием вектор-потенциала магнитной индукции.

Электрокинетический импульс любой конечной линии или контура есть линейный интеграл вдоль этой линии или контура от составляющей электрокинетического импульса в каждой точке этой линии или контура.

591. Найдем теперь значение p для элементарного прямоугольника $ABCD$, сторонами которого являются dy и dz, а положительным направлением — направление от оси y к оси z [рис. 37].

Рис. 37

Пусть координатами O центра тяжести элемента будут x_0, y_0, z_0, а G_0, H_0 — значения G и H в этой точке.

Координаты A — средней точки первой стороны прямоугольника — равны y_0 и $z_0 - dz/2$. Соответствующее значение G есть

$$G = G_0 - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dz + \ldots, \tag{8}$$

и часть величины p, возникающая со стороны A, приблизительно равна

$$G_0\,dy - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz}\,dy\,dz. \tag{9}$$

Аналогично для B: $H_0\,dz + \frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\,dy\,dz$, для C: $-G_0\,dy - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz}\,dy\,dz$ для D: $-H_0\,dz + \frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\,dy\,dz$.

Складывая эти четыре величины, находим значение p для четырехугольника, а именно

$$p = \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)dy\,dz. \tag{10}$$

Если теперь ввести три новых величины a, b, c, таких, что

$$\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \end{aligned} \tag{A}$$

и рассматривать их в качестве составляющих нового вектора $\mathfrak{B}$, тогда, согласно теореме IV п. 24, мы можем выразить линейный интеграл от $\mathfrak{A}$ вдоль любого замкнутого контура в виде поверхностного интеграла от $\mathfrak{B}$, взятого по поверхности, ограниченной контуром, таким образом:

$$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds = \iint (la + mb + nc)\,dS, \tag{11}$$

или

$$p = \int T.\mathfrak{A} \cos \varepsilon ds = \iint T.\mathfrak{B} \cos \eta dS, \qquad (12)$$

где ε есть угол между $\mathfrak{A}$ и ds, а η — угол между $\mathfrak{B}$ и нормалью к dS, направляющие косинусы которой равны l, m, n; $T.\mathfrak{A}$, $T.\mathfrak{B}$ обозначают численные значения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

При сравнении этого результата с уравнением (3) становится очевидным, что величина I в том уравнении равна $\mathfrak{B} \cos \eta$, т. е. проекции $\mathfrak{B}$ на нормаль к dS.

592. Мы уже видели (пп. 490, 541), что в соответствии с теорией Фарадея явления электромагнитной силы и индукции в контуре зависят от изменения числа линий магнитной индукции, проходящих сквозь контур. Теперь же число этих линий выражено математически в виде поверхностного интеграла от магнитной индукции, взятого по любой поверхности, ограниченной данным контуром. Следовательно, мы должны считать, что вектор $\mathfrak{B}$ и его составляющие a, b, c представляют собой то, с чем мы уже знакомы как с магнитной индукцией и ее составляющими.

В настоящем исследовании мы предполагаем вывести свойства этого вектора из принципов динамики, установленных в последней главе, как можно меньше обращаясь при этом к эксперименту.

Отождествляя этот вектор, возникший как результат математических исследований, с магнитной индукцией, свойства которой мы узнали из опытов с магнитами, мы не отступаем от указанного метода, ибо не вводим в теорию новых фактов, а только даем наименование некоторой математической величине. О правомерности такого действия следует судить по согласованности соотношений между математическими и физическими величинами, носящими одинаковые названия.

Вектор $\mathfrak{B}$, поскольку он фигурирует в поверхностном интеграле, принадлежит, очевидно, к категории потоков, описанных в п. 12, а вектор $\mathfrak{A}$ принадлежит, наоборот, к категории сил, так как он появляется в линейном интеграле.

593. Теперь мы должны восстановить в памяти те соглашения о положительных и отрицательных величинах и направлениях, некоторые из которых были установлены в п. 23. Мы принимаем правую систему осей, а именно такую, в которой, если винт с правой нарезкой смотрит вдоль оси x, а гайка поворачивается на винте в положительном направлении, т. е. от направления y к z, она будет перемещаться вдоль винта в положительном направлении x.

Мы считаем также положительными стекловидное электричество и аустральный магнетизм. Положительным направлением электрического тока или линии электрической индукции является такое направление, в котором двигается или стремится двигаться положительное электричество, а положительное направление линии магнитной индукции есть направление, в котором указывает стрелка компаса тем своим концом, который поворачивается к северу, см. рис. 24 п. 498 и рис. 25 п. 501.

Мы рекомендуем читателю, изучающему предмет, самому выбрать метод, который покажется ему наиболее эффективным, и тем самым надежно закрепить этот выбор в памяти, ибо куда труднее бывает вспомнить то правило, которое определяет, в каком из двух ранее безразличных вариантов должно быть сделано утверждение, чем правило, выбирающее один вариант из многих.

594. Теперь мы должны вывести из принципов динамики выражения для электромагнитной силы, действующей на проводник, переносящий электрический ток через магнитное поле, а также для электродвижущей силы, действующей на электричество внутри тела, которое движется в магнитном поле. Математический метод, которого мы будем придерживаться, можно сравнить с экспериментальным методом, которым пользовался Фарадей [1] при исследовании поля с помощью провода, а также с методом, основанным на экспериментах, с которым мы уже имели

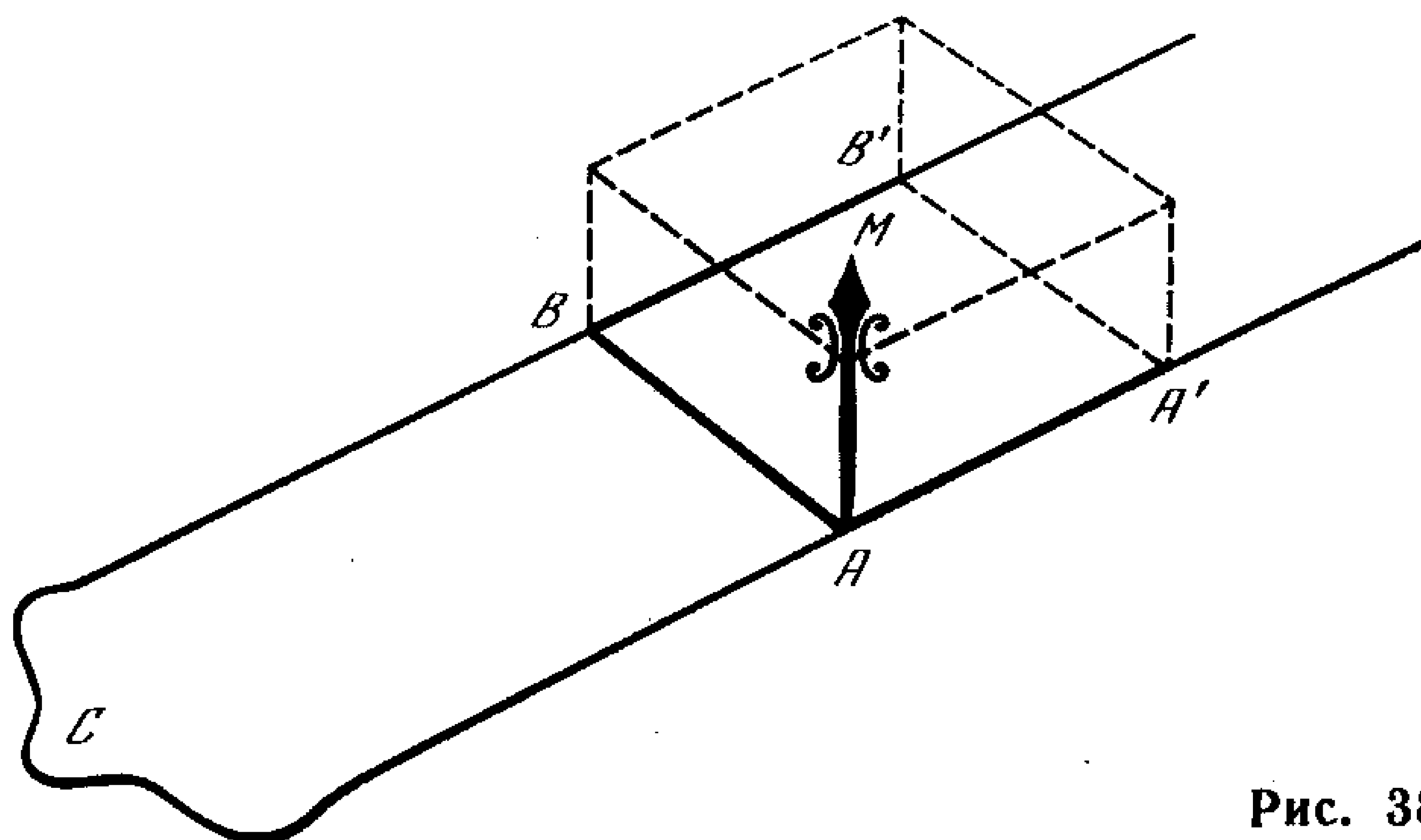


Рис. 38

дело в п. 490. Сейчас же мы должны определить влияние, оказываемое заданными изменениями формы вторичного контура, на величину электрокинетического импульса этого контура p.

Пусть AA', BB' будут два параллельных проводника, соединенных проводящей дугой C, которая может иметь любую форму, и прямолинейным проводником AB, который может скользить параллельно самому себе вдоль проводящих рельс AA' и BB' [рис. 38].

Пусть контур, образованный таким образом, считается вторичным, а направление ABC предполагается положительным направлением обхода по нему.

Пусть скользящая часть перемещается параллельно самой себе из положения AB в положение $A'B'$. Мы должны определить изменение электрокинетического импульса контура p, обусловленное этим смещением скользящего участка.

Вторичный контур меняется от ABC до $A'B'C$, отсюда, согласно п. 587,

$$p(A'B'C)-p(ABC)=p(AA'B'B). \qquad (13)$$

Следовательно, нам надо определить значение p для параллелограмма $AA'B'B$. Если он настолько мал, что можно пренебречь изменением направления и величины магнитной индукции в разных точках его плоскости, то величина p в соответствии с п. 591 равна $\mathfrak{B}\cos\eta\cdot AA'B'B$, где $\mathfrak{B}$ есть магнитная индукция, а η — угол, который она образует с положительным направлением нормали к параллелограмму $AA'B'B$.

Мы можем представить этот результат геометрически в виде объема параллелепипеда, основанием которого служит параллелограмм $AA'B'B$, а одним из ребер является линия AM, по величине и направлению представляющая маг-

[1] *Exp. Res.*, 3082, 3087, 3113.

нитную индукцию $\mathfrak{B}$. Объем параллелепипеда следует брать положительным, если параллелограмм расположен в плоскости бумаги, а линия AM проведена вверх от нее, или, выражаясь более общо, если направления контура AB, магнитной индукции AM и смещения AA', взятые в этом циклическом порядке, образуют правую систему.

Объем этого параллелепипеда представляет приращение величины p для вторичного контура, обусловленное смещением скользящего участка от положения AB до $A'B'$.

Электродвижущая сила, действующая на скользящий участок

595. Электродвижущая сила, возникающая во вторичном контуре благодаря движению скользящего участка, согласно п. 579, равна

$$E = -dp/dt. \tag{14}$$

Если предположить, что AA' есть смещение в единицу времени, то AA' будет представлять скорость, а параллелепипед представит величину dp/dt, или в соответствии с уравнением (14) электродвижущую силу в отрицательном направлении BA.

Следовательно, электродвижущая сила, действующая на скользящий участок AB и обусловленная его перемещением через магнитное поле, представлена объемом параллелепипеда, ребра которого и по направлению, и по величине представляют скорость, магнитную индукцию и сам этот скользящий участок. Она положительна, когда эти три направления берутся в правой циклической последовательности.

Электромагнитная сила, действующая на скользящий участок

596. Обозначим через i_2 ток во вторичном контуре, текущий в положительном направлении ABC, тогда работа, совершаемая электромагнитной силой над участком AB за время его скольжения из положения AB в положение $A'B'$, равна $(M'-M)i_1i_2$, где M и M' — значения M_{12} в начальном и конечном положениях AB. Но величина $(M'-M)i_1$ равна величине $p'-p$, которая представляется объемом параллелепипеда, построенного на AB, AM и AA'. Следовательно, если мы, чтобы представить величину $AB\cdot i_2$, проведем линию, параллельную AB, то параллелепипед, образованный этой линией вместе с магнитной индукцией AM и смещением AA', будет представлять работу, совершенную за время перемещения.

При заданной величине перемещения работа будет наибольшей, когда это перемещение происходит перпендикулярно параллелограмму со сторонами AB и AM. Поэтому величина электромагнитной силы представляется площадью параллелограмма со сторонами AB и AM, умноженной на i_2, а направление — нормалью к этому параллелограмму, проведенной так, чтобы AB, AM и нормаль составляли правую циклическую последовательность.

Четыре определения линии магнитной индукции

597. Если направление AA', в котором происходит движение скользящего участка, совпадает с направлением магнитной индукции AM, то перемещение скользящего участка не приведет в действие электродвижущую силу, каково бы

ни было направление AB, а если AB несет электрический ток, то не будет никакой тенденции к скольжению вдоль AA'.

Далее, если скользящий участок AB совпадает по направлению с направлением магнитной индукции AM, то никакое движение AB не приведет в действие электродвижущую силу, а ток, протекающий через AB, не вызовет действия механической силы на AB.

Следовательно, мы можем определить линию магнитной индукции четырьмя различными способами. Это такая линия, что:

(1). Если проводник двигать вдоль линии магнитной индукции параллельно самому себе, то в нем не возникнет электродвижущей силы.

(2). Если проводник, несущий ток, имеет возможность свободно перемещаться вдоль линии магнитной индукции, он не будет проявлять никакой тенденции к такому перемещению.

(3). Если линейный проводник совпадает по направлению с линией магнитной индукции и будет двигаться параллельно самому себе в любом направлении, то на него не будет действовать электродвижущая сила в направлении его длины.

(4). Если линейный проводник, несущий электрический ток, совпадает по направлению с линией магнитной индукции, то на него не будет действовать механическая сила.

Общие уравнения для электродвижущей напряженности

598. Мы видели, что величина электродвижущей силы E, обусловленной действием индукции на вторичный контур, равна $-dp/dt$, где

$$p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds. \qquad (1)$$

Чтобы определить значение E, продифференцируем по t выражение под знаком интеграла, помня, что если вторичный контур находится в движении, то x, y и z являются функциями времени. Мы получаем

$$\begin{aligned}E=&-\int\left(\frac{dF}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dt}\frac{dz}{ds}\right)ds-\int\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds\\&-\int\left(\frac{dF}{dy}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dy}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{dt}ds-\int\left(\frac{dF}{dz}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dz}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{dt}ds\\&-\int\left(F\frac{d^2x}{ds\,dt}+G\frac{d^2y}{ds\,dt}+H\frac{d^2z}{ds\,dt}\right)ds. \qquad (2)\end{aligned}$$

Возьмем теперь второй член этого интеграла и подставим в него величины dG/dx и dH/dx из уравнений (A) п. 591. Тогда этот член примет вид

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds,$$

и мы можем записать его так:

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds.$$

Поступая так же с третьим и четвертым членами, собирая члены, содержащие dx/ds, dy/ds и dz/ds, и помня, что

$$\int\left(\frac{dF}{ds}\frac{dx}{dt}+F\frac{d^2x}{ds\,dt}\right)ds=F\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

и, следовательно, интеграл от него, взятый вдоль замкнутой кривой, исчезает, получим

$$E=\int\left(c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}\right)\frac{dx}{ds}ds+\int\left(a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}\right)\frac{dy}{ds}ds+$$
$$+\int\left(b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}\right)\frac{dz}{ds}ds. \tag{4}$$

Это выражение мы можем записать в виде

$$E=\int\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned}P&=c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},\\ Q&=a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy},\\ R&=b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz}.\end{aligned}\right\}\ \text{(Уравнения Электродвижущей Напряженности)} \tag{B}$$

Члены, включающие в себя новую величину Ψ, введены для того, чтобы придать общность выражениям для P, Q, R. Эти члены исчезают, когда интеграл берется по замкнутому контуру. В рамках интересующей нас задачи отыскания электродвижущей силы вдоль контура величина Ψ является, таким образом, неопределенной. Однако мы увидим, что, когда мы знаем все относящиеся к задаче обстоятельства, мы можем приписать величине Ψ вполне точное значение, представляющее, согласно известному определению, *электрический потенциал* в точке (x, y, z).

Величина же, стоящая под знаком интеграла в уравнении (5), представляет собой электродвижущую напряженность, действующую на элемент контура ds.

Обозначим через $T.\mathfrak{E}$ численное значение результирующей P, Q, R, а через ε — угол между направлением этой результирующей и направлением элемента ds, тогда вместо уравнения (5) мы можем записать

$$E=\int T.\mathfrak{E}\cos\varepsilon ds. \tag{6}$$

Вектор $\mathfrak{E}$ есть электродвижущая напряженность движущегося элемента ds. Ее направление и величина зависят от положения и движения ds, а также от изменения магнитного поля и не зависят от направления ds. Поэтому мы теперь можем не учитывать то обстоятельство, что элемент ds является частью контура, и считать его просто участком движущегося тела, находящимся под действием электродвижущей силы. Электродвижущая напряженность уже была определена нами в п. 68. Ее называют также результирующей электрической силой, поскольку это та сила, действие которой испытывала бы на себе единица положительного

электричества, помещенная в данную точку. Мы получили теперь наиболее общее выражение этой величины для случая тела, движущегося в магнитном поле, обусловленном изменяющейся электрической системой.

Если это тело представляет собой проводник, то электродвижущая сила создает ток, если же это диэлектрик — она создаст только электрическое смещение.

Электродвижущую напряженность или силу, действующую на частицу, следует тщательно отличать от электродвижущей силы вдоль участка кривой. Последняя является линейным интегралом от первой, см. п. 69.

599. Электродвижущая напряженность, компоненты которой определяются уравнениями (B), зависит от трех обстоятельств. Первое из них — это движение частицы через магнитное поле. Часть силы, зависящая от этого движения, выражается первыми двумя членами правых частей каждого из уравнений. Она зависит от скорости частицы, поперечной по отношению к линиям магнитной индукции. Если $\mathfrak{G}$ есть вектор, представляющий скорость, а $\mathfrak{B}$ — вектор, представляющий магнитную индукцию, то, если $\mathfrak{E}_1$ — часть электродвижущей напряженности, которая зависит от движения, получим

$$\mathfrak{E}_1 = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B}, \tag{7}$$

т. е. электродвижущая напряженность есть векторная часть произведения магнитной индукции на скорость, иначе говоря, величина электрической силы представляется площадью параллелограмма, стороны которого представлены скоростью и магнитной индукцией, а ее направление есть направление нормали к этому параллелограмму, проведенной так, чтобы скорость, магнитная индукция и электродвижущая напряженность составляли правую циклическую последовательность.

Третий член в каждом из уравнений (B) зависит от изменения магнитного поля во времени. Оно может быть обусловлено либо изменением во времени электрического тока в первичном контуре, либо движением первичного контура. Пусть $\mathfrak{E}_2$ будет той частью электродвижущей напряженности, которая зависит от этих членов. Ее составляющие равны $-dF/dt$, $-dG/dt$, $-dH/dt$.

Это составляющие вектора $-d\mathfrak{A}/dt$, или $-\dot{\mathfrak{A}}$. Следовательно,

$$\mathfrak{E}_2 = -\dot{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Последний член в каждом из уравнений (B) обусловлен изменением функции Ψ в различных частях поля. Мы можем записать третью часть электродвижущей напряженности, обусловленную этой причиной, в виде

$$\mathfrak{E}_3 = -\nabla\Psi. \tag{9}$$

Электродвижущая напряженность в том виде, как она определена уравнениями (B), может быть, следовательно, записана в кватернионной форме:

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi. \tag{10}$$

О модификации уравнений для электродвижущей напряженности в случае, когда оси, на которые она проектируется, движутся в пространстве

600. Пусть x', y', z' — координаты точки, относящиеся к системе прямоугольных осей, движущихся в пространстве, а x, y, z — координаты той же точки относительно неподвижных осей.

Пусть составляющие скорости начала движущейся системы координат равны u, v, w, а составляющие ее угловой скорости по отношению к неподвижной системе осей равны ω_1, ω_2, ω_3. Выберем неподвижные оси так, чтобы они в данный момент времени совпали с движущимися осями, тогда единственными величинами, которые будут отличны друг от друга для обеих систем, окажутся величины, продифференцированные по времени. Если через $\delta x/\delta t$ обозначить составляющую скорости точки, жестко связанной с движущимися осями и перемещающейся вместе с ними, а через dx/dt и dx'/dt — составляющие скорости любой движущейся точки, имеющей в какое-то мгновение одинаковое положение относительно неподвижных и движущихся осей соответственно, тогда

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dx'}{dt}, \tag{1}$$

для других составляющих уравнения аналогичны.

Согласно теории движения тел неизменной формы

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta x}{\delta t}&=u+\omega_2 z-\omega_3 y,\\ \frac{\delta y}{\delta t}&=v+\omega_3 x-\omega_1 z,\\ \frac{\delta z}{\delta t}&=w+\omega_1 y-\omega_2 z.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Величина F является составляющей некоторой направленной величины, параллельной x, поэтому, обозначив через dF'/dt значение dF/dt, отнесенное к движущимся осям, мы можем показать, что

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dF}{dy}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dF}{dz}\frac{\delta z}{\delta t}+G\omega_3-H\omega_2+\frac{dF}{dt}. \tag{3}$$

Подставляя вместо dF/dy и dF/dz их значения, найденные из уравнений для магнитной индукции (A), и помня, что, согласно (2),

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}=0,\qquad \frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}=\omega_3,\qquad \frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}=-\omega_2, \tag{4}$$

находим

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+F\frac{d}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dG}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+G\frac{d}{dx}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{dH}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}+H\frac{d}{dx}\frac{\delta z}{\delta t}-c\frac{\delta y}{\delta t}+b\frac{\delta z}{\delta t}+\frac{dF}{dt}. \tag{5}$$

Если теперь положить

$$\Psi'=F\frac{\delta x}{\delta t}+G\frac{\delta y}{\delta t}+H\frac{\delta z}{\delta t}, \tag{6}$$

то

$$\frac{dF'}{dt}=-\frac{d\Psi'}{dx}-c\frac{\delta y}{\delta t}+b\frac{\delta z}{\delta t}+\frac{dF}{dt}. \tag{7}$$

Уравнение для P — составляющей электродвижущей напряженности, параллельной оси x, отнесенное к неподвижным осям, согласно (B), будет

$$P=c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx}. \tag{8}$$

Заменяя эти значения на значения величин, отнесенных к движущимся осям, для величины P, отнесенной к этим движущимся осям, имеем

$$P'=c\frac{dy'}{dt}-b\frac{dz'}{dt}-\frac{dF'}{dt}-\frac{d(\Psi+\Psi')}{dx}. \tag{9}$$

601. Отсюда следует, что электродвижущая напряженность выражается однотипной формулой для движений проводников, отнесенных и к неподвижным осям, и к движущимся в пространстве осям. Единственное различие между формулами состоит в том, что в случае движущихся осей электрический потенциал Ψ должен быть заменен на $\Psi+\Psi'$.

Во всех случаях, где в проводящих контурах возникает ток, электродвижущая сила является линейным интегралом, взятым вдоль замкнутого контура:

$$E=\int\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds. \tag{10}$$

Величина Ψ исчезает при интегрировании, и поэтому введение Ψ' не влияет на значение E. Следовательно, во всех явлениях, относящихся к замкнутым контурам и токам в них, безразлично, будут ли оси, к которым мы относим систему, в покое или в движении, см. п. 668.

Об электромагнитной силе, действующей на проводник, переносящий электрический ток через магнитное поле

602. В общем исследовании (п. 583) мы видели, что если x_1 есть одна из переменных, определяющих положение и форму вторичного контура, а X_1 — сила, действующая на вторичный контур и стремящаяся увеличить значение этой переменной, то

$$X_1=\frac{dM}{dx_1}i_1i_2. \tag{1}$$

Так как ток i_1 не зависит от x_1, мы можем написать

$$Mi_1=p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{2}$$

и для величины X_1 имеем

$$X_1=i_2\frac{d}{dx_1}\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds. \tag{3}$$

Предположим теперь, что смещение состоит в движении каждой точки контура на расстояние δx в направлении x, причем δx является любой непрерывной функ-

цией от s, так что различные части контура движутся независимо одна от другой и в то же время контур остается непрерывным и замкнутым.

Пусть также X будет полной силой в направлении x, действующей на часть контура от $s=0$ до $s=s$. Тогда часть, соответствующая элементу ds, будет равна $(dX/ds)ds$. Для работы, совершаемой этой силой за время перемещения, будем иметь следующее выражение:

$$\int \frac{dX}{ds}\,\delta x\,ds = i_2 \int \frac{d}{d\delta x}\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)\delta x\,ds, \tag{4}$$

где мы должны распространить интегрирование на замкнутую кривую, помня, что δx является произвольной функцией s. Поэтому мы можем произвести дифференцирование по δx точно так же, как мы дифференцировали по t в п. 598, помня, что

$$\frac{dx}{d\delta x}=1, \qquad \frac{dy}{d\delta x}=0, \qquad \frac{dz}{d\delta x}=0. \tag{5}$$

Таким образом, находим

$$\int \frac{dX}{ds}\,\delta x\,ds = i_2\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right)\delta x\,ds + i_2\int\frac{d}{ds}(F\delta x)\,ds. \tag{6}$$

При интегрировании по замкнутой кривой последний член исчезает и так как уравнение должно выполняться для функции δx любого вида мы должны иметь

$$\frac{dX}{ds}=i_2\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right). \tag{7}$$

Это уравнение дает силу, параллельную x и действующую на произвольный единичный элемент контура. Силы, параллельные y и z, соответственно равны

$$\frac{dY}{ds}=i_2\left(a\frac{dz}{ds}-c\frac{dx}{ds}\right), \tag{8}$$

$$\frac{dZ}{ds}=i_2\left(b\frac{dx}{ds}-a\frac{dy}{ds}\right). \tag{9}$$

Результирующая сила, действующая на элемент, дается (и по направлению, и по величине) кватернионным выражением $i_2 V.d\rho\mathfrak{B}$, где i_2 есть численная мера тока, а $d\rho$ и $\mathfrak{B}$ — векторы, представляющие элемент контура и магнитную индукцию; умножение должно пониматься в гамильтоновом смысле.

603. Если проводник следует рассматривать не как линию, а как некоторое тело, то силу на элемент длины и ток через полное сечение необходимо выражать через символы, обозначающие силу на единицу объема и токи через единицу площади.

Пусть X, Y, Z представляют теперь составляющие силы, отнесенной к единице объема, а u, v, w — составляющие тока, отнесенного к единице площади. Тогда, если S представляет сечение проводника, которое мы будем предполагать малым, то объем элемента ds будет равен Sds и $u=\frac{i_2}{S}\frac{dx}{ds}$. Следовательно,

уравнение (7) примет вид

$$\frac{XS\,ds}{ds} = S\,(vc - wb), \tag{10}$$

или $X = vc - wb.$
Аналогично $Y = wa - uc$
и $Z = ub - va.$

$$\left.\begin{aligned} X &= vc - wb. \\ Y &= wa - uc \\ Z &= ub - va. \end{aligned}\right\} \text{(Уравнения Электромагнитной Силы)} \tag{C}$$

Здесь X, Y, Z — составляющие электромагнитной силы, действующей на элемент проводника, деленные на объем этого элемента; u, v, w — отнесенные к единице площади составляющие электрического тока, протекающего через элемент, и a, b, c — составляющие магнитной индукции на элементе, которые также отнесены к единице площади.

Если вектор $\mathfrak{F}$ представляет по величине и направлению силу на единицу объема проводника, а $\mathfrak{C}$ представляет собой электрический ток, текущий через него, то

$$\mathfrak{F} = V.\mathfrak{C}\mathfrak{B}. \tag{11}$$

ГЛАВА IX

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

604. Наше теоретическое обсуждение электродинамики мы начнем с предположения о том, что система контуров, несущих электрические токи, является системой динамической, где токи можно рассматривать как скорости, а координаты, соответствующие этим скоростям, не появляются в уравнениях явно. Из этого следует, что кинетическая энергия системы, поскольку она зависит от токов, является однородной квадратичной функцией токов, коэффициенты которой зависят только от формы и относительного положения контуров. Предполагая, что эти коэффициенты известны из эксперимента или еще откуда-либо, мы с помощью чисто динамических рассуждений вывели законы индукции токов и электромагнитного притяжения. При этом исследовании мы ввели понятия электрокинетической энергии системы токов, электромагнитного импульса тока и взаимного потенциала двух контуров.

Затем мы продолжили исследование поля с помощью вторичных контуров различной конфигурации, и это привело нас в результате к понятию вектора $\mathfrak{A}$, имеющего в любой данной точке поля определенную величину и определенное направление. Мы назвали этот вектор электромагнитным импульсом в данной точке: его можно рассматривать как интеграл по времени от электродвижущей напряженности, создаваемой в этой точке при внезапном удалении всех токов из поля. Он тождествен величине, которую мы уже изучали в п. 405 в качестве вектор-потенциала магнитной индукции. Ее составляющими, параллельными осям x, y, z, являются F, G и H. Электромагнитный импульс контура равен линейному интегралу от $\mathfrak{A}$ по контуру.

Затем, воспользовавшись теоремой IV п. 24, мы преобразовали линейный интеграл от $\mathfrak{A}$ в поверхностный интеграл от другого вектора $\mathfrak{B}$, имеющего составляющие a, b, c, и обнаружили, что как явления индукции, обусловленные движением проводника, так и явления, обусловленные электромагнитной силой, могут быть выражены через $\mathfrak{B}$. Мы дали вектору $\mathfrak{B}$ название вектора магнитной индукции, поскольку его свойства идентичны свойствам линий магнитной индукции, изученным Фарадеем.

Мы установили также три системы уравнений: первая система (A) — это уравнения магнитной индукции, выражающие ее через электромагнитный импульс. Вторая система (B) — это уравнения электродвижущей напряженности, выражающие ее через движение проводника поперек линий магнитной индукции и через скорость изменения электромагнитного импульса. Третья система (C) представляла собой уравнения для электромагнитной силы, выражающие ее через токи и магнитную индукцию.

Во всех этих случаях ток следует понимать как ток истинный, т. е. включающий в себя не только ток проводимости, но также и ток, обусловленный изменением электрического смещения.

Магнитная индукция $\mathfrak{B}$ является той величиной, которую мы уже рассматривали в п. 400. В ненамагниченном теле она совпадает с силой, действующей на единичный магнитный полюс, но если тело намагничено (постоянно или путем индукции), то она будет равна той силе, которая действовала бы на единичный полюс, помещенный в узкую полость внутри тела, стенки которой перпендикулярны направлению намагниченности. Составляющие $\mathfrak{B}$ равны a, b, c.

Из уравнений (A), определяющих a, b, c, следует, что

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0.$$

В п. 403 было показано, что таким свойством обладает магнитная индукция.

605. Мы определили магнитную силу внутри магнита, в отличие от магнитной индукции, как силу, действующую на единичный полюс, помещенный внутри узкой полости, вырезанной параллельно направлению намагниченности. Эта величина обозначена через $\mathfrak{H}$, а ее составляющие — через α, β, γ, см. п. 398.

Если $\mathfrak{J}$ есть интенсивность намагниченности, а A, B, C — ее составляющие, то, согласно п. 400,

$$\left.\begin{aligned} a&=\alpha+4\pi A,\\ b&=\beta+4\pi B,\\ c&=\gamma+4\pi C. \end{aligned}\right\} \text{(Уравнения Намагниченности)} \qquad \text{(D)}$$

Мы можем назвать эти уравнения уравнениями намагниченности: они указывают, что в электромагнитной системе магнитная индукция $\mathfrak{B}$, рассматриваемая как вектор, является суммой (в гамильтоновом смысле) двух векторов — магнитной силы $\mathfrak{H}$ и умноженной на 4π намагниченности $\mathfrak{J}$, т. е.

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}.$$

В некоторых веществах намагниченность зависит от магнитной силы, и это выражается системой уравнений для индуцированного магнетизма, приведенной в п. 426 и 435.

606. Вплоть до этого места мы в наших исследованиях выводили все из чисто динамических соображений без какой-либо ссылки на количественные эксперименты по электричеству или магнетизму. Экспериментальные знания мы использовали только для того, чтобы распознать в абстрактных понятиях, выведенных из теории, конкретные величины, найденные из эксперимента, и дать им наименования, которые скорей бы указывали на их отношение к физике, нежели на их математическое происхождение.

Так, мы показали существование электромагнитного импульса $\mathfrak{A}$ как некоторого вектора, направление и величина которого изменяются от одной части пространства к другой; из него чисто математическим путем мы вывели магнитную индукцию $\mathfrak{B}$, как некоторый производный вектор. Мы не получили, однако, каких-либо данных для отыскания $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$ по распределению токов в поле. Для этой цели мы должны установить математическую связь между этими величинами и токами.

Начнем с допущения о существовании постоянных магнитов, взаимодействие которых удовлетворяет принципу сохранения энергии. Однако мы не будем делать никаких предположений относительно законов магнитной силы, кроме того предположения, которое следует из этого же принципа, а именно: необходимо, чтобы силу, действующую на магнитный полюс, можно было получить из потенциала.

Затем мы, наблюдая действие между токами и магнитами, находим, что ток действует на магнит, по-видимому, так же, как действовал бы на него другой магнит, мощность, форма и положение которого были бы соответствующим образом подобраны, и что магнит действует на ток так же, как другой ток. Нет необходимости предполагать, что эти наблюдения сопровождаются действительными измерениями сил. Поэтому их не следует рассматривать, как источник численных данных, они полезны только в постановке вопросов для нашего исследования.

Вопрос, который выдвигают эти наблюдения, состоит в следующем: поскольку магнитное поле, создаваемое электрическими токами, во многих отношениях аналогично магнитному полю, создаваемому постоянными магнитами, является ли оно аналогичным также и в отношении его связи с потенциалом?

Тот факт, что электрический контур создает в окружающем его пространстве такие же магнитные эффекты, как и ограниченная этим контуром магнитная оболочка, был установлен в п. 482—485.

Мы знаем, что в случае магнитной оболочки существует потенциал, имеющий определенное значение для всех точек вне вещества оболочки, но значения потенциала в двух соседних точках по разные стороны от оболочки отличаются на конечную величину.

Если магнитное поле в окрестности электрического тока подобно магнитному полю вблизи магнитной оболочки, то магнитный потенциал, определенный как линейный интеграл от магнитной силы, будет одинаковым для любых двух путей интегрирования при условии, что один можно трансформировать в другой путем непрерывного движения без пересечения электрического тока.

Если, однако, один путь интегрирования не может быть преобразован в дру-

гой без пересечения тока, то линейный интеграл от магнитной силы вдоль одного пути отличается от интеграла вдоль другого пути на величину, зависящую от силы тока. Магнитный потенциал, обусловленный электрическим током, является, следовательно, функцией с бесконечным рядом значений, имеющих общую разность, причем частное значение потенциала зависит от хода линии интегрирования. Внутри вещества проводника такой величины, как магнитный потенциал, не существует.

607. Считая, что магнитное действие тока обладает такого рода магнитным потенциалом, мы приступим к математическому выражению этого результата.

Во-первых, линейный интеграл от магнитной силы вдоль любой замкнутой кривой равен нулю при условии, что эта замкнутая кривая не окружает электрического тока.

Во-вторых, если ток проходит один и только один раз в положительном направлении сквозь замкнутую кривую, то линейный интеграл имеет определенное значение, которое можно использовать в качестве меры силы тока, ибо если форма замкнутой кривой меняется каким-либо непрерывным образом, не пересекая при этом тока, то линейный интеграл остается неизменным.

В электромагнитных единицах линейных интеграл от магнитной силы, взятый вдоль замкнутой кривой, численно равен протекающему сквозь замкнутую кривую току, умноженному на 4π.

Если взять в качестве такой замкнутой кривой прямоугольник со сторонами dy и dz, то линейный интеграл от магнитной силы вокруг него будет равен

$$\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)dy\,dz,$$

и если u, v, w являются составляющими потока электричества, ток, протекающий сквозь прямоугольник, равен $u\,dy\,dz$.

Умножая это на 4π и приравнивая результат линейному интегралу, мы получим уравнение

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}. \\ \text{Аналогично}\quad 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}. \end{aligned}\right\}\ \text{(Уравнения Электрических Токов)} \qquad \text{(E)}$$

Эти уравнения определяют величину и направление электрических токов, когда магнитная сила задана в каждой точке.

При отсутствии тока эти уравнения эквивалентны условию

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz=-D\Omega,$$

т. е. во всех точках, где нет токов, магнитную силу можно получить из магнитного потенциала.

Дифференцируя уравнения (E) по x, y и z соответственно и складывая результаты, мы получаем уравнение

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

которое указывает, что ток, имеющий составляющие u, v, w, подчиняется условию движения несжимаемой жидкости и с необходимостью должен протекать по замкнутым контурам.

Это уравнение справедливо только тогда, когда u, v и w считаются составляющими электрического потока, обусловленного как изменением электрического смещения, так и истинной проводимостью.

У нас очень мало экспериментальных свидетельств, относящихся к прямому электромагнитному действию токов, обусловленному изменением электрического смещения в диэлектриках, но чрезвычайная трудность совмещения законов электромагнетизма с существованием незамкнутых электрических токов является одной из тех многих причин, по которым мы должны признать существование переходных токов, обусловленных изменением смещения. Их важность будет видна, когда мы подойдем к электромагнитной теории света.

608. Мы сейчас определили соотношения между основными величинами, относящимися к открытым Эрстедом, Ампером и Фарадеем явлениям. Для того чтобы связать их с явлениями, описанными в предыдущих частях трактата, необходимы некоторые дополнительные соотношения.

Когда электродвижущая напряженность действует на материальное тело, она производит в нем два электрических эффекта, названных Фарадеем индукцией и проводимостью; первый из этих эффектов наиболее заметен в диэлектриках, второй — в проводниках.

В настоящем трактате статическая электрическая индукция измеряется тем, что мы назвали электрическим смещением, т. е. направленной величиной или вектором, который мы обозначили через $\mathfrak{D}$, а его компоненты — через f, g, h.

В изотропных веществах смещение совпадает по направлению с электродвижущей напряженностью, его создающей, и пропорционально ей, по крайней мере, при малых ее значениях. Это можно выразить уравнением

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}, \quad \text{(Уравнение Электрического Смещения)} \qquad \text{(F)}$$

где K — диэлектрическая способность вещества, см. п. 68.

В веществах, которые не являются изотропными, составляющие f, g, h электрического смещения $\mathfrak{D}$ оказываются линейными функциями составляющих P, Q, R электродвижущей напряженности $\mathfrak{E}$.

По своей форме уравнения электрического смещения аналогичны уравнениям для токов проводимости в том виде, как они приведены в п. 298.

Эти соотношения можно выразить иначе, сказав, что в изотропных средах величина K является скаляром, а в других телах она является линейной векторной функцией, действующей на вектор $\mathfrak{E}$.

609. Другим эффектом электродвижущей напряженности является эффект проводимости. Законы проводимости, возникающей в результате действия электродвижущей напряженности, были установлены Омом; они объяснены во второй части этого трактата, п. 241, и могут быть сведены в уравнение

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}, \quad \text{(Уравнение Проводимости)} \qquad \text{(G)}$$

где $\mathfrak{E}$ есть электродвижущая напряженность в точке, $\mathfrak{K}$ — плотность тока проводимости, имеющая составляющие p, q, r, C — проводимость вещества, которая

в случае изотропных веществ оказывается простой скалярной величиной, а для других веществ становится линейной векторной функцией, действующей на вектор $\mathfrak{E}$. Вид этой функции в декартовых координатах приведен в п. 298.

610. Одной из главных особенностей данного трактата является утверждение о том, что истинный электрический ток $\mathfrak{C}$ (т. е. ток, от которого зависят электромагнитные явления) не совпадает с током проводимости $\mathfrak{K}$, и в оценке полного движения электричества должно быть учтено изменение во времени электрического смещения $\mathfrak{D}$; следовательно, мы должны написать

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}} \quad \text{(Уравнение Истинного Тока)} \tag{H}$$

или через составляющие

$$\left.\begin{aligned} u &= p + \frac{df}{dt}, \\ v &= q + \frac{dg}{dt}, \\ w &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{H*}$$

611. Поскольку и $\mathfrak{K}$, и $\mathfrak{D}$ зависят от электродвижущей напряженности $\mathfrak{E}$, мы можем выразить истинный ток $\mathfrak{C}$ через электрическую напряженность, а именно

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right) \mathfrak{E}, \tag{I}$$

или для случая постоянных C и K

$$\left.\begin{aligned} u &= CP + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt}, \\ v &= CQ + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt}, \\ w &= CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{I*}$$

612. Объемная плотность свободного электричества в любой точке находится через составляющие электрического смещения из уравнения

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}. \tag{J}$$

613. Поверхностная плотность электричества равна

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h', \tag{K}$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали, проведенной от поверхности в среду, где составляющие смещения равны f, g, h, а l', m', n' — направляющие косинусы нормали, проведенной от поверхности в среду, где эти составляющие равны f', g', h'.

614. Когда вся намагниченность среды индуцирована действующей на нее

магнитной силой, мы можем написать уравнение индуцированной намагниченности в виде

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \tag{L}$$

где μ есть коэффициент магнитной проницаемости, который можно рассматривать либо как скалярную величину, либо как линейную векторную функцию, действующую на $\mathfrak{H}$, в соответствии с тем, изотропна среда или нет.

615. Для рассматриваемых нами величин эти соотношения можно считать основополагающими. Их можно было бы скомбинировать так, чтобы исключить некоторые из величин. Однако сейчас наша задача состоит не в получении компактных математических формул, а в написании выражения для каждого соотношения, о котором мы что-либо знаем. На этой стадии исследования исключение любой величины, отражающей полезную идею, было бы скорее потерей, чем выигрышем.

Есть, однако, один очень важный результат, который мы можем получить, комбинируя уравнения (A) и (E).

Если предположить, что в поле не существует никаких магнитов, кроме электрических контуров, то исчезнет различие между магнитной силой и магнитной индукцией, которое мы сохраняли до сих пор, потому что только в намагниченном веществе эти величины отличаются одна от другой.

Согласно гипотезе Ампера, которая будет пояснена в п. 833, свойства того, что мы называем намагниченным веществом, обусловлены молекулярными электрическими контурами, так что наша теория намагничения применима только тогда, когда мы рассматриваем вещество в больших массах; если же считать, что наши математические методы могут учитывать также и явления, происходящие в пределах отдельных молекул, то они не откроют нам там ничего, кроме электрических контуров, и мы найдем, что магнитная сила и магнитная индукция повсюду совпадают. Однако для того, чтобы иметь возможность по своему желанию использовать либо электрическую, либо электромагнитную систему измерений, мы сохраним коэффициент μ, помня, что его значение равно единице в электромагнитной системе.

616. Составляющие магнитной индукции, согласно уравнениям (A) п. 591, равны

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \qquad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \qquad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Составляющие электрического тока, согласно уравнениям (E) п. 607, равны

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \qquad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx},$$

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

Согласно нашей гипотезе, составляющие a, b, c равны соответственно $\mu\alpha$, $\mu\beta$ и $\mu\gamma$. Поэтому мы получаем (при постоянном μ)

$$4\pi\mu u - \frac{d^2G}{dx\,dy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dz\,dx}. \tag{1}$$

Если записать

$$J=\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}, \tag{2}$$

и[1]

$$\nabla^2=-\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right), \tag{3}$$

то мы можем написать уравнение (1):

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu u &= \frac{dJ}{dx}+\nabla^2 F.\\ \text{Аналогично}\quad 4\pi\mu v &= \frac{dJ}{dy}+\nabla^2 G,\\ 4\pi\mu w &= \frac{dJ}{dz}+\nabla^2 H.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} F' &= \mu\iiint \frac{u}{r}\,dx\,dy\,dz,\\ G' &= \mu\iiint \frac{v}{r}\,dx\,dy\,dz,\\ H' &= \mu\iiint \frac{w}{r}\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\chi=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{J}{r}\,dx\,dy\,dz, \tag{6}$$

где r — расстояние до данной точки от элемента (x, y, z), а интегрирование рас пространяется на все пространство; тогда

$$\left.\begin{aligned} F &= F'-\frac{d\chi}{dx},\\ G &= G'-\frac{d\chi}{dy},\\ H &= H'-\frac{d\chi}{dz}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Величина χ исчезает из уравнений (A) и не имеет отношения ни к какому физическому явлению. Если предположить, что она всюду равна нулю, то величина J также будет везде равна нулю. Тогда уравнения (5) (с опущенными штрихами) дадут правильные значения составляющих $\mathfrak{A}$.

617. Поэтому мы можем принять в качестве определения $\mathfrak{A}$, что это есть вектор-потенциал электрического тока, так же связанный с электрическим током, как скалярный потенциал связан с материей, потенциалом которой он является, и что этот потенциал находится с помощью аналогичной процедуры интегрирования, которую можно описать так.

Пусть из данной точки проведен вектор, по величине и направлению представляющий заданный элемент тока, деленный на численное значение расстояния

[1] Отрицательный знак применяется здесь для того, чтобы сделать наши уравнения согласованными с уравнениями, в которых используются Кватернионы.

до этого элемента от данной точки. Пусть это проделано для каждого элемента электрического тока. Результирующая всех полученных таким образом векторов является потенциалом всего тока. Поскольку ток — величина векторная, его потенциал также является вектором, см. п. 422.

Когда задано распределение электрических токов, то существует одно и только одно распределение величины $\mathfrak{A}$, такое, при котором $\mathfrak{A}$ всюду конечно, непрерывно, удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\mu\mathfrak{C}, \qquad S.\nabla\mathfrak{A} = 0$$

и исчезает на бесконечном расстоянии от электрической системы. Это та самая величина, которая дается уравнениями (5), допускающими запись в кватернионной форме:

$$\mathfrak{A} = \mu \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r}\, dx\, dy\, dz.$$

Кватернионные выражения для электромагнитных уравнений

618. Мы старались избегать в этом трактате каких-либо операций, требующих от читателя знания кватернионного исчисления. В то же время там, где это было необходимо, мы, не колеблясь, вводили понятие вектора, и когда у нас возникала возможность обозначить вектор каким-либо одним символом, мы прибегали к готическим буквам. Число различных векторов получилось столь большим, что символы, излюбленные Гамильтоном, оказались бы сразу же исчерпанными. Поэтому любая готическая буква, где бы она ни использовалась, означает гамильтоновский вектор и указывает не только на его величину, но и на его направление. Составляющие же вектора обозначаются латинскими или греческими буквами.

Основными векторами, которые мы должны рассмотреть, являются:

	Символ вектора	Составляющие
Радиус-вектор точки	ρ	$x\ y\ z$
Электромагнитный импульс в точке	$\mathfrak{A}$	$F\ G\ H$
Магнитная индукция	$\mathfrak{B}$	$a\ b\ c$
(Полный) электрический ток	$\mathfrak{C}$	$u\ v\ w$
Электрическое смещение	$\mathfrak{D}$	$f\ g\ h$
Электродвижущая напряженность	$\mathfrak{E}$	$P\ Q\ R$
Механическая сила	$\mathfrak{F}$	$X\ Y\ Z$
Скорость точки	$\mathfrak{G}$ или $\dot{\rho}$	$\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}$
Магнитная сила	$\mathfrak{H}$	$\alpha\ \beta\ \gamma$
Интенсивность намагниченности	$\mathfrak{I}$	$A\ B\ C$
Ток проводимости	$\mathfrak{K}$	$p\ q\ r$

Мы имеем также следующие скалярные функции:

Электрический потенциал	Ψ
Магнитный потенциал (там, где он существует)	Ω
Электрическая плотность	$\mathfrak{e}$
Плотность магнитной «материи»	$\mathfrak{m}$

Кроме этих, мы имеем еще следующие величины, указывающие на физические свойства среды в каждой точке:

C — проводимость для электрических токов,
K — диэлектрическая индуктивная способность,
μ — магнитная индуктивная способность.

Эти величины в изотропных средах являются просто скалярными функциями ρ, но в общем случае они представляют собой линейные векторные операторы, действующие на векторные функции, к которым они применяются. Операторы K и μ являются, несомненно, всегда самосопряженными, вероятно, и C тоже.

619. Уравнения (A) для магнитной индукции, первое из которых $a=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}$, можно теперь записать в виде

$$\mathfrak{B}=V.\nabla\mathfrak{A},$$

где ∇ есть оператор $i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz}$, а V указывают на то, что следует брать только векторную часть результата этой операции.

Так как $\mathfrak{A}$ подчиняется условию $S.\nabla\mathfrak{A}=0$, то $\nabla\mathfrak{A}$ есть чистый вектор, и символ V не нужен.

Уравнения (B) для электродвижущей напряженности, первое из которых

$$P=c\dot{y}-b\dot{z}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},$$

принимают вид

$$\mathfrak{E}=V.\mathfrak{G}\mathfrak{B}-\dot{\mathfrak{A}}-\nabla\Psi.$$

Уравнения (C) для механической силы, первое из которых

$$X=cv-bw+eP-m\,(d\Omega/dx),$$

принимают вид

$$\mathfrak{F}=V\mathfrak{C}\mathfrak{B}+e\mathfrak{E}-m\nabla\Omega.$$

Уравнения (D) для намагничения, первое из которых есть $a=\alpha+4\pi A$, принимают вид

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}.$$

Уравнения (E) для электрических токов, первое из которых $4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}$, принимают вид

$$4\pi\mathfrak{C}=V.\nabla\mathfrak{H}.$$

Уравнение для тока проводимости, по закону Ома, есть

$$\mathfrak{K}=C\mathfrak{E}.$$

Уравнение для электрического смещения

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{4\pi}K\mathfrak{E}.$$

Уравнение для полного тока, возникающего из-за изменения электрического смещения и из-за наличия тока проводимости, следующее:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}.$$

Когда намагниченность возникает из-за магнитной индукции, то

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Мы должны также определить электрическую объемную плотность

$$\mathfrak{e} = S.\nabla\mathfrak{D}$$

и магнитную объемную плотность

$$\mathfrak{m} = S.\nabla\mathfrak{J}.$$

Когда магнитная сила может быть вычислена через потенциал, то

$$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega.$$

ГЛАВА X

РАЗМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ

620. Любая электромагнитная величина может быть определена относительно фундаментальных единиц Длины, Массы и Времени. Если мы будем исходить из определения единицы электричества, данного в п. 65, мы можем получить определения единиц любых других электромагнитных величин, пользуясь уравнениями, куда входят и эти величины, и величины, представляющие количество электричества. Система единиц, полученная таким образом, называется Электростатической Системой.

С другой стороны, если мы будем исходить из определения единицы магнитного полюса, данного в п. 374, то для того же самого набора величин мы получим иную систему единиц, которая не совпадает с предыдущей и называется Электромагнитной Системой.

Начнем с установления общих для обеих систем связей между различными единицами, а затем уже построим таблицу размерностей единиц, соответствующих каждой системе.

621. Подлежащие рассмотрению первичные простейшие величины объединим попарно. В первых трех парах произведение двух величин в каждой из пар является величиной энергии или работы. У следующих трех пар произведение каждой пары является величиной энергии, отнесенной к единице объема.

ПЕРВЫЕ ТРИ ПАРЫ

Электростатическая пара

	Обозначение
(1). Количество электричества	e
(2). Электродвижущая сила или электрический потенциал	E
Магнитная пара	
(3). Количество свободного магнетизма или мощность полюса	m
(4). Магнитный потенциал	Ω
Электрокинетическая пара	
(5). Электрокинетический импульс контура	p
(6). Электрический ток	C

ВТОРЫЕ ТРИ ПАРЫ

Электростатическая пара

(7). Электрическое смещение (измеренное через поверхностную плотность)	$\mathfrak{D}$
(8). Электродвижущая напряженность	$\mathfrak{E}$
Магнитная пара	
(9). Магнитная индукция	$\mathfrak{B}$
(10). Магнитная сила	$\mathfrak{H}$
Электрокинетическая пара	
(11). Плотность электрического тока в точке	$\mathfrak{C}$
(12). Вектор-потенциал электрических токов	$\mathfrak{A}$

622. Между этими величинами существуют следующие соотношения. Прежде всего, поскольку размерность энергии равна $[L^2M/T^2]$, а размерность энергии, отнесенной к единице объема, $[M/LT^2]$, мы имеем следующие уравнения для размерностей:

$$[eE]=[m\Omega]=[pC]=\left[\frac{L^2M}{T^2}\right], \tag{1}$$

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{E}]=[\mathfrak{B}\mathfrak{H}]=[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]=\left[\frac{M}{LT^2}\right]. \tag{2}$$

Во-вторых, поскольку e, p, $\mathfrak{A}$ являются интегралами по времени от C, E и $\mathfrak{E}$ соответственно, то

$$\left[\frac{e}{C}\right]=\left[\frac{p}{E}\right]=\left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right]=[T]. \tag{3}$$

В-третьих, поскольку E, Ω и p, являются линейными интегралами от $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно, то

$$\left[\frac{E}{\mathfrak{E}}\right]=\left[\frac{\Omega}{\mathfrak{H}}\right]=\left[\frac{p}{\mathfrak{A}}\right]=[L]. \tag{4}$$

Наконец, поскольку e, C и m являются поверхностными интегралами от $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно, то

$$\left[\frac{e}{\mathfrak{D}}\right]=\left[\frac{C}{\mathfrak{C}}\right]=\left[\frac{m}{\mathfrak{B}}\right]=[L^2]. \tag{5}$$

623. Эти пятнадцать уравнений не являются независимыми, и, для того чтобы получить размерности двенадцати входящих в них единиц, нам требуется еще одно дополнительное уравнение. Если, однако, мы возьмем либо e, либо m в качестве независимой единицы, можем выразить через них размерности остальных единиц:

$$(1).\quad [e] = [e] = \left[\frac{L^2M}{mT}\right].$$

$$(2).\quad [E] = \left[\frac{L^2M}{eT^2}\right] = \left[\frac{m}{T}\right].$$

$$(3).\ \text{и}\ (5).\quad [p] = [m] = \left[\frac{L^2M}{eT}\right] = [m].$$

$$(4).\ \text{и}\ (6).\quad [C] = [\Omega] = \left[\frac{e}{T}\right] = \left[\frac{L^2M}{mT^2}\right].$$

$$(7).\quad [\mathfrak{D}] = \left[\frac{e}{L^2}\right] = \left[\frac{M}{mT}\right].$$

$$(8).\quad [\mathfrak{E}] = \left[\frac{LM}{eT^2}\right] = \left[\frac{m}{LT}\right].$$

$$(9).\quad [\mathfrak{B}] = \left[\frac{M}{eT}\right] = \left[\frac{m}{L^2}\right].$$

$$(10).\quad [\mathfrak{H}] = \left[\frac{e}{LT}\right] = \left[\frac{LM}{mT^2}\right].$$

$$(11).\quad [\mathfrak{C}] = \left[\frac{e}{L^2T}\right] = \left[\frac{M}{mT^2}\right].$$

$$(12).\quad [\mathfrak{A}] = \left[\frac{LM}{eT}\right] = \left[\frac{m}{L}\right].$$

624. Зависимости первых десяти из этих величин можно показать, расположив их следующим образом:

e, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, C и Ω.	E, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, m и p.
m и p, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, E.	C и Ω, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, e.

Величины, входящие в первую строку, получаются из e, а соответствующие им величины второй строки — из m с помощью одних и тех же операций. Нетрудно углядеть, что порядок расположения величин в первой строке в точности обратен порядку расположения величин во второй строке. Размерности первых четырех величин каждой строки содержат символ первой величины, стоящей в данной строке, в числителе, а размерности последующих четырех величин содержат этот символ в знаменателе.

Все приведенные выше соотношения справедливы независимо от того, какую систему единиц мы примем.

625. Единственными системами, представляющими ценность для науки, являются электростатическая и электромагнитная системы. Электростатическая система основана на определении единицы электричества, данной в п. 41, 42; она может быть выведена из уравнения $\mathfrak{E} = e/L^2$, которое означает, что в произ-

вольной точке результирующая электрическая сила $\mathfrak{E}$, обусловленная действием количества электричества e на расстоянии L, находится делением e на L^2. Подставляя уравнения размерности (1) и (8), мы находим

$$\left[\frac{LM}{eT^2}\right]=\left[\frac{e}{L^2}\right], \qquad \left[\frac{m}{LT}\right]=\left[\frac{M}{mT}\right],$$

откуда в электростатической системе

$$[e]=[L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}], \quad m=[L^{1/2}M^{1/2}].$$

Электромагнитная система основана на строгой аналогии в определении единицы мощности магнитного полюса, данном в п. 374, которое приводит к уравнению $\mathfrak{H}=m/L^2$, откуда

$$\left[\frac{e}{LT}\right]=\left[\frac{M}{eT}\right], \qquad \left[\frac{LM}{mT^2}\right]=\left[\frac{m}{L^2}\right],$$

т. е. в электромагнитной системе

$$[e]=[L^{1/2}M^{1/2}], \qquad [m]=[L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}].$$

Из этих результатов находятся размерности других величин.

626.

Таблица размерностей

	Обозначение	Размерность в электростатической системе	Размерность в электромагнитной системе
Количество электричества	e	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]$	$[L^{1/2}M^{1/2}]$.
Криволинейный интеграл от электрической силы . . .	E	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}]$	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}]$.
Количество магнетизма; Электрокинетический импульс тока . . .	m; p	$[L^{1/2}M^{1/2}]$	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Электрический ток; Магнитный потенциал . . .	C; Ω	$[L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}]$	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Электрическое смещение; Поверхностная плотность . . .	$\mathfrak{D}$	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}]$	$[L^{-3/2}M^{1/2}]$.
Электродвижущая напряженность	$\mathfrak{E}$	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}]$	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}]$.
Магнитная индукция	$\mathfrak{B}$	$[L^{-3/2}M^{1/2}]$	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Магнитная сила	$\mathfrak{H}$	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}]$	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Плотность тока	$\mathfrak{C}$	$[L^{-1/2}M^{1/2}T^{-2}]$	$[L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}]$.
Вектор-потенциал	$\mathfrak{A}$	$[L^{-1/2}M^{1/2}]$	$[L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}]$.

627. Мы уже рассмотрели произведения пар этих величин в том порядке, в каком они стоят. В некоторых случаях представляют научный интерес их отношения. Так:

		Обозначение	Электростатическая система	Электромагнитная система
$\frac{e}{E} =$	емкость накопителя	q	$[L]$	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$.
$\frac{P}{C} =$	коэффициент самоиндукции тока, или электромагнитная способность	L	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$	$[L]$.
$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} =$	удельная индуктивная способность диэлектрика	K	$[0]$	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$.
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} =$	магнитная индуктивная способность	μ	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$	$[0]$.
$\frac{E}{C} =$	сопротивление проводника	R	$\left[\frac{T}{L}\right]$	$\left[\frac{L}{T}\right]$.
$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{C}} =$	удельное сопротивление вещества	r	$[T]$	$\left[\frac{L^2}{T}\right]$.

628. Если единицы длины, массы и времени одни и те же в двух системах, то число электростатических единиц электричества, содержащихся в одной электромагнитной единице, численно равно некоторой скорости, абсолютное значение которой не зависит от величины используемых фундаментальных единиц. Эта скорость является важной физической величиной, которую мы обозначим символом v.

Число электростатических единиц в одной электромагнитной единице

Для e, C, Ω, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C}$, ...v.

Для m, p, E, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}$, ...$1/v$.

Для электростатической способнссти, диэлектрической индуктивной способности и проводимости — v^2.

Для электромагнитной способности, магнитной индуктивной способности и сопротивления — $1/v^2$.

Некоторые методы определения v будут даны в п. 768—780.

В электростатической системе удельная диэлектрическая индуктивная способность воздуха предполагается равной единице. Следовательно, в электромагнитной системе эта величина равна $1/v^2$.

В электромагнитной системе удельная магнитная индуктивная способность воздуха предполагается равной единице. Следовательно, в электростатической системе эта величина равна $1/v^2$.

Практическая система электрических единиц

629. Инженеры-электрики, практически занимающиеся электромагнитной телеграфией, из этих двух систем единиц больше используют электромагнитную. Если, однако, взять единицы длины, времени и массы, обычно употребляемые в других отраслях науки, такие, как метр или сантиметр, секунда и грамм, то единицы сопротивления и электродвижущей силы будут настолько малы, что для выражения величин, встречающихся в практике, придется использовать огромные числа, а единицы, выражающие количества электричества и емкости, будут так велики, что только их чрезвычайно малые доли могут когда-либо встретиться в практике. Поэтому инженеры-электрики приняли набор электрических единиц, выведенных с помощью электромагнитной системы из большой единицы длины и малой единицы массы.

Единица длины, использованная для этой цели, равна десяти миллионам метров, или примерно длине четверти земного меридиана.

Единица времени равна, как и прежде, одной секунде.

Единица массы равна 10^{-11} грамма, или одной стомиллионной части миллиграмма.

Электрические единицы, полученные из этих фундаментальных единиц, названы в честь выдающихся первооткрывателей в области электричества. Так, практическая единица сопротивления называется Ом; она представлена катушкой сопротивления, сделанной Британской Ассоциацией и описанной в п. 340. В электромагнитной системе она выражается скоростью 10 000 000 метров в секунду.

Практическая единица электродвижущей силы называется Вольт; она мало отличается от электродвижущей силы ячейки Даниэля. М-р Лэтимер Кларк (Latimer Clark) изобрел недавно очень стабильную ячейку, электродвижущая сила которой почти точно равна 1,454 Вольт.

Практическая единица емкости называется Фарада. Количество электричества, протекающее через сопротивление один Ом под действием электродвижущей

Таблица

Фундаментальные единицы	Практическая система	Доклад Б. А. 1863	Томсон	Вебер
Длина	*четверть земного меридиана*	*метр*	*сантиметр*	*миллиметр*
Время	*секунда*	*секунда*	*секунда*	*секунда*
Масса	10^{-11} *грамма*	*грамм*	*грамм*	*миллиграмм*
Сопротивление	Ом	10^7	10^9	10^{10}
Электродвижущая сила	Вольт	10^5	10^8	10^{11}
Емкость	Фарада	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
Количество электричества	Фарада (заряженная до 1 Вольта)	10^{-2}	10^{-1}	10

силы в один Вольт за одну секунду, равно заряду, создаваемому в конденсаторе емкостью одна Фарада электродвижущей силой один Вольт.

Использование этих наименований оказалось более удобным, чем постоянное повторение слов «электромагнитные единицы» вместе с дополнительным указанием тех фундаментальных единиц, на которых они основаны.

Когда необходимо измерить очень большие величины, образуется крупная единица путем умножения первоначальной единицы на миллион и добавления к ее наименованию приставки *мега*.

Аналогичным образом с помощью приставки *микро* образуется малая единица, составляющая одну миллионную первоначальной единицы.

Значения этих практических единиц в различных системах, которые были приняты в разные времена, даны в таблице.

ГЛАВА XI

ОБ ЭНЕРГИИ И НАПРЯЖЕНИИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электростатическая энергия

630. Энергию системы можно разделить на потенциальную и кинетическую. Потенциальная энергия, обусловленная электризацией, уже была рассмотрена в п. 85. Ее можно записать так:

$$W = \frac{1}{2}\sum (e\Psi), \tag{1}$$

где e — заряд электричества в том месте, где электрический потенциал равен Ψ, а суммирование следует распространить на каждую область, где существует электризация.

Если f, g, h являются составляющими электрического смещения, то количество лектричества в элементе объема $dxdydz$ равно

$$e = \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

а

$$W = \frac{1}{2}\iiint \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) \Psi\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

где интегрирование следует распространить на все пространство.

631. После интегрирования этого выражения по частям с учетом того, что на бесконечно большом расстоянии r от данной точки, принадлежащей конечной заряженной системе, потенциал Ψ становится величиной бесконечно малой, имеющей порядок r^{-1}, а f, g, h становятся бесконечно малыми величинами порядка r^{-2}, выражение приводится к виду

$$W = -\frac{1}{2}\iiint \left(f\frac{d\Psi}{dx} + g\frac{d\Psi}{dy} + h\frac{d\Psi}{dz}\right) dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

где интегрирование следует распространить на все пространство.

Если теперь вместо $-d\Psi/dx$, $-d\Psi/dy$ и $-d\Psi/dz$ мы запишем составляющие электродвижущей напряженности P, Q, R, то найдем

$$W=\frac{1}{2}\iiint(Pf+Qg+Rh)\,dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

Следовательно, электростатическая энергия всего поля будет такой же самой, если мы предположим, что она имеется в каждой части поля, где есть электродвижущая напряженность и электрическое смещение, а не сосредоточена в тех местах, где находится свободное электричество.

Энергия в единице объема равна половине произведения электродвижущей напряженности и электрического смещения, умноженной на косинус угла, который образуют эти векторы.

На языке кватернионов это есть $-\frac{1}{2}S.\mathfrak{E}\mathfrak{D}$.

Магнитная энергия

632. Энергию, обусловленную намагниченностью, мы можем трактовать аналогично тому, как это сделано в случае электризации, п. 85. Если составляющие намагниченности равны A, B, C, а составляющие магнитной силы α, β, γ, то потенциальная энергия системы магнитов равна (п. 389)

$$-\frac{1}{2}\iiint(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,dx\,dy\,dz, \tag{6}$$

причем интегрирование распространяется на пространство, занятое намагниченной материей. Однако эта часть энергии будет включена в кинетическую энергию в той форме, в которой мы ее сейчас получим.

633. Мы можем преобразовать это выражение в отсутствии электрических токов следующим образом.

Мы знаем, что

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \tag{7}$$

Следовательно (п. 97), если

$$\alpha=-\frac{d\Omega}{dx},\qquad \beta=-\frac{d\Omega}{dy},\qquad \gamma=-\frac{d\Omega}{dz}, \tag{8}$$

что всегда имеет место для магнитных явлений при отсутствии токов, то

$$\iiint(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,dx\,dy\,dz=0, \tag{9}$$

где интегрирование распространяется на все пространство, или

$$\iiint\{(\alpha+4\pi A)\,\alpha+(\beta+4\pi B)\,\beta+(\gamma+4\pi C)\,\gamma\}\,dx\,dy\,dz=0. \tag{10}$$

Следовательно, энергия, обусловленная магнитной системой, равна

$$-\frac{1}{2}\iiint(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{8\pi}\iiint(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$=\frac{1}{8\pi}\iiint\mathfrak{H}^2\,dx\,dy\,dz. \tag{11}$$

Электрокинетическая энергия

634. В п. 578 мы уже представили кинетическую энергию системы токов в виде

$$T=\frac{1}{2}\sum(pi), \qquad (12)$$

где p — электромагнитный импульс контура, а i — сила циркулирующего по нему тока; суммирование распространяется на все контуры.

Но мы уже доказали (п. 590), что p можно представить как линейный интеграл вида

$$p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds, \qquad (13)$$

где F, G, H являются составляющими электромагнитного импульса $\mathfrak{A}$ в точке (x, y, z), а интегрирование распространяется на замкнутый контур s. Таким образом, мы находим

$$T=\frac{1}{2}\sum i\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds. \qquad (14)$$

Если u, v, w являются составляющими плотности тока в произвольной точке проводящего контура, а S — поперечное сечение контура, то можно записать

$$i\frac{dx}{ds}=uS, \qquad i\frac{dy}{ds}=vS, \qquad i\frac{dz}{ds}=wS. \qquad (15)$$

Мы можем также записать объем $Sds=dxdydz$, и тогда находим

$$T=\frac{1}{2}\iiint(Fu+Gv+Hw)\,dx\,dy\,dz, \qquad (16)$$

где интегрирование следует распространить на все части пространства, где имеются электрические токи.

635. Подставим теперь вместо u, v, w их значения, следующие из уравнений (E) п. 607, выражающих электрические токи через компоненты магнитной силы α, β, γ. Тогда имеем

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint\left\{F\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+G\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+H\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}dx\,dy\,dz, \qquad (17)$$

где интегрирование распространяется на часть пространства, включающую все токи.

Если проинтегрировать это выражение по частям и вспомнить, что на большом расстоянии r от системы составляющие α, β и γ являются величинами порядка r^{-3}, мы найдем, что, когда область интегрирования распространена на все пространство, выражение сводится к такому:

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint\left\{\alpha\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)+\beta\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)\right\}dx\,dy\,dz. \qquad (18)$$

Из уравнений (A) п. 591 для магнитной индукции мы можем подставить вместо величин в круглых скобках составляющие магнитной индукции a, b, c, так

что кинетическую энергию можно записать

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz, \quad (19)$$

интегрирование следует распространить на все части пространства, где магнитная сила и магнитная индукция имеют отличные от нуля значения.

Величина, стоящая в этом выражении в скобках, является произведением магнитной индукции и проекции магнитной силы на направление магнитной индукции.

На языке кватернионов это можно записать более просто: $-S.\mathfrak{B}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ — магнитная индукция, составляющие которой равны a, b, c, а $\mathfrak{H}$ — магнитная сила, составляющими которой являются α, β, γ.

636. Таким образом, электрокинетическая энергия системы может быть выражена в виде интеграла, который следует брать либо там, где есть электрические токи, либо по всем тем частям поля, где существует магнитная сила. Первый интеграл является естественным выражением для теории, в которой предполагается прямое воздействие токов друг на друга на расстоянии, тогда как второй интеграл соответствует теории, пытающейся объяснить действие между токами с помощью некоторого промежуточного действия в пространстве между ними. В настоящем трактате принят этот последний метод исследования, поэтому мы, естественно, принимаем второе выражение как наиболее содержательную форму представления кинетической энергии.

В соответствии с нашей гипотезой мы предполагаем, что кинетическая энергия существует в любом месте, где есть магнитная сила, т. е., вообще говоря, в каждой части поля. Количество этой энергии в единице объема равно $-\frac{1}{8\pi}S.\mathfrak{B}\mathfrak{H}$, причем эта энергия существует в форме какого-то вида движения материи в каждой части пространства.

Когда мы перейдем к рассмотрению открытия Фарадея, связанного с действием магнетизма на поляризованный свет, мы укажем причины нашей убежденности в том, что в каждом месте, где есть линии магнитной силы, имеется вращательное движение материи вокруг этих линий; см. п. 821.

Сравнение магнитной и электрокинетической энергии

637. В п. 423 мы нашли, что взаимная потенциальная энергия двух магнитных оболочек с мощностями φ и φ', ограниченных соответственно замкнутыми кривыми s и s', равна $-\varphi\varphi'\iint (\cos\varepsilon)/r\,ds\,ds'$, где ε — угол между направлениями ds и ds', r — расстояние между ними.

Мы также нашли (п. 521), что взаимная энергия двух контуров s и s', по которым текут токи i и i', равна $ii'\iint (\cos\varepsilon)/r\,ds\,ds'$.

Если i и i' равны соответственно φ и φ', то механическое действие между магнитными оболочками равно по величине действию между соответствующими электрическими контурами и имеет одинаковое с ним направление. В случае магнитных оболочек сила стремится уменьшить их взаимную потенциальную энергию, а в случае контуров она стремится увеличить их взаимную энергию, потому что эта энергия является кинетической.

Никаким распределением намагниченной материи невозможно воспроизвести систему, во всех отношениях соответствующую электрическому контуру, поскольку в каждой точке пространства потенциал магнитной системы однозначен, в то время как потенциал электрической системы многозначен.

Однако всегда можно при соответствующем расположении бесконечно малых электрических контуров воспроизвести систему, во всех отношениях соответствующую любой магнитной системе, при условии, что путь интегрирования, по которому мы следуем при вычислении потенциала, не проходит сквозь какой-нибудь из этих маленьких контуров. Более полно это будет объяснено в п. 833.

Действие магнитов на расстоянии совершенно равнозначно действию электрических токов. Поэтому мы попытаемся для некоторых случаев проследить оба действия, а поскольку мы не можем объяснить электрические токи с помощью магнитов, мы должны принять другую альтернативу и объяснять магниты при помощи молекулярных электрических токов.

638. В наших исследованиях магнитных явлений в части III этого трактата мы не делали никаких попыток объяснять магнитное действие на расстоянии и подходили к нему как к основополагающему опытному факту. Таким образом, мы предполагали, что энергия магнитной системы является потенциальной и что эта энергия *уменьшается*, когда части системы подчиняются магнитным силам, действующим на них.

Если, однако, считать, что свойства магнитов определяются электрическими токами, циркулирующими внутри их молекул, то их энергия является кинетической и сила их взаимодействия такова, что стремится двигать их в направлении, где при условии неизменности силы токов кинетическая энергия *возрастает*.

Этот способ объяснения магнетизма требует от нас отказа от метода, которому мы следовали в части III, рассматривая магнит как сплошное однородное тело, любая самая малая часть которого обладает того же сорта магнитными свойствами, что и все тело в целом.

Теперь мы должны считать, что магнит содержит конечное, хотя и очень большое, число электрических контуров и что он обладает существенно молекулярной структурой, отличной от непрерывной.

Если считать наш математический аппарат настолько грубым, что линия интегрирования не может проходить сквозь молекулярный контур, и если предположить, что в нашем элементе объема содержится бессчетное количество магнитных молекул, то мы снова придем к результатам, сходным с результатами главы III; если же, однако, считать наш математический аппарат более тонким, пригодным для исследования того, что происходит внутри молекул, то мы должны будем отставить старую теорию магнетизма и принять теорию Ампера, не допускающую никаких иных магнитов, кроме магнитов, состоящих из электрических токов.

Мы должны также рассматривать и магнитную и электромагнитную энергию как энергию кинетическую, приписав ей надлежащий знак, как это было сделано в п. 635.

В дальнейшем, хотя мы и можем при случае, как в п. 639 и далее, попытаться следовать старой теории магнетизма, мы обнаружим, что полностью согласованная система получается только при отказе от этой теории и принятии теории молекулярных токов Ампера, как в п. 644.

Энергия поля состоит, таким образом, только из двух частей: электростатической, или потенциальной энергии

$$W=\frac{1}{2}\iiint(Pf+Qg+Rh)\,dx\,dy\,dz,$$

и электромагнитной, или кинетической энергии

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЭЛЕМЕНТ ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Силы, действующие на магнитный элемент

639. Потенциальная энергия элемента тела $dxdydz$, намагниченного с интенсивностью, имеющей составляющие A, B, C, и помещенного в поле магнитной силы с составляющими α, β, γ, равна $-(A\alpha+B\beta+C\gamma)dxdydz$.

Следовательно, если сила, вынуждающая элемент тела двигаться в направлении x без вращения, равна $X_1\,dxdydz$, то

$$X_1=A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx}, \tag{1}$$

и если момент пары сил, стремящейся повернуть элемент вокруг оси x в направлении от y к z, равен $L\,dxdydz$, то

$$L=B\gamma-C\beta. \tag{2}$$

Силы и моменты, соответствующие осям y и z, можно записать, сделав необходимые подстановки.

640. Если намагниченное тело несет электрический ток, составляющие которого равны u, v, w, то в соответствии с уравнениями (C) п. 603 появится дополнительная электромагнитная сила с составляющими X_2, Y_2, Z_2, причем

$$X_2=vc-wb. \tag{3}$$

Следовательно, полная сила X, возникающая из-за наличия магнетизма молекулы, а также из-за проходящего через нее тока, равна

$$X=A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx}+vc-wb. \tag{4}$$

Величины a, b, c являются составляющими магнитной индукции; они связаны с составляющими магнитной силы α, β, γ уравнениями, данными в п. 400:

$$a=\alpha+4\pi A,\qquad b=\beta+4\pi B,\qquad c=\gamma+4\pi C. \tag{5}$$

Составляющие тока u, v, w можно выразить через α, β, γ с помощью уравнений п. 607;

$$4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},\qquad 4\pi v=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\qquad 4\pi w=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$X=\frac{1}{4\pi}\left\{(a-\alpha)\frac{d\alpha}{dx}+(b-\beta)\frac{d\beta}{dx}+(c-\gamma)\frac{d\gamma}{dx}+b\left(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\right)+c\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)\right\},$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{a\frac{d\alpha}{dx}+b\frac{d\alpha}{dy}+c\frac{d\alpha}{dz}-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\}. \qquad (7)$$

В соответствии с п. 403

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0. \qquad (8)$$

Умножив уравнение (8) на α и разделив на 4π, мы можем добавить результат к (7), тогда получим

$$X=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}\left[a\alpha-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]+\frac{d}{dy}[b\alpha]+\frac{d}{dz}[c\alpha]\right\}, \qquad (9)$$

а с учетом (2)

$$L=\frac{1}{4\pi}((b-\beta)\gamma-(c-\gamma)\beta), \qquad (10)$$

$$=\frac{1}{4\pi}(b\gamma-c\beta), \qquad (11)$$

где X — сила в направлении оси x, отнесенная к единице объема, а L — момент сил (на единицу объема) относительно этой оси.

Об объяснении этих сил с помощью гипотезы о наличии среды в напряженном состоянии

641. Обозначим напряжение любого вида, отнесенное к единице площади, символом вида P_{hk}, где первый индекс $_h$ показывает, что нормаль к поверхности, на которую по предположению действует напряжение, параллельна оси h, а второй индекс $_k$ показывает, что направление напряжения, с которым действует часть тела, прилегающая к положительной стороне поверхности, на часть тела, прилегающую к отрицательной стороне, является направлением, параллельным оси k.

Направления h и k могут совпадать — в этом случае напряжение является нормальным. Они могут быть наклонены относительно друг друга — в этом случае напряжение является наклонным; наконец, могут быть перпендикулярны друг другу — в этом случае напряжение является тангенциальным.

Условие, при котором напряжения не создают никакого стремления к вращению элементарной части тела, есть $P_{hk}=P_{kh}$.

Однако в случае намагниченного тела такая тенденция к вращению имеется, и, следовательно, это условие, справедливое в обычной теории напряжений, оказывается невыполненным.

Рассмотрим действие напряжения на шесть сторон элементарного объема тела $dx\,dy\,dz$, взяв начало координат в его центре тяжести.

На положительную сторону поверхности $dy\,dz$, где значение x равно $dx/2$, действуют силы:

$$\left.\begin{aligned}&\text{параллельно } x\quad \left(P_{xx}+\frac{1}{2}\frac{dP_{xx}}{dx}dx\right)dy\,dz=X_{+x},\\ &\text{параллельно } y\quad \left(P_{xy}+\frac{1}{2}\frac{dP_{xy}}{dx}dx\right)dy\,dz=Y_{+x},\\ &\text{параллельно } z\quad \left(P_{xz}+\frac{1}{2}\frac{dP_{xz}}{dx}dx\right)dy\,dz=Z_{+x}.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Силы, действующие на противоположную сторону,— X_{-x},— Y_{-x}, —Z_{-x} можно получить, сменив знак при dx. Таким же способом мы можем выразить системы трех сил, действующих на все остальные поверхности этого элемента, обозначая направление силы заглавной буквой, а поверхность, на которую она действует, индексом.

Если обозначить полную силу, действующую на элемент параллельно оси x, через $X\,dx\,dy\,dz$, то

$$X\,dx\,dy\,dz=X_{+x}+X_{+y}+X_{+z}+X_{-x}+X_{-y}+X_{-z},$$
$$=\left(\frac{dP_{xx}}{dx}+\frac{dP_{yx}}{dy}+\frac{dP_{zx}}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

откуда

$$X=\frac{d}{dx}P_{xx}+\frac{d}{dy}P_{yx}+\frac{d}{dz}P_{zx}.\tag{13}$$

Если $L\,dx\,dy\,dz$ является полным моментом сил относительно оси x, стремящимся повернуть элемент в направлении от y к z, то

$$L\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}dy(Z_{+y}-Z_{-y})-\frac{1}{2}dz(Y_{+z}-Y_{-z}),$$
$$=(P_{yz}-P_{zy})\,dx\,dy\,dz,$$

откуда $L=P_{yz}-P_{zy}$. (14)

Сравнивая значения X и L, определяемые уравнениями (9) и (11), с теми, которые дают уравнения (13) и (14), мы находим, что, если положить

$$\begin{aligned}&P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left\{a\alpha-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\quad P_{yz}=\frac{1}{4\pi}b\gamma,\quad P_{zy}=\frac{1}{4\pi}c\beta.\\ &P_{yy}=\frac{1}{4\pi}\left\{b\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\quad P_{zx}=\frac{1}{4\pi}c\alpha,\quad P_{xz}=\frac{1}{4\pi}a\gamma,\\ &P_{zz}=\frac{1}{4\pi}\left\{c\gamma-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\quad P_{xy}=\frac{1}{4\pi}a\beta,\quad P_{yx}=\frac{1}{4\pi}b\alpha,\end{aligned}\tag{15}$$

то сила, обусловленная системой напряжений с такими составляющими, по своим действиям на каждый элемент тела эквивалентна в статическом смысле силам, обусловленным намагниченностью и электрическими токами.

642. Легко установить природу напряжения с такими составляющими. Возьмем в качестве оси x биссектрису угла между направлениями магнитной силы и магнитной индукции, а ось y проведем в плоскости этих направлений, направив ее в сторону магнитной силы.

Если мы положим, что численное значение магнитной силы равно $\mathfrak{H}$, численное значение магнитной индукции равно $\mathfrak{B}$ и угол между их направлениями равен 2ε, то

$$\begin{aligned} &\alpha=\mathfrak{H}\cos\varepsilon, \quad \beta=-\mathfrak{H}\sin\varepsilon, \quad \gamma=0,\\ &a=\mathfrak{B}\cos\varepsilon, \quad b=-\mathfrak{B}\sin\varepsilon, \quad c=0; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left(+\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \quad && P_{yz}=P_{zx}=P_{zy}=P_{xz}=0,\\ &P_{yy}=\frac{1}{4\pi}\left(-\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), && P_{xy}=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon,\\ &P_{zz}=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), && P_{yx}=-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, напряженное состояние можно рассматривать как составленное из:

(1). Давления, одинакового по всем направлениям $=(1/8\pi)\mathfrak{H}^2$.

(2). Натяжения вдоль линии, делящей пополам угол между направлениями магнитной силы и магнитной индукции $=(1/4\pi)\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon$.

(3). Давления вдоль линии, делящей пополам внешний угол между этими направлениями $=(1/4\pi)\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon$.

(4). Пары сил, стремящейся повернуть каждый элемент вещества в плоскости этих двух направлений *от* направления магнитной индукции *в* направлении магнитной силы $=(1/4\pi)\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin 2\varepsilon$.

Когда магнитная индукция направлена так же, как магнитная сила, что всегда имеет место в жидкостях и ненамагниченных твердых телах, то $\varepsilon=0$; если направить ось x вдоль магнитной силы, то

$$P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{B}\mathfrak{H}-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \qquad P_{yy}=P_{zz}=-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2, \tag{18}$$

и тангенциальное напряжение исчезает.

Напряжение, таким образом, состоит в этом случае из комбинации гидростатического давления $(1/8\pi)\mathfrak{H}^2$ и продольного натяжения $(1/4\pi)\mathfrak{B}\mathfrak{H}$ вдоль силовых линий.

643. При отсутствии намагниченности $\mathfrak{B}=\mathfrak{H}$, и напряжение еще больше упрощается: оно состоит из натяжения вдоль силовых линий, равного $(1/8\pi)\mathfrak{H}^2$, и давления по всем направлениям, перпендикулярным силовым линиям, также численно равным $(1/8\pi)\mathfrak{H}^2$. Составляющие напряжения в этом важном случае равны

$$\begin{aligned} &P_{xx}=\frac{1}{8\pi}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2), \quad && P_{yz}=P_{zy}=\frac{1}{4\pi}\beta\gamma,\\ &P_{yy}=\frac{1}{8\pi}(\beta^2-\gamma^2-\alpha^2), && P_{zx}=P_{xz}=\frac{1}{4\pi}\gamma\alpha,\\ &P_{zz}=\frac{1}{8\pi}(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2), && P_{xy}=P_{yx}=\frac{1}{4\pi}\alpha\beta. \end{aligned} \tag{19}$$

Составляющая силы вдоль x, возникающая вследствие действия этих напряжений на элемент среды единичного объема, равна

$$X=\frac{d}{dx}P_{xx}+\frac{d}{dy}P_{yx}+\frac{d}{dz}P_{zx},$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\alpha}{dx}-\beta\frac{d\beta}{dx}-\gamma\frac{d\gamma}{dx}\right\}+\frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\beta}{dy}+\beta\frac{d\alpha}{dy}\right\}+\frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\gamma}{dz}+\gamma\frac{d\alpha}{dz}\right\},$$
$$=\frac{1}{4\pi}\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)+\frac{1}{4\pi}\gamma\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)-\frac{1}{4\pi}\beta\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Далее,

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=4\pi\mathfrak{m},\quad \frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}=4\pi v,\quad \frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}=4\pi w,$$

где $\mathfrak{m}$ — плотность аустральной (южной) магнитной материи (отнесенная к единице объема), а v и w — составляющие электрических токов, отнесенных к единичным площадкам, перпендикулярным соответственно y и z. Следовательно:

$$\left.\begin{array}{l} X=\alpha\mathfrak{m}+v\gamma-w\beta. \\ \text{Аналогично}\quad Y=\beta\mathfrak{m}+w\alpha-u\gamma, \\ Z=\gamma\mathfrak{m}+u\beta-v\alpha. \end{array}\right\}\text{(Уравнения Электромагнитной Силы)}\qquad(20)$$

644. Если мы примем теории Ампера и Вебера относительно природы магнитных и диамагнитных тел и предположим, что магнитная и диамагнитная полярности обусловлены молекулярными электрическими токами, мы освобождаемся от воображаемой магнитной материи и находим, что $\mathfrak{m}=0$ везде, т. е.

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0,\qquad(21)$$

таким образом, уравнениями электромагнитной силы становятся

$$X=v\gamma-w\beta,\qquad Y=w\alpha-u\gamma,\qquad Z=u\beta-v\alpha.\qquad(22)$$

Это составляющие механической силы, отнесенные к единице объема вещества. Составляющие магнитной силы равны α, β, γ, а составляющие электрического тока — u, v, w. Эти уравнения идентичны полученным ранее уравнениям (С) п. 603.

645. При объяснении электромагнитной силы с помощью напряженного состояния среды мы всего лишь следуем концепции Фарадея [1] о том, что линии магнитной силы стремятся сокращаться и что эти линии отталкиваются, будучи помещенными вплотную друг к другу. Все, что мы проделали, сводится к представлению в математической форме величин натяжения вдоль линий и давления, им перпендикулярного, а также к доказательству того, что напряженное состояние, которое, по предположению, существует в среде, действительно будет давать наблюдаемые силы, действующие на проводники с электрическими токами.

Мы еще ничего не утверждали относительно способов создания и поддержания в среде этого напряженного состояния. Мы просто показали, что взаимодействие электрических токов можно представлять как зависящее от особого вида напря-

---

[1] *Exp. Res.*, 3266, 3267, 3268.

жения в окружающей среде, а не как прямое и мгновенное действие на расстоянии.

Любое дальнейшее объяснение напряженного состояния с использованием движения среды или чего-то иного должно рассматриваться уже как отдельный и независимый раздел теории, который может либо выстоять, либо потерпеть поражение, но не может повлиять на занимаемую нами сейчас позицию, см. п. 832.

В первой части нашего трактата, в п. 108, мы показали, что действие наблюдаемых электрических сил можно понимать как результат распространения в окружающей среде состояния напряжения. Теперь мы проделали то же самое для электромагнитных сил; остается лишь убедиться, является ли такое представление о среде, способной поддерживать это напряженное состояние, совместимым с другими известными явлениями или мы должны отставить его в сторону как бесплодное.

Мы должны предположить, что в поле, в котором имеет место и электростатическое, и электромагнитное действие, электростатическое напряжение, описанное в части I, налагается на электромагнитное напряжение, которое мы рассматриваем.

646. Если мы предположим, что полная земная магнитная сила равна 10 Британским единицам (гран, фут, секунда), чему она примерно и равна в Британии, то натяжение вдоль силовых линий равно 0,128 гран веса на квадратный фут. Максимальное магнитное натяжение, созданное Джоулем [2], с помощью электромагнитов составляло около 140 фунтов веса на квадратный дюйм.

ГЛАВА XII

ТОКОВЫЕ ЛИСТЫ

647. Токовый лист — это бесконечно тонкий слой проводящей материи, ограниченный с обеих сторон изолирующей средой; электрические токи могут течь по листу и не могут его покинуть нигде, за исключением некоторых точек, называемых электродами. Через электроды осуществляется ввод токов в лист и вывод их из листа.

Для того чтобы пропускать конечный электрический ток, реальный лист должен иметь конечную толщину и потому должен рассматриваться как проводник, имеющий три измерения. Однако во многих случаях практически удобно находить электрические характеристики реального проводящего листа или тонкого слоя проводов, образующих катушку, исходя из характеристик токового листа, определенного выше.

В связи с этим мы можем поверхность любой формы рассматривать как некоторый токовый лист. Выбрав одну из сторон листа в качестве положительной, мы будем считать, что любые линии, проведенные на поверхности, всегда наблюдаются с ее положительной стороны. В случае замкнутых поверхностей положитель-

[2] Sturgeon's *Annals of Electricity*, vol. V, p. 187 (1840); or *Philosophical Magazine*, Dec. 1851.

ной мы будем считать внешнюю сторону поверхности. См., однако, п. 294, где направление тока определено в предположении, что мы наблюдаем его с *отрицательной* стороны листа.

Функция тока

648. Выберем за начало отсчета на поверхности некоторую фиксированную точку A и проведем на поверхности линию из точки А в другую точку P. Обозначим через φ количество электричества, пересекающее эту линию слева направо в единицу времени. Величина φ называется функцией тока в точке P.

Функция тока зависит только от положения точки P; она одинакова для любых двух линий AP произвольной формы при условии, что эти линии могут быть преобразованы одна в другую путем непрерывного перемещения, при котором не пересекаются электроды. Действительно, если две линии охватывают площадь, не содержащую электродов, то количество электричества, которое входит внутрь этой площади через одну из линий, должно выйти через другую линию.

Пусть s обозначает длину линии AP; тогда ток, протекающий через ds слева направо, будет равен $(d\varphi/ds)ds$.

Постоянство φ на какой-либо кривой означает отсутствие тока, протекающего через эту кривую. Поэтому ее называют Линией Тока, или Линией Потока.

649. Пусть ψ есть электрический потенциал в некоторой точке листа; тогда электродвижущая сила вдоль элемента ds некоторой кривой будет равна $-(d\psi/ds)\,ds$ при условии, что нет никаких других электродвижущих сил, кроме той, которая обусловлена разностью потенциалов.

Если вдоль некоторой кривой величина ψ постоянна, то эту кривую называют Эквипотенциальной Линией.

650. Мы можем теперь предположить, что положение точки на листе определяется значениями φ и ψ в этой точке. Пусть ds_1 — длина элемента эквипотенциальной линии ψ, заключенного между двумя линиями тока φ и $\varphi+d\varphi$, а ds_2 — длина элемента токовой линии φ, заключенного между двумя эквипотенциальными линиями ψ и $\psi+d\psi$. Мы можем рассматривать ds_1 и ds_2 как стороны элемента листа $d\varphi d\psi$. Электродвижущая сила $-d\psi$ в направлении ds_2 создает ток $d\varphi$, пересекающий ds_1.

Пусть сопротивление участка листа длиной ds_2 и шириной ds_1 равно $\sigma\,(ds_2/ds_1)$, где σ — удельное сопротивление листа на единицу площади; тогда $d\psi=\sigma\dfrac{ds_2}{ds_1}\,d\varphi$, откуда $\dfrac{ds_1}{d\varphi}=\sigma\dfrac{ds_2}{d\psi}$.

651. Если лист состоит из вещества, одинаково хорошо проводящего во всех направлениях, то элемент ds_1 перпендикулярен ds_2. В случае листа с однородной проводимостью величина σ постоянна, и, положив $\psi=\sigma\psi'$, мы будем иметь $\dfrac{\delta s_1}{\delta s_2}=\dfrac{\delta\varphi}{\delta\psi'}$, линии потока и эквипотенциальные линии рассекают поверхность на маленькие квадратики.

Отсюда следует, что если φ_1 и ψ_1' являются функциями, сопряженными φ и ψ' (п. 183), то кривые φ_1 могут быть линиями потока на том листе, где кривые ψ_1' являются соответствующими эквипотенциальными линиями. Один случай —

это, конечно, тот, в котором $\varphi_1=\psi'$, а $\psi_1'=-\varphi$. В этом случае эквипотенциальные линии становятся линиями тока, а линии тока — эквипотенциальными линиями [1].

Получив решение для распределения электрических токов в однородном листе произвольной формы для любого частного случая, мы можем вывести распределение токов для любого другого случая при помощи надлежащего преобразования сопряженных функций в соответствии с методом, описанным в п. 190.

652. Далее мы должны определить магнитное действие токового листа, у которого ток целиком сосредоточен на самом листе, т. е. отсутствуют электроды, подводящие и отводящие ток.

В этом случае функция тока φ имеет в каждой точке определенное значение, а линии потока являются замкнутыми и не пересекают друг друга, хотя какая-то одна линия потока может иметь самопересечение.

Рассмотрим кольцевой участок листа, расположенный между линиями потока φ и $\varphi+\delta\varphi$. Эта часть листа представляет собой проводящий контур, в котором ток силою $\delta\varphi$ циркулирует в положительном направлении вокруг участка листа, где величина φ больше данного значения. Магнитное действие этого контура совпадает с действием магнитной оболочки, имеющей мощность $\delta\varphi$ в любой точке, за исключением точек внутри вещества оболочки. Предположим, что оболочка совпадает с той частью токового листа, на которой значение φ больше, чем на заданной линии потока.

Нанося последовательно все линии потока, начиная с той, для которой значение φ максимально, и кончая линией с наименьшим значением φ, мы разделим токовый лист на семейство контуров. Заменяя каждый из них соответствующей ему магнитной оболочкой, мы находим, что магнитное действие токового листа в любой точке, не находящейся в толще листа, такое же, как действие сложной магнитной оболочки, мощность которой в любой точке равна $C+\varphi$, где C — некоторая константа.

Если токовый лист ограничен, мы должны положить на граничной кривой $C+\varphi=0$. Если лист образует замкнутую или бесконечную поверхность, то для определения постоянной C нет никаких данных.

653. Магнитный потенциал в произвольной точке на любой из сторон токового листа дается, согласно п. 415, выражением

$$\Omega=\iint\frac{1}{r^2}\varphi\cos\vartheta\,dS,$$

где r — есть расстояние до данной точки от элемента поверхности dS, а ϑ — угол между направлением r и направлением нормали, проведенной с положительной стороны dS.

Это выражение дает магнитный потенциал во всех точках, не входящих в толщу листа, а мы знаем, что для точек внутри проводника, несущего ток, такого понятия, как магнитный потенциал, не существует.

Величина Ω разрывна на токовом листе, ибо если Ω_1 есть ее значение в некоторой точке непосредственно внутри токового листа, а Ω_2 — ее значение в точке,

[1] См. Thomson, *Camb. Math. Journ.*, vol. III, p. 286.

близкой к первой, но расположенной вне токового листа, то $\Omega_2=\Omega_1+4\pi\varphi$, где φ есть функция тока в этой точке листа.

Значение составляющей магнитной силы, нормальной к листу, является непрерывным, т. е. одинаковым на обеих сторонах листа. Составляющая магнитной силы, параллельная линиям тока, тоже непрерывна, но тангенциальная составляющая, перпендикулярная линиям тока на листе, разрывна. Если s — длина некоторой проведенной на листе кривой, то составляющая магнитной силы в направлении ds на отрицательной стороне листа равна — $(d\Omega_1/ds)$, а на положительной стороне $-\frac{d\Omega_2}{ds}=-\frac{d\Omega_1}{ds}-4\pi\frac{d\varphi}{ds}$.

Составляющая магнитной силы на положительной стороне превышает, таким образом, составляющую магнитной силы на отрицательной стороне на величину — $4\pi(d\varphi/ds)$, которая максимальна в данной точке, когда элемент ds перпендикулярен линиям тока.

О наведении электрических токов
листе с бесконечной проводимостью

654. Как было показано в п. 579, в любом контуре $E=\frac{dp}{dt}+Ri$, где E — приложенная электродвижущая сила, p — электрокинетический импульс (количество движения) контура, R — сопротивление контура, i — ток, текущий по нему. Если отсутствуют приложенная электродвижущая сила и сопротивление, то $dp/dt=0$, или величина p постоянна.

Далее, в п. 588 было показано, что электрокинетический импульс контура p измеряется поверхностным интегралом от магнитной индукции, пронизывающей контур. Следовательно, в случае токового листа без сопротивления поверхностный интеграл от магнитной индукции сквозь любую замкнутую кривую, проведенную на поверхности листа, должен быть постоянным; это означает, что в каждой точке токового листа нормальная составляющая магнитной индукции остается величиной постоянной.

655. Таким образом, если благодаря перемещению магнитов или изменению текущих поблизости токов магнитное поле каким-то образом меняется, то в токовом листе возникнут такие электрические токи, что их магнитное действие совместно с действием магнитов или токов в поле будет поддерживать неизменной нормальную составляющую магнитной индукции в каждой точке листа. Если же вначале не было никакого магнитного действия и не было токов в листе, то нормальная составляющая магнитной индукции всегда будет равна нулю во всех точках листа.

Поэтому такой лист можно считать непроницаемым для магнитной индукции: линии магнитной индукции будут отклоняться им точно так же, как отклонялись бы линии потока электрического тока в бесконечной и однородной проводящей среде при введении листа такой же формы, но изготовленного из вещества с бесконечным сопротивлением.

Если лист образует замкнутую или бесконечную поверхность, то любое магнитное действие, имеющее место по одну сторону листа, не произведет никаких магнитных эффектов по другую его сторону.

Теория плоского токового листа

656. Мы уже знаем, что внешнее магнитное действие токового листа эквивалентно действию магнитной оболочки, мощность которой в каждой ее точке численно равна величине функции тока φ. Когда лист плоский, мы можем выразить все величины, необходимые для определения электромагнитных эффектов, через одну-единственную функцию P, которая является потенциалом, создаваемым слоем некоторой воображаемой материи, распределенной на этой плоскости с поверхностной плотностью φ. Величина P, разумеется, равна

$$P=\iint \frac{\varphi}{r}\,dx'\,dy', \tag{1}$$

где r — расстояние от точки (x, y, z), в которой вычисляется P, до точки $(x', y', 0)$, лежащей на плоскости листа, в которой берется элемент интегрирования $dx'dy'$.

Для отыскания магнитного потенциала мы можем рассматривать магнитную оболочку, как бы состоящую из двух поверхностей, параллельных плоскости xy: первая плоскость (ее уравнение $z=c/2$) имеет поверхностную плотность φ/c, а вторая плоскость (ее уравнение $z=-c/2$) имеет поверхностную плотность $-\varphi/c$.

Потенциалы, обусловленные этими поверхностями, будут соответственно такими: $\frac{1}{c}P_{\left(z-\frac{c}{2}\right)}$, $-\frac{1}{c}P_{\left(z+\frac{c}{2}\right)}$, где индексы указывают на то, что в первом выражении вместо z берется $z-c/2$, а во втором $z+c/2$. Разлагая эти выражения по теореме Тейлора и складывая их, сделаем затем величину c бесконечно малой; тогда для магнитного потенциала, создаваемого листом в любой точке, расположенной вне его, получим

$$\Omega=-dP/dz. \tag{2}$$

657. Величина P симметрична относительно плоскости листа, поэтому при замене z на $-z$ она остается неизменной; магнитный потенциал Ω при замене z на $-z$ меняет знак.

На положительной поверхности листа

$$\Omega=-dP/dz=2\pi\varphi. \tag{3}$$

На отрицательной поверхности листа

$$\Omega=-dP/dz=-2\pi\varphi. \tag{4}$$

В пределах самого листа, если магнитные эффекты возникают из-за намагниченности его вещества, магнитный потенциал изменяется непрерывно от значения, равного $2\pi\varphi$ на положительной поверхности, до значения, равного $-2\pi\varphi$ на отрицательной поверхности.

Если лист содержит электрические токи, магнитная сила внутри него не удовлетворяет условиям существования потенциала; однако сама магнитная сила в нем является совершенно определенной.

Ее нормальная составляющая

$$\gamma = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^2P}{dz^2} \qquad (5)$$

одна и та же как на обеих сторонах листа, так и внутри его вещества.

Если α и β являются составляющими магнитной силы, параллельными x и y на положительной поверхности, а α', β' — аналогичные составляющие на отрицательной поверхности, то

$$\alpha = -2\pi\,(d\varphi/dx) = -\alpha', \qquad (6)$$

$$\beta = -2\pi\,(d\varphi/dy) = -\beta'. \qquad (7)$$

Внутри листа эти составляющие меняются непрерывно от значений α и β до значений α' и β'.

Уравнения

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = -\frac{d\Omega}{dz}, \qquad (8)$$

связывающие составляющие вектор-потенциала F, G, H, обусловленного токовым листом, со скалярным потенциалом Ω, удовлетворяются, если мы положим

$$F = \frac{dP}{dy}, \qquad G = -\frac{dP}{dx}, \qquad H = 0. \qquad (9)$$

Эти величины мы можем получить также непосредственным интегрированием; так, для F имеем

$$F = \iint \frac{u}{r}\,dx'\,dy' = \iint \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dy'}\,dx'\,dy',$$

$$= \int \frac{\varphi}{r}\,dx' - \iint \varphi \frac{d}{dy'}\frac{1}{r}\,dx'\,dy'.$$

Интеграл должен вычисляться для бесконечного плоского листа, а первый член на бесконечности исчезает, поэтому все это выражение сводится к его второму члену. Заменяя $\frac{d}{dy}\frac{1}{r}$ на $\frac{d}{dy'}\frac{1}{r}$ и помня, что φ зависит от x' и y', но не зависит от x, y, z, мы получаем

$$F = \frac{d}{dy}\iint \frac{\varphi}{r}\,dx'\,dy', \qquad = \frac{dP}{dy}, \text{ (согласно (1)).}$$

Если Ω' есть магнитный потенциал, создаваемый какой-либо магнитной или электрической системой, расположенной вне листа, мы можем записать

$$P' = -\int \Omega'\,dz \qquad (10)$$

и тогда для составляющих вектор-потенциала, обусловленного этой системой, будем иметь

$$F' = dP'/dy, \qquad G' = -dP'/dx, \qquad H' = 0. \qquad (11)$$

658. Определим теперь электродвижущую напряженность в произвольной точке листа, считая его неподвижным.

Пусть X и Y будут составляющими электродвижущей напряженности, параллельными соответственно x и y, тогда, согласно п. 598, имеем

$$X = -\frac{d}{dt}(F + F') - \frac{d\psi}{dx}, \tag{12}$$

$$Y = -\frac{d}{dt}(G + G') - \frac{d\psi}{dy}. \tag{13}$$

Если электрическое сопротивление листа однородно и равно σ, то

$$X = \sigma u, \qquad Y = \sigma v, \tag{14}$$

где u и v — составляющие тока, выражаемые через функцию тока φ:

$$u = d\varphi/dy, \qquad v = -d\varphi/dx. \tag{15}$$

Но по уравнению (3) на положительной поверхности токового листа $2\pi\varphi = -dP/dz$.

Следовательно, уравнения (12) и (13) могут быть записаны в форме

$$-\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^2P}{dy\,dz} = -\frac{d^2}{dy\,dt}(P + P') - \frac{d\psi}{dx}, \tag{16}$$

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^2P}{dx\,dz} = \frac{d^2}{dx\,dt}(P + P') - \frac{d\psi}{dy}, \tag{17}$$

где величины, стоящие во всех выражениях, соответствуют положительной поверхности листа.

Дифференцируя первое из этих уравнений по x и второе уравнение по y, а затем складывая результаты, получаем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0. \tag{18}$$

Единственным решением этого уравнения, конечным и непрерывным в любой точке плоскости и исчезающим на бесконечном расстоянии от нее, является

$$\psi = 0. \tag{19}$$

Следовательно, индуцирование электрических токов в бесконечном плоском листе с однородной проводимостью не сопровождается появлением разности электрических потенциалов между различными частями листа.

Подставляя это значение ψ и интегрируя уравнения (16) и (17), мы получаем

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{dP}{dz} - \frac{dP}{dt} - \frac{dP'}{dt} = f(z, t). \tag{20}$$

Поскольку величины токов в листе найдены дифференцированием по x или y, то произвольная функция от z и t при этом исчезает, и мы не будем принимать ее в расчет.

Далее вместо $\sigma/(2\pi)$ мы будем употреблять один символ R, который представляет собой некоторую скорость; тогда уравнение, связывающее P и P', станет таким:

$$R\frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt} + \frac{dP'}{dt}. \tag{21}$$

659. Предположим сначала, что нет внешних магнитных систем, действующих на токовый лист. Поэтому мы можем положить $P'=0$. Тогда приходим к случаю системы электрических токов в листе, предоставленных самим себе, но воздействующих друг на друга через взаимную индукцию и в то же самое время теряющих энергию из-за сопротивления листа. Результат выражается уравнением

$$R\frac{dP}{dz}=\frac{dP}{dt}, \tag{22}$$

решением которого является

$$P=F\{x,\ y,(z+Rt)\}. \tag{23}$$

Следовательно, значение P в произвольной точке на положительной стороне листа с координатами x, y, z в момент времени t равно значению P в точке x, y, $(z+Rt)$ в момент времени $t=0$.

Поэтому если в однородном плоском листе неограниченной протяженности возбуждена какая-то система токов и предоставлена затем самой себе, то производимый ею в любой точке на положительной стороне листа магнитный эффект будет таким же, как если бы эта система токов на листе поддерживалась неизменной, а сам лист двигался бы с постоянной скоростью R в направлении нормали, выходящей из отрицательной стороны. Уменьшение электромагнитных сил, возникающее из-за спадания тока в реальном случае, представляет собой точно то уменьшение сил, которое связано с увеличением расстояния в воображаемом случае.

660. Интегрируя уравнение (21) по t, получаем

$$P+P'=\int R\frac{dP}{dz}dt. \tag{24}$$

Если предположить, что сначала обе величины P и P' равнялись нулю и что магнит (или электромагнит) внезапно подвергся намагничиванию или был принесен из бесконечности, мгновенно изменив значение P' от нуля до P', то, поскольку интеграл по времени в правой части (24) исчезает, мы должны в первое мгновение на поверхности листа получить $P=-P'$.

Таким образом, система токов, возбуждаемых в листе при мгновенном введении системы, обусловливающей значение P', такова, что на поверхности листа она полностью нейтрализует магнитное действие этой системы.

Поэтому на поверхности листа и, следовательно, во всех точках на его отрицательной стороне начальная система токов производит действие равное, но противоположное действию магнитной системы на положительной стороне. Мы можем выразить это, сказав, что действие токов эквивалентно действию *изображения* магнитной системы, совпадающей по своему положению с исходной системой, но противоположной ей в отношении намагниченности и электрических токов. Такое изображение называется *отрицательным*.

Действие токов в листе в некоторой его точке на положительной стороне эквивалентно действию положительного изображения магнитной системы на отрицательной стороне листа, причем линии, соединяющие соответствующие точки, пересекаются с листом под прямыми углами.

Магнитное действие в некоторой точке по любую сторону от листа, обусловленное токами в этом листе, можно, следовательно, рассматривать как действие, создаваемое изображением магнитной системы, расположенным по ту сторону от листа, которая противоположна этой точке, причем изображение является положительным или отрицательным в соответствии с тем, находится точка на положительной или на отрицательной стороне листа.

661. Если лист обладает бесконечной проводимостью, то $R=0$, и правая часть уравнения (24) также равна нулю; таким образом, изображение в любой момент времени будет представлять действие текущих в листе токов.

В случае реального листа сопротивление R имеет некоторое конечное значение. Поэтому только что описанное изображение воспроизведет действие токов лишь в первый момент после мгновенного введения магнитной системы. Сразу же вслед за этим токи начнут убывать, и эффект от этого спадания будет в точности воспроизведен, если предположить, что два изображения движутся из своих первоначальных положений с постоянной скоростью R в направлении нормалей, проведенных от листа.

662. Теперь мы подготовлены к исследованию системы токов, индуцированных в листе любой системой (M) магнитов или электромагнитов, расположенных по положительную сторону от листа, когда их положения и мощности меняются произвольным образом.

Пусть P', как и прежде, будет той функцией, из которой, пользуясь уравнениями (3), (9) и т. д., следует выводить непосредственное действие этой системы, тогда $(dP'/dt)\,\delta t$ окажется функцией, соответствующей системе, представляемой величиной $(dM/dt)\,\delta t$. Можно считать, что эта величина, равная приращению M за время δt, сама представляет магнитную систему.

Предположим, что в момент времени t по отрицательную сторону листа сформировалось положительное изображение системы $(dM/dt)\,\delta t$, тогда магнитное действие в любой точке с положительной стороны листа, обусловленное этим изображением, будет эквивалентно действию токов в листе, возбужденных изменением M в первый момент непосредственно после этого изменения; если изображение, как только оно возникло, начнет двигаться в отрицательном направлении z с постоянной скоростью R, то оно будет продолжать служить эквивалентом токов, индуцированных в листе.

Считая, что в каждый последующий промежуток времени формируется изображение такого рода и что сразу же после своего появления оно начинает удаляться от листа со скоростью R, мы получим дорожку изображений, последнее из которых пребывает еще в стадии формирования, в то время как все остальные двигаются подобно твердому телу, удаляясь от листа со скоростью R.

663. Обозначив через P' функцию, обусловленную произвольным действием магнитной системы, мы можем найти соответствующую функцию P, обусловленную действием токов в листе, при помощи следующего процесса, являющегося просто математическим представлением теории дорожки изображений.

Пусть P_τ есть значение функции P (обусловленной токами в листе) в точке $(x, y, z+R\tau)$ в момент времени $t-\tau$, а P'_τ — значение P' (функции, обусловленной магнитной системой) в точке $(x, y, -(z+R\tau))$ в момент времени $t-\tau$. Тогда

$$\frac{dP_\tau}{d\tau}=R\frac{dP_\tau}{dz}-\frac{dP_\tau}{dt}, \tag{25}$$

и уравнение (21) принимает вид

$$\frac{dP_\tau}{d\tau}=\frac{dP'_\tau}{dt}. \qquad (26)$$

Интегрируя по τ от $\tau=0$ до $\tau=\infty$, для значения функции P получаем

$$P=-\int_0^\infty \frac{dP'_\tau}{dt}\,d\tau, \qquad (27)$$

откуда, дифференцируя, как это делалось в уравнениях (3), (9) и т. д., находим все свойства токового листа.

664. В качестве примера рассмотренного здесь процесса возьмем случай одиночного магнитного полюса единичной мощности, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью.

Пусть в момент времени t координаты полюса равны

$$\xi=\mathfrak{u}(t-\tau), \qquad \eta=0, \qquad \zeta=c+\mathfrak{w}t.$$

Координаты изображения полюса, сформировавшегося в момент времени $t-\tau$, будут

$$\xi=\mathfrak{u}(t-\tau), \quad \eta=0, \quad \zeta=-(c+\mathfrak{w}(t-\tau)+R\tau),$$

и если r — расстояние от точки (x, y, z) до этого отображения, то

$$r^2=(x-\mathfrak{u}(t-\tau))^2+y^2+(z+c+\mathfrak{w}(t-\tau)+R\tau)^2.$$

Чтобы получить потенциал, обусловленный дорожкой изображений, мы должны подсчитать $-\frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{d\tau}{r}$.

Если записать $Q^2=\mathfrak{u}^2+(R-\mathfrak{w})^2$, то

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{r}=-\frac{1}{Q}\log\{Qr+\mathfrak{u}(x-\mathfrak{u}t)+(R-\mathfrak{w})(z+c+\mathfrak{w}t)\}$$

плюс бесконечно большой член, который, однако, пропадает при дифференцировании по времени; величина r в этом выражении находится из приведенного выше выражения для r при $\tau=0$.

Дифференцируя это выражение по t и полагая $t=0$, получаем магнитный потенциал, обусловленный дорожкой изображений,

$$\Omega=\frac{1}{Q}\,\frac{Q\,\frac{\mathfrak{w}(z+c)-\mathfrak{u}x}{r}-\mathfrak{u}^2-\mathfrak{w}^2+R\mathfrak{w}}{Qr+\mathfrak{u}x+(R-\mathfrak{w})(z+c)}.$$

Дифференцируя это выражение по x или z, мы находим составляющие (соответственно параллельные x или z) магнитной силы в любой точке, а положив в этих выражениях $x=0$, $z=c$ и $r=2\,c$, мы получим следующие значения состав-

ляющих силы, действующей на сам движущийся полюс:

$$X = -\frac{1}{4c^2}\frac{\mathfrak{u}}{Q+R-\mathfrak{w}}\left\{1+\frac{\mathfrak{w}}{Q}-\frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q+R-\mathfrak{w})}\right\}, \qquad Z = -\frac{1}{4c^2}\left\{\frac{\mathfrak{w}}{Q}-\frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q+R-\mathfrak{w})}\right\}.$$

665. Пользуясь этими выражениями, мы должны помнить, что движение, предшествующее рассматриваемому моменту времени, предполагается по своей продолжительности бесконечно долгим. Поэтому не следует брать величину $\mathfrak{w}$ положительной, ибо в этом случае полюс за конечное время должен был бы пройти сквозь лист.

Если взять скорость $\mathfrak{w}$ отрицательной и положить $\mathfrak{u}=0$, то получим

$$X=0 \quad \text{и} \quad Z=\frac{1}{4c^2}\frac{\mathfrak{w}}{R+\mathfrak{w}},$$

т. е. полюс, приближаясь к листу, отталкивается от него.

Положив $\mathfrak{w}=0$, находим

$$Q^2=\mathfrak{u}^2+R^2, \quad X=-\frac{1}{4c^2}\cdot\frac{\mathfrak{u}R}{Q(Q+R)}, \quad Z=\frac{1}{4c^2}\cdot\frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q+R)}.$$

Составляющая X представляет собой силу торможения, действующую на полюс в направлении, противоположном направлению его движения. При заданном значении R сила X максимальна, когда $\mathfrak{u}=1{,}27\,R$.

Для непроводящего листа $R=\infty$ и $X=0$. Для идеально проводящего листа $R=0$ и $X=0$.

Составляющая Z представляет собой силу отталкивания полюса от листа. С ростом скорости она увеличивается и в пределе достигает значения $1/(4\,c^2)$, когда скорость становится бесконечной. Это же значение она принимает при $R=0$.

666. Когда магнитный полюс движется вдоль кривой, параллельной листу, вычисления становятся более сложными, но легко видеть, что ближайший участок дорожки изображений создает силу, действующую на полюс в направлении, противоположном направлению его движения. Действие участка дорожки, находящегося непосредственно позади ближайшего участка, аналогично действию магнита с осью, параллельной направлению движения полюса в предшествующий момент времени.

Поскольку ближайший полюс этого магнита одноименен с движущимся полюсом, то сила будет состоять частично из силы отталкивания, а частично из силы, параллельной прежнему направлению движения, но противоположной ему по знаку. Она может быть разложена на тормозящую силу и на силу в направлении вогнутой стороны того пути, по которому движется полюс.

667. Наше рассмотрение не предоставляет нам возможности решать задачу в случае, когда распределение токов не может быть полностью сформировано из-за наличия у проводящего листа разрывов или границ.

Легко видеть, однако, что если полюс двигается параллельно краю листа, то токи на прилегающей к этому краю части листа ослаблены. Следовательно, силы, обусловленные этими токами, будут меньше, и поэтому не только тормозящая сила будет меньше, но, поскольку сила отталкивания минимальна на участках листа, непосредственно прилегающих к его краю, полюс будет притягиваться к краю.

Теория вращающегося диска Араго

668. Араго открыл [2], что на магнит, помещенный вблизи вращающегося металлического диска, действует сила, стремящаяся заставить его следовать за движением диска, хотя в случае, когда диск покоится, взаимодействие между ним и магнитом отсутствует. Это действие вращающегося диска сначала относили даже к некоему новому виду намагниченности, пока Фарадей [3] не объяснил его при помощи электрических токов, индуцируемых в диске при его движении в поле магнитной силы.

Для того чтобы определить эти индуцированные токи, а также их воздействие на магнит, мы могли бы воспользоваться результатами, уже полученными нами для покоящегося проводящего листа, находящегося под действием движущегося магнита, и применить приведенный в п. 600 метод рассмотрения электромагнитных уравнений в движущейся системе осей координат. Однако, поскольку этот случай особо важен, мы прибегнем к прямому решению задачи, начав с предположения о том, что полюса магнита достаточно удалены от края диска и можно пренебречь влиянием ограниченности проводящего листа.

Используя те же обозначения, что и в предыдущих параграфах (п. 656—667), для составляющих электрической силы, параллельных соответственно осям x и y, находим

$$\sigma u=\gamma\frac{dy}{dt}-\frac{d\psi}{dx},\qquad \sigma v=-\gamma\frac{dx}{dt}-\frac{d\psi}{dy},\tag{1}$$

где γ есть составляющая магнитной силы, нормальная к диску.

Если выразить теперь u и v через функцию тока φ, то

$$u=d\varphi/dy,\qquad v=-d\varphi/dx,\tag{2}$$

и, если диск вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z,

$$dy/dt=\omega x,\qquad dx/dt=-\omega y.\tag{3}$$

Подставляя эти величины в уравнения (1), находим

$$\sigma\frac{d\varphi}{dy}=\gamma\omega x-\frac{d\psi}{dx},\tag{4}$$

$$-\sigma\frac{d\varphi}{dx}=\gamma\omega y-\frac{d\psi}{dy}.\tag{5}$$

Умножая (4) на x, а (5) на y, а затем складывая результаты, получаем

$$\sigma\left(x\frac{d\varphi}{dy}-y\frac{d\varphi}{dx}\right)=\gamma\omega(x^2+y^2)-\left(x\frac{d\psi}{dx}+y\frac{d\psi}{dy}\right).$$

Умножая (4) на y, а (5) на $-x$ и затем складывая результаты, получаем

$$\sigma\left(x\frac{d\varphi}{dx}+y\frac{d\varphi}{dy}\right)=x\frac{d\psi}{dy}-y\frac{d\psi}{dx}.\tag{7}$$

Если выразить теперь эти уравнения через r и ϑ, где

$$x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta,\tag{8}$$

[2] *Annales de Chimie et de Physique*, Tome 32, p. 213—223, 1826.
[3] *Exp. Res.*, 81.

то они примут вид

$$\sigma \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \gamma\omega r^2 - r\frac{d\psi}{dr}, \quad (9)$$

$$\sigma r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\psi}{d\vartheta}. \quad (10)$$

Уравнение (10) удовлетворяется, если мы возьмем произвольную функцию χ от r и ϑ, положив

$$\varphi = d\chi/d\vartheta, \quad (11)$$

$$\psi = \sigma r (d\chi/dr). \quad (12)$$

После подстановки этих выражений в уравнение (9) оно принимает вид

$$\sigma\left(\frac{d^2\chi}{d\vartheta^2} + r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\chi}{dr}\right)\right) = \gamma\omega r^2. \quad (13)$$

Разделив (13) на σr^2 и восстанавливая координаты x и y, приходим к уравнению

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = \frac{\omega}{\sigma}\gamma. \quad (14)$$

Это основополагающее уравнение теории: оно выражает связь между функцией χ и нормальной к диску составляющей магнитной силы γ.

Пусть Q — потенциал в какой-либо точке с положительной стороны диска, обусловленный воображаемой притягивающей материей, распределенной по диску с поверхностной плотностью χ.

На положительной стороне диска

$$dQ/dz = -2\pi\chi. \quad (15)$$

Поэтому левая часть уравнения (14) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2}\right). \quad (16)$$

Но поскольку Q удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, внешних относительно диска, то

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} = -\frac{d^2Q}{dz^2} \quad (17)$$

и уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^3Q}{dz^3} = \omega\gamma. \quad (18)$$

Далее, поскольку Q есть потенциал, обусловленный распределением χ, то потенциал, создаваемый распределением φ или $d\chi/d\vartheta$, будет равен $dQ/d\vartheta$. Отсюда для магнитного потенциала, обусловленного токами в диске, получаем

$$\Omega_1 = -\frac{d^2Q}{d\vartheta\, dz}, \quad (19)$$

а для нормальной к диску составляющей магнитной силы, создаваемой токами,

$$\gamma_1 = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^3Q}{d\vartheta\, dz^2}. \tag{20}$$

Если обозначить через Ω_2 магнитный потенциал, обусловленный внешними магнитами, и записать

$$P' = -\int \Omega_2 dz, \tag{21}$$

то создаваемая этими магнитами нормальная к диску составляющая магнитной силы будет равна

$$\gamma_2 = \frac{d^2P'}{dz^2}. \tag{22}$$

Помня, что $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, мы можем теперь переписать уравнение (18) в виде

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^3Q}{dz^3} - \omega\frac{d^3Q}{d\vartheta\, dz^2} = \omega\frac{d^2P'}{dz^2}. \tag{23}$$

Дважды интегрируя по z и вводя вместо $\sigma/(2\pi)$ величину R, получаем

$$\left(R\frac{d}{dz} - \omega\frac{d}{d\vartheta}\right)Q = \omega P'. \tag{24}$$

Если выразить величины P и Q через расстояние от оси диска r и через две новые переменные ξ и ζ, такие, что

$$2\xi = z + \frac{R}{\omega}\vartheta, \quad 2\zeta = z - \frac{R}{\omega}\vartheta, \tag{25}$$

то уравнение (24) после интегрирования по ζ примет вид

$$Q = \int \frac{\omega}{R} P'\, d\zeta. \tag{26}$$

669. Вид этого выражения показывает, что магнитное действие токов в диске эквивалентно магнитному действию дорожки изображений магнитной системы, имеющей форму спирали.

Если магнитная система состоит из одиночного магнитного полюса единичной мощности, то спираль будет навита на поверхность цилиндра, проходящую через этот полюс и имеющую общую ось с диском. Начало спирали совпадает с положением оптического изображения полюса в диске. Расстояние между последовательными витками, параллельное оси, будет равно $2\pi(R/\omega)$. Магнитное действие дорожки изображений оказывается таким же, как если бы спираль была всюду намагничена в тангенциальном направлении к цилиндру перпендикулярно его оси с интенсивностью, при которой магнитный момент любого маленького участка спирали численно равен длине его проекции на диск.

Вычислить воздействие на магнитный полюс довольно сложно, однако легко видеть, что оно состоит из: (1) увлекающей силы, параллельной направлению движения диска; (2) силы отталкивания от диска; (3) силы, направленной в сторону оси диска.

Когда полюс находится вблизи края диска, третья из этих сил может быть подавлена силой, направленной в сторону края диска, на что указывалось в п. 667.

Араго наблюдал все эти силы и описал их в *Annales de Chimie* за 1826 г. См. также работу Феличи (Felici) в журнале Тортолини (Tortolini's *Annals*, IV, p. 173 (1853) и V, p. 35), а также работу Джокмана (Jochmann) в *Crelle's Journal*, XIII, p. 158 и 329 и *Pogg. Ann.*, XXII, p. 214 (1864). В последней работе приведены уравнения, необходимые для отыскания самоиндукции токов, но эта часть воздействия при получении последующих результатов опущена. Описанный здесь метод изображений был опубликован в *Proceedings of the Royal Society* for Feb. 15, 1872.

Сферический токовый лист

670. Пусть φ есть функция тока в какой-либо точке Q сферического токового листа, а P — потенциал, создаваемый в данной точке слоем воображаемой материи, распределенной по сфере с поверхностной плотностью φ. Требуется отыскать магнитный потенциал и вектор-потенциал токового слоя, выраженные через P.

Пусть a — радиус сферы, r — расстояние от центра до данной точки, а p — обратное расстояние между данной точкой и точкой на сфере Q, в которой функция тока равна φ [рис. 39].

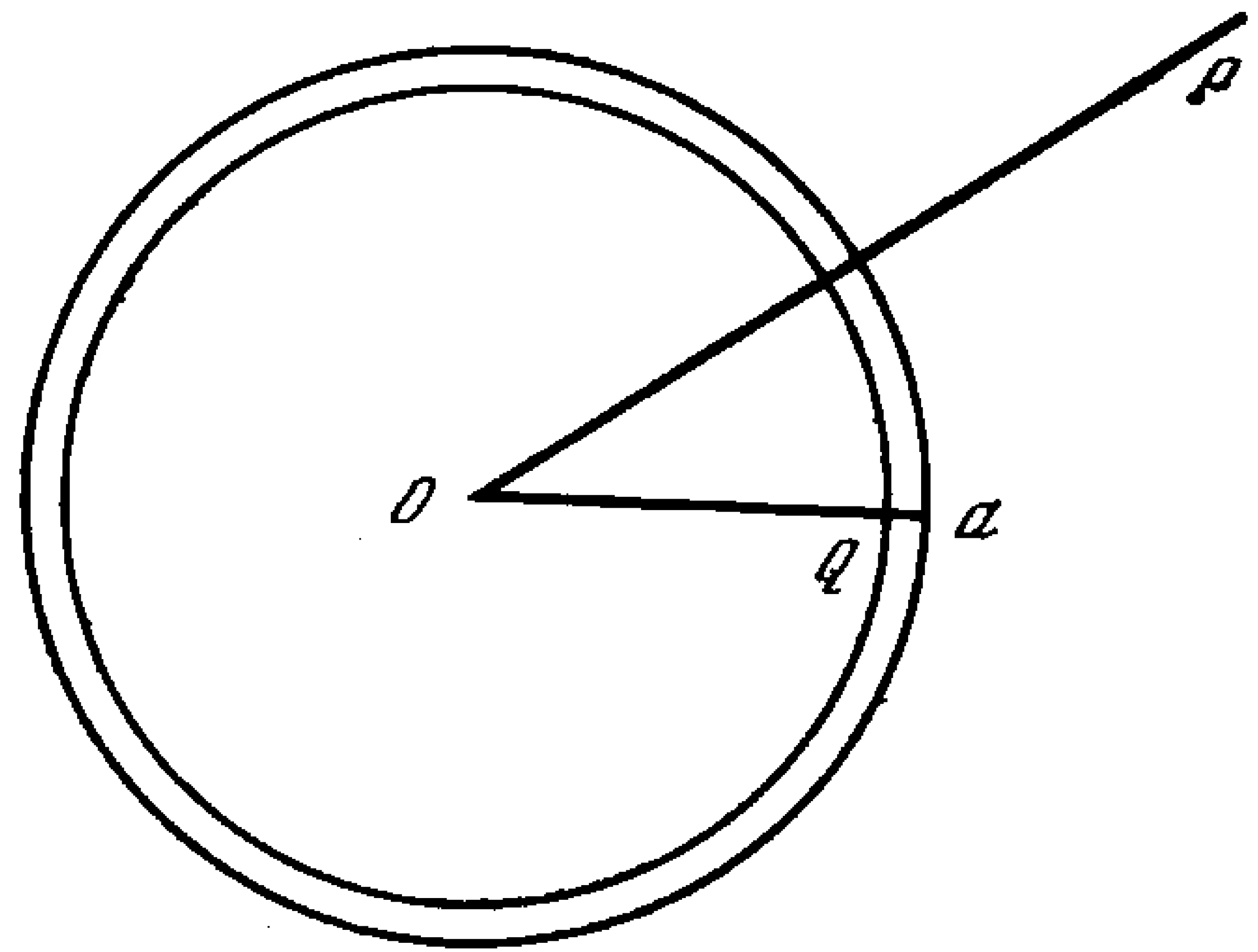


Рис. 39

Действие токового листа в какой-либо точке вне его вещества совпадает с действием магнитной оболочки, мощность которой в любой точке численно равна функции тока.

Взаимный потенциал магнитной оболочки и единичного полюса, помещенного в точку P, согласно п. 410, равнь

$$\Omega = \iint \varphi \frac{dp}{da} dS.$$

Так как p является однородной функцией степени —1 по r и по a, то

$$a\frac{dp}{da} + r\frac{dp}{dr} = -p, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{da} = -\frac{1}{a}\frac{d}{dr}(pr),$$

и

$$\Omega = -\iint \frac{\varphi}{a}\frac{d}{dr}(pr)\, dS.$$

Поскольку на поверхности интегрирования величины r и a постоянны, то

$$\Omega = -\frac{1}{a}\frac{d}{dr}\left(r \iint \varphi p\, dS \right).$$

Но поскольку P есть потенциал, обусловленный слоем воображаемой материи с поверхностной плотностью φ, то $P = \iint \varphi p dS$, поэтому магнитный потенциал токового листа Ω может быть выражен через P в виде

$$\Omega = -\frac{1}{a}\frac{d}{dr}(Pr).$$

671. Из приведенного в п. 416 выражения мы можем определить величину x-составляющей вектор-потенциала F:

$$F=\iint \varphi\left(m\frac{dp}{d\zeta}-n\frac{dp}{d\eta}\right)dS,$$

где ξ, η, ζ — координаты элемента dS, а l, m, n — направляющие косинусы нормали.

Так как токовый лист имеет форму сферы, направляющие косинусы нормали равны $l=\xi/a$, $m=\eta/a$, $n=\zeta/a$.

Но $\frac{dp}{d\zeta}=(z-\zeta)\,p^3=-\frac{dp}{dz}$ и $\frac{dp}{d\eta}=(y-\eta)\,p^3=-\frac{dp}{dy}$,

так что

$$m\frac{dp}{d\zeta}-n\frac{dp}{d\eta}=\{\eta\,(z-\zeta)-\zeta\,(y-\eta)\}\,\frac{p^3}{a},$$
$$=\{z\,(\eta-y)-y\,(\zeta-z)\}\,\frac{p^3}{a}=\frac{z}{a}\frac{dp}{dy}-\frac{y}{a}\frac{dp}{dz}.$$

Умножая последнее выражение на $\varphi\, dS$ и интегируя по поверхности сферы, находим

$$F=\frac{z}{a}\frac{dP}{dy}-\frac{y}{a}\frac{dP}{dz}.$$

Аналогично

$$G=\frac{x}{a}\frac{dP}{dz}-\frac{z}{a}\frac{dP}{dx},\qquad H=\frac{y}{a}\frac{dP}{dx}-\frac{x}{a}\frac{dP}{dy}.$$

Вектор $\mathfrak{A}$, составляющими которого являются F, G, H, очевидно, перпендикулярен к радиус-вектору r и вектору, компоненты которого равны dP/dx, dP/dy, dP/dz. Если мы найдем линии пересечения сферической поверхности радиуса r с семейством эквипотенциальных поверхностей, соответствующих значениям P, меняющимся по арифметической прогрессии, то направление этих линий определит направление вектора $\mathfrak{A}$, а их плотность — величину этого вектора.

На языке кватернионов

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{a}V.\rho\nabla P.$$

672. Если предположить, что внутри сферы величина P равна

$$P=A\left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i,$$

где Y_i есть сферическая гармоника порядка i, то вне сферы

$$P'=A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i.$$

Функция тока φ, поскольку $\left(\frac{dP}{dr}-\frac{dP'}{dr}\right)_{r=a}=4\pi\varphi$, определяется равенством

$$\varphi=\frac{2i+1}{4\pi}\cdot\frac{1}{a}AY_i.$$

Магнитный потенциал внутри сферы равен

$$\Omega=-(i+1)\frac{1}{a}A\left(\frac{r}{a}\right)^{i}Y_{i},$$

а вне сферы

$$\Omega'=i\frac{1}{a}A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1}Y_{i}.$$

Пусть, например, при помощи провода, свернутого в форме сферической оболочки, необходимо создать внутри этой оболочки однородную магнитную силу M. В этом случае магнитный потенциал оболочки представляется объемной гармоникой первого порядка и имеет вид $\Omega=-M\,r\cos\vartheta$, где M есть магнитная сила. Отсюда

$$A=\frac{1}{2}a^{2}M \text{ и } \varphi=\frac{3}{8\pi}Ma\cos\vartheta.$$

Функция тока, таким образом, пропорциональна расстоянию от экваториальной плоскости сферы, и поэтому число витков провода между любыми двумя малыми кругами должно быть пропорционально расстоянию между плоскостями этих кругов.

Если N есть полное число витков, а γ — сила тока в каждом из них, то $\varphi=\frac{1}{2}N\gamma\cos\vartheta$.

Отсюда магнитная сила внутри катушки равна $M=\frac{4\pi}{3}\frac{N\gamma}{a}$.

673. Теперь определим способ намотки провода, приводящий к созданию внутри сферы магнитного потенциала в виде объемной зональной гармоники второго порядка:

$$\Omega=-3\frac{1}{a}A\frac{r^{2}}{a^{2}}\left(\frac{3}{2}\cos^{2}\vartheta-\frac{1}{2}\right).$$

Здесь

$$\varphi=\frac{5}{4\pi}\frac{A}{a}\left(\frac{3}{2}\cos^{2}\vartheta-\frac{1}{2}\right).$$

Если полное число витков равно N, то число витков, укладывающихся между полюсом и полярным углом ϑ, будет $\frac{1}{2}N\sin^{2}\vartheta$.

Плотнее всего витки расположены на широте 45°. На экваторе направление намотки меняется, и в другой полусфере витки имеют противоположное направление.

Пусть γ есть сила тока в проводе, тогда внутри оболочки

$$\Omega=-\frac{4\pi}{5}N\gamma\frac{r^{2}}{a^{2}}\left(\frac{3}{2}\cos^{2}\vartheta-\frac{1}{2}\right).$$

Рассмотрим теперь проводник в форме плоской замкнутой кривой, расположенный в произвольном месте внутри оболочки в плоскости, перпендикулярной ее оси. Для определения коэффициента индукции проводника мы должны найти поверхностный интеграл от $-d\Omega/dz$ по плоской площадке, ограниченной этой кривой, положив $\gamma=1$.

В этом случае

$$\Omega = -\frac{4\pi}{5a^2} N \left\{ z^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right\} \text{ и } -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} N \cdot z.$$

Следовательно, если S есть площадь, ограниченная замкнутой кривой, то ее коэффициент индукции равен $M = \frac{8\pi}{5a^2} NSz$.

Если ток в этом проводнике равен γ', то, согласно п. 583, должна существовать сила Z, действующая на проводник в направлении z, равная

$$Z = \gamma\gamma' \frac{dM}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} NS\gamma\gamma',$$

и, поскольку это выражение не зависит от x, y, z, сила оказывается одной и той же, в какую бы часть оболочки ни был помещен данный контур.

674. Метод, предложенный Пуассоном и описанный в п. 437, может быть применен к токовым листам, если вместо тела, которое предполагается однородно намагниченным в z-направлении с интенсивностью I, взять токовый лист, имеющий форму поверхности тела и обладающий функцией тока, равной

$$\varphi = Iz. \tag{1}$$

Токи, текущие по листу, расположены в плоскости, параллельной плоскости xy; сила тока, циркулирующего по срезу толщиной dz, равна Idz.

В любой точке вне токового листа магнитный потенциал, обусловленный им, равен

$$\Omega = -I\,(dV/dz), \tag{2}$$

где V — потенциал, создаваемый листом с единичной поверхностной плотностью.

В произвольной точке внутри оболочки потенциал равен

$$\Omega = -4\pi Iz - I\,(dV/dz). \tag{3}$$

Составляющие вектор-потенциала равны

$$F = I\,(dV/dy), \qquad G = -I\,(dV/dx), \qquad H = 0. \tag{4}$$

Эти результаты могут быть применены к различным случаям, возникающим на практике.

675. (1). Плоский электрический контур произвольной формы.

Пусть V есть потенциал, создаваемый плоским листом произвольной формы, имеющим единичную поверхностную плотность; тогда, если этот лист заменить либо на магнитную оболочку мощности I, либо на электрический ток силы I, текущий по ее границе, величины Ω и F, G, H будут иметь значения, приведенные выше.

(2). Для сплошного шара радиуса a

$$V = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r}, \qquad \text{когда } r \text{ больше } a, \tag{5}$$

и

$$V = \frac{2\pi}{3}(3a^2 - r^2), \quad \text{когда } r \text{ меньше } a, \tag{6}$$

Следовательно, если такой шар намагничен параллельно направлению z с интенсивностью I, то магнитный потенциал равен

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} I \frac{a^3}{r^3} z \quad \text{вне шара} \tag{7}$$

и

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} Iz \quad \text{внутри шара.} \tag{8}$$

Если вместо намагничивания обмотать шар эквидистантно расположенными круговыми витками с током так, чтобы суммарная сила тока между двумя малыми окружностями, плоскости которых находятся на единичном расстоянии друг от друга, была I, то вне шара значения Ω остается прежним, а внутри станет равным

$$\Omega = -\frac{8\pi}{3} Iz. \tag{9}$$

Этот случай уже обсуждался в п. 672.

(3). Случай эллипсоида, однородно намагниченного параллельно некоторой заданной линии, тоже уже обсуждался в п. 437.

Если эллипсоид обмотан проводом по параллельным и эквидистантным плоскостям, то магнитная сила внутри него будет однородной.

(4). *Цилиндрический магнит или соленоид*

676. Если тело представляет собой цилиндр с сечением произвольной формы, ограниченный плоскостями, перпендикулярными его образующим, и если V_1 является потенциалом, создаваемым в точке (x, y, z) плоской площадкой, совпадающей с положительным торцом соленоида и несущей единичную поверхностную плотность, а V_2 — потенциалом, создаваемым в той же самой точке плоской площадкой, совпадающей с отрицательным торцом соленоида и тоже несущей единичную поверхностную плотность, то потенциал цилиндра, однородно и продольно намагниченного с единичной интенсивностью, создаваемый в точке (x, y, z), будет равен

$$\Omega = V_1 - V_2. \tag{10}$$

Если вместо намагниченного цилиндра взять цилиндр, равномерно обмотанный проводом с n витками на единицу его длины и пустить по проводу ток γ, то магнитный потенциал вне соленоида будет, как и прежде, равен

$$\Omega = n\gamma (V_1 - V_2), \tag{11}$$

а внутри области, ограниченной соленоидом и его плоскими торцами,

$$\Omega = n\gamma (-4\pi z + V_1 - V_2). \tag{12}$$

Магнитный потенциал терпит разрыв на плоских торцах соленоида в то время, когда магнитная сила непрерывна.

Если расстояния r_1 и r_2 от центров инерции соответственно положительного и отрицательного плоских торцов соленоида до точки (x, y, z) очень велики по

сравнению с поперечными размерами соленоида, то можно написать

$$V_1 = A/r_1, \qquad V_2 = A/r_2, \tag{13}$$

где A — площадь любого из этих сечений.

Следовательно, магнитная сила вне соленоида очень мала, а сила внутри соленоида приближается к силе, направленной параллельно оси в положительном направлении и равной $4\pi n\gamma$.

Если сечение соленоида представляет собой круг радиуса a, то значения V_1 и V_2 могут быть выражены через ряды по сферическим гармоникам, приведенным в книге Томсона и Тэта «*Натуральная философия*»[5]:

$$V = 2\pi \left\{ -rP_1 + a + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a}P_2 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{r^4}{a^3}P_4 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{r^6}{a^5}P_6 - \ldots \right\} \text{ при } r < a, \tag{14}$$

$$V = 2\pi \left\{ \frac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{a^4}{r^3}P_2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{a^6}{r^5}P_4 - \ldots \right\} \text{ при } r > a. \tag{15}$$

В этих выражениях величина r есть расстояние до точки (x, y, z) от центра одного из круговых торцов соленоида; зональные гармоники P_1, P_2, ... являются гармониками, соответствующими углу ϑ, который составляет с осью цилиндра радиус-вектор r.

Производная по z от первого из этих выражений терпит скачок при $\vartheta = \pi/2$; однако мы должны помнить, что внутри соленоида к магнитной силе, выведенной из этого выражения, следует добавить продольную силу $4\pi n\gamma$.

677. Теперь рассмотрим соленоид настолько длинный, что в изучаемой нами области пространства можно пренебречь членами, зависящими от расстояния до концов соленоида.

Поток магнитной индукции сквозь любую замкнутую кривую, проведенную в пределах соленоида, равен $4\pi n\gamma A'$, где A' площадь, ограничиваемая проекцией этой кривой на плоскость, нормальную к оси соленоида.

Если замкнутая кривая расположена вне соленоида, но окружает его, то поток магнитной индукции сквозь кривую равен $4\pi n\gamma A$, где A — площадь сечения соленоида. Если же замкнутая кривая не окружает соленоид, то поток магнитной индукции сквозь нее равен нулю.

Коэффициент индукции между соленоидом и проводом, n' раз обмотанным вокруг соленоида, равен

$$M = 4\pi nn'A. \tag{16}$$

Предполагая, что эти витки совпадают с n витками соленоида, мы найдем, что коэффициент самоиндукции на единичный элемент длины соленоида, взятый на достаточном удалении от его краев, равен

$$L = 4\pi n^2 A. \tag{17}$$

Вблизи концов соленоида необходимо принять во внимание члены, зависящие от воображаемого распределения магнетизма на плоских торцах соленоида. Эффект, обусловленный этими членами, состоит в том, что коэффициент индукции между соленоидом и окружающим его контуром становится меньше величины

[5] Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, Art. 546, Ex. II.

$4\pi nA$; последняя относится к контуру, окружающему очень длинный соленоид и расположенному на большом расстоянии от обоих его концов.

Возьмем случай двух круговых коаксиальных соленоидов одинаковой длины l. Пусть радиус внешнего соленоида равен c_1, и пусть провод намотан так, что на единицу длины соленоида приходится n_1 витков. Пусть радиус внутреннего соленоида равен c_2, а число витков на единицу длины равно n_2. Тогда коэффициент индукции между этими соленоидами, если пренебречь влиянием концов, будет равен

$$M=Gg, \tag{18}$$

где

$$G=4\pi n_1 \tag{19}$$

и

$$g=\pi c_2^2 l n_2. \tag{20}$$

678. Для того чтобы определить влияние положительного конца соленоида, мы должны вычислить коэффициент индукции внешнего соленоида, обусловленный действием круглого диска, являющегося торцом внутреннего соленоида. Для этой цели возьмем второе выражение для V, заданное соотношением (15), и продифференцируем его по r. Это даст магнитную силу в радиальном направлении. Затем, умножив это выражение на $2\pi r^2 d\mu$, проинтегрируем его по μ от $\mu=1$ до $\mu=z/\sqrt{z^2+c_1^2}$. Это дает коэффициент индукции по отношению к единичному витку внешнего соленоида, расположенному на расстоянии z от положительного конца. Далее, умножив это выражение на dz, проинтегрируем его от $z=l$ до $z=0$. И, наконец, умножив полученный результат на $n_1 n_2$, найдем вклад одного из концов в общий эффект уменьшения коэффициента индукции.

Таким образом, мы находим коэффициент взаимной индукции M между двумя цилиндрами:

$$M=4\pi^2 n_1 n_2 c_2^2(l-2c_1\alpha), \tag{21}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{c_1+l-r}{c_1}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{2\cdot 3}\frac{c_2^2}{c_1^2}\left(1-\frac{c_1^3}{r^3}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\frac{c_2^4}{c_1^4}\left(-\frac{1}{2}-2\frac{c_1^5}{r^5}+\frac{5}{2}\frac{c_1^7}{r^7}\right)+\ldots, \tag{22}$$

где для краткости величина $\sqrt{l^2+c_1^2}$ обозначена через r.

Как ясно отсюда, при вычислении взаимной индукции двух коаксиальных соленоидов мы должны использовать в выражении (20) вместо истинной длины l некоторую подправленную длину $l-2c_1\alpha$, при которой соленоиды на каждом из концов предполагаются укороченными на величину αc_1. Если длина соленоида значительно превышает его внешний радиус, то

$$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\frac{c_2^2}{c_1^2}-\frac{1}{128}\frac{c_2^4}{c_1^4}+\ldots . \tag{23}$$

679. Если соленоид состоит из многих слоев, образованных проводом такого диаметра, что в единичном интервале длины укладывается n слоев, то число слоев внутри dr равно $n\,dr$, и мы имеем

$$G=4\pi\int n^2 dr \quad \text{и} \quad g=\pi l\int n^2 r^2 dr. \tag{24}$$

Если толщина провода постоянна, а индукция имеет место между внешней катушкой, наружный и внутренний радиусы которой равны x и y, и внутренней катушкой с наружным и внутренним радиусами y и z, то в пренебрежении влиянием концов

$$Gg=\frac{4}{3}\pi^2 l n_1^2 n_2^2 (x-y)(y^3-z^3). \tag{25}$$

Чтобы эта величина была максимальной при заданных x и z и переменном y, необходимо

$$x=\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}\frac{z^3}{y^2}. \tag{26}$$

Данное уравнение устанавливает наиболее выгодное соотношение между толщинами первичной и вторичной обмоток в индукционных машинах, не содержащих железных сердечников.

При наличии железного сердечника радиуса z величина G остается прежней, но

$$g=\pi l\int n^2(r^2+4\pi\varkappa z^2)\,dr, \tag{27}$$

$$=\pi l n^2\left(\frac{y^3-z^3}{3}+4\pi\varkappa z^2(y-z)\right). \tag{28}$$

Если значение y задано, то величина z, соответствующая максимуму g, равна

$$z=\frac{2}{3}y\,\frac{12\pi\varkappa}{12\pi\varkappa+1}. \tag{29}$$

Когда число $\varkappa$ велико, как в случае железа, то приближенно $z=2\,y/3$.

Если теперь зафиксировать значение x, а y и z сделать переменными, мы получим, что при больших $\varkappa$ максимум Gg достигается, если

$$x:y:z::4:3:2. \tag{30}$$

Коэффициент самоиндукции на единицу длины длинного соленоида, внешние и внутренние радиусы которого равны x и y и который содержит длинный железный сердечник радиуса z, равен

$$4\pi\int_y^x\left\{\pi\int_\rho^x n^2(\rho^2+4\pi\varkappa z^2)\,dr+\pi\int_y^\rho n^2(r^2+4\pi\varkappa z^2)\,dr\right\}n^2\,d\rho,$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2 n^4(x-y)^2(x^2+2xy+3y^2+24\pi\varkappa z^2). \tag{31}$$

680. До сих пор мы считали провод однородным по толщине. Теперь же мы установим закон, по которому должна изменяться толщина провода в различных слоях, чтобы при заданном сопротивлении первичной и вторичной обмотки величина коэффициента взаимной индукции могла достигать максимума.

Пусть сопротивление на единицу длины провода, n витков которого укладываются в единице длины соленоида, равно ρn^2.

Сопротивление всего соленоида равно

$$R=2\pi\rho l\int n^4 r\,dr. \tag{32}$$

При заданном R величина G имеет максимум при условии

$$\frac{dG}{dr}=C\frac{dR}{dr},$$

где C — некоторая постоянная.

Отсюда следует, что величина n^2 пропорциональна $1/r$, или что толщина провода наружной катушки должна быть пропорциональна корню квадратному из радиуса слоя.

Для того чтобы при заданном значении R величина g была максимальна, нужно

$$n^2=C\left(r+\frac{4\pi\varkappa z^2}{r}\right). \tag{33}$$

Следовательно, при отсутствии железного сердечника толщина провода внутренней катушки должна быть обратно пропорциональна корню квадратному из радиуса слоя, а при наличии железного сердечника, обладающего высокой восприимчивостью к намагничиванию, закон изменения толщины провода был бы более близок к прямой пропорциональности корню квадратному из радиуса слоя.

Бесконечный соленоид

681. Если объемное тело образовано вращением плоской площадки A вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, то оно будет иметь форму кольца. Пусть такое кольцо обмотано проводом, витки которого располагаются в плоскости, проходящей через ось кольца; тогда функция тока проволочного слоя будет равна $\varphi=(1/2\pi)n\gamma\vartheta$, где n — полное число витков, а ϑ — азимутальный угол, отсчитываемый вокруг оси кольца.

Если Ω — магнитный потенциал внутри кольца, а Ω' — вне его, то

$$\Omega-\Omega'=-4\pi\varphi+C=-2n\gamma\vartheta+C.$$

Снаружи кольца потенциал Ω' должен удовлетворять уравнению Лапласа и исчезать на бесконечном расстоянии. Как следует из природы самой задачи, этот потенциал должен быть функцией только угла ϑ. А единственным значением Ω', удовлетворяющим этим условиям, является ноль. Следовательно, $\Omega'=0$, $\Omega=-2n\gamma\vartheta+C$.

Магнитная сила в любой точке, находящейся внутри кольца, перпендикулярна плоскости, проходящей через ось, и равна величине $2\,n\gamma/r$, где r — расстояние от оси. Вне кольца магнитная сила отсутствует.

Если форма замкнутой кривой задана координатами текущей точки z, r и ϑ, как функция ее расстояния s от некоторой фиксированной точки, то поток магнитной индукции сквозь эту замкнутую кривую можно найти интегрированием вдоль нее вектор-потенциала, составляющие которого равны

$$F=2n\gamma xz/r^2, \qquad G=2n\gamma yz/r^2, \qquad H=0.$$

Таким образом, мы находим

$$2n\gamma\int_0^s \frac{z}{r}\frac{dr}{ds}ds,$$

интеграл берется вдоль кривой при условии, что она целиком лежит внутри коль-

ца. Если же кривая целиком находится вне кольца, но охватывает его, то поток магнитной индукции сквозь кривую равен

$$2n\gamma\int_0^{s'}\frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}ds'=2n\gamma a,$$

где a есть «линейная» величина $\int_0^{s'}\frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}ds'$, а штрихованные координаты относятся не к замкнутой кривой, а к одиночному витку соленоида.

Таким образом, поток магнитной индукции сквозь любую замкнутую кривую, охватывающую кольцо, всюду одинаков и равен $2n\gamma a$. Если же замкнутая кривая не охватывает кольцо, поток магнитной индукции сквозь нее равен нулю.

Пусть второй провод обмотан вокруг кольца произвольным образом и, не обязательно соприкасаясь с ним, охватывает его n' раз. Поток индукции сквозь этот контур равен $2nn'\gamma a$, и, следовательно, коэффициент индукции M одной катушки на другую равен $M=2nn'a$.

Поскольку это выражение совершенно не зависит от конкретной формы или положения вторичного контура, то при протекании токов через проводники между ними не будет действовать никакой механической силы. Совмещая вторичный провод с первичным, мы получаем для коэффициента самоиндукции кольцевой намотки выражение $L=2n^2a$.

ГЛАВА XIII
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ТОКИ

Цилиндрические проводники

682. Существует очень важный класс электрических систем, где токи текут по круглым проводам почти однородного сечения, причем провода либо прямые, либо такие, что радиус кривизны оси провода очень велик по сравнению с радиусом поперечного сечения провода. Для того чтобы подготовиться к математическому исследованию таких систем, мы начнем со случая, когда контур состоит из двух очень протяженных параллельных проводников и двух небольших кусков, соединяющих их концы. Мы сосредоточим свое внимание на части контура, удаленной от концов проводников настолько, что никаких ощутимых изменений в распределении силы не вносит тот факт, что провода не являются бесконечно длинными.

Выберем ось z параллельной направлению проводников; тогда в рассматриваемой области поля из-за симметрии системы все будет зависеть только от величины H — составляющей вектор-потенциала, параллельной z.

Составляющие магнитной индукции, согласно уравнению (A), равны

$$a=dH/dy, \tag{1}$$

$$b=-dH/dx,\quad c=0. \tag{2}$$

Для общности мы будем предполагать, что коэффициент магнитной индукции равен μ, так что $a=\mu\alpha$, $b=\mu\beta$, где α и β — составляющие магнитной силы.

Уравнения (E) для электрических токов (п. 607) дают

$$u=0, \qquad v=0, \qquad 4\pi w=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}. \tag{3}$$

683. Если ток является функцией расстояния r от оси z, то, написав

$$x=r\cos\vartheta \quad \text{и} \quad y=r\sin\vartheta \tag{4}$$

и обозначив магнитную силу через β, в направлении, в котором ϑ, отсчитывается перпендикулярно плоскости, проходящей через ось z, мы будем иметь

$$4\pi w=\frac{d\beta}{dr}+\frac{1}{r}\beta=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\beta r). \tag{5}$$

Если C представляет собой полный ток, протекающий через сечение, ограниченное окружностью радиуса r, которая лежит в плоскости xy и имеет центр в начале координат, то

$$C=\int\limits_0^r 2\pi rw\,dr=\frac{1}{2}\beta r. \tag{6}$$

Таким образом, отсюда видно, что магнитная сила в некоторой заданной точке, обусловленная токами, текущими в цилиндрических слоях с общей осью z, зависит только от полной силы тока, протекающего через слои, лежащие между данной точкой и этой осью, и не зависит от распределения тока по различным цилиндрическим слоям.

Пусть, например, проводник представляет собой однородный провод радиуса a, а полный ток через него равен C, тогда при равномерном распределении тока по всем частям сечения его плотность ω будет постоянной, причем

$$C=\pi wa^2. \tag{7}$$

Ток, протекающий через круговое сечение радиуса r при значениях r меньших a, равен $C'=\pi wr^2$. Поэтому в любой точке, расположенной внутри провода,

$$\beta=2C'/r=2Cr/a^2. \tag{8}$$

Вне провода

$$\beta=2C/r. \tag{9}$$

В самом веществе провода магнитный потенциал отсутствует, так как внутри проводника, несущего электрический ток, магнитная сила не удовлетворяет условиям существования потенциала.

Вне провода магнитный потенциал равен

$$\Omega=-2C\vartheta. \tag{10}$$

Предположим, что вместо провода взят проводник в виде металлической трубки, внешний и внутренний радиусы которой соответственно равны a_1 и a_2, тогда для тока C, протекающего по такому трубчатому проводнику, имеем

$$C=\pi w(a_1^2-a_2^2). \tag{11}$$

Внутри трубки магнитная сила равна нулю. В металле трубки, где радиус r изменяется от a_1 до a_2,

$$\beta=2C\frac{1}{a_1^2-a_2^2}\left(r-\frac{a_2^2}{r}\right), \tag{12}$$

а вне трубки величина

$$\beta=2C/r, \tag{13}$$

т. е. остается той же самой, что и при протекании тока по сплошному проводу

684. Магнитная индукция в любой точке равна $b=\mu\beta$, и поскольку, согласно уравнению (2),

$$b=-dH/dr, \tag{14}$$

то

$$H=-\int\mu\beta\,dr. \tag{15}$$

Значение H вне трубки равно

$$A-2\mu_0 C\ln r, \tag{16}$$

где μ_0 есть значение μ в области, лежащей вне трубки, A — постоянная, зависящая от места подключения замыкающего цепь возвратного тока.

Внутри вещества трубки

$$H=A-2\mu_0 C\ln a_1+\frac{\mu C}{a_1^2-a_2^2}\left(a_1^2-r^2+2a_2^2\ln\frac{r}{a_1}\right). \tag{17}$$

В области, расположенной внутри трубки, величина H постоянна и равна

$$H=A-2\mu_0 C\ln a_1+\mu C\left(1+\frac{2a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\ln\frac{a^2}{a_1}\right). \tag{18}$$

685. Пусть контур замыкается обратным током, текущим по трубке или по проводу, параллельному первому, прямому току, причем оси двух токов расположены на расстоянии b. Чтобы определить кинетическую энергию системы, мы должны вычислить интеграл

$$T=\frac{1}{2}\iiint Hw\,dx\,dy\,dz. \tag{19}$$

Если мы ограничимся рассмотрением только той части системы, которая находится между двумя плоскостями, перпендикулярными осям проводников и разнесенными на расстояние l одна от другой, то это выражение окажется таким:

$$T=\frac{1}{2}l\iint Hw\,dx\,dy. \tag{20}$$

Если пометить штрихами величины, относящиеся к обратному току, то мы можем записать это так:

$$\frac{2T}{l}=\iint Hw'\,dx'\,dy'+\iint H'w\,dx\,dy+\iint Hw\,dx\,dy+\iint H'w'\,dx'\,dy'. \tag{21}$$

Поскольку действие тока на любую точку вне трубки такое же, как если бы такой же ток был сосредоточен на оси трубки, то среднее значение H по сечению

обратного тока равно $A-2\mu_0 C\ln b$, а среднее значение H' по сечению прямого тока равно

$$A'-2\mu_0 C'\ln b.$$

Поэтому в выражении для T первые два члена могут быть записаны:

$$AC'-2\mu_0 CC'\ln b, \qquad A'C-2\mu_0 CC'\ln b.$$

Интегрируя два последних члена обычным путем, складывая результаты и помня, что $C+C'=0$, мы получим величину кинетической энергии T. Записав ее как $LC^2/2$, где L — коэффициент самоиндукции системы двух проводников, для величины L системы длиной l найдем

$$\frac{L}{l}=2\mu_0\ln\frac{b^2}{a_1a_1'}+\frac{1}{2}\mu\left[\frac{a_1^2-3a_2^2}{a_1^2-a_2^2}+\frac{4a_2^4}{(a_1^2-a_2^2)^2}\ln\frac{a_1}{a^2}\right]+\frac{1}{2}\mu'\left[\frac{a_1'^2-3a_2'^2}{a_1'^2-a_2'^2}+\frac{4a_2'^4}{(a_1'^2-a_2'^2)^2}\ln\frac{a_1'}{a_2'}\right]. \tag{22}$$

Если проводники представляют собой сплошные провода, то a_2 и a_2' равны нулю и

$$\frac{L}{l}=2\mu_0\ln\frac{b^2}{a_1a_1'}+\frac{1}{2}(\mu+\mu'). \tag{23}$$

Только в случае железных проводов при вычислении их самоиндукции необходимо принимать во внимание магнитную индукцию. В остальных случаях мы можем положить μ_0, μ и μ' равными единице. Чем меньше радиусы проводов и чем больше расстояния между ними, тем больше величина их самоиндукции.

Как найти силу отталкивания X между двумя участками проводов

686. Согласно п. 680, для силы, стремящейся увеличить b, мы получаем

$$X=\frac{1}{2}\frac{dL}{db}C^2=2\mu_0\frac{l}{b}C^2, \tag{24}$$

что при $\mu_0=1$, как это имеет место для воздуха, согласуется с формулой Ампера.

687. Если длина проводов значительно превышает расстояние между ними, мы можем использовать коэффициент самоиндукции для отыскания натяжения проводов, возникающего под действием тока.

Обозначив это натяжение через Z, имеем

$$Z=\frac{1}{2}\frac{dL}{dl}C^2=C^2\left\{\mu_0\ln\frac{b^2}{a_1a_1'}+\frac{\mu+\mu'}{4}\right\}. \tag{25}$$

В одном из экспериментов Ампера параллельные проводники состоят из двух корытцев с ртутью, соединенных друг с другом с помощью провода в виде плавающего мостика. Ток вводится с конца одного из корытцев и течет вдоль него до тех пор, пока не достигнет одного из концов плавающего провода, затем по плавающему мостику он переходит во второе корытце и по нему возвращается обрат-

но; плавающий мостик, двигаясь вдоль корытца, удлиняет тем самым участок ртути, по которому течет ток [рис. 40].

Профессор Тэт упростил электрические условия этого опыта, заменив провод плавающим стеклянным сифоном, заполненным ртутью, чтобы ток на всем своем пути тек по ртути.

Этот опыт иногда приводят в качестве доказательства того, что два элемента тока, текущего вдоль одной и той же прямой линии, отталкиваются и что тем самым формула Ампера, указывающая на такое отталкивание между коллинеарными элементами, более правильна, чем формула Грассмана (Grassmann), которая

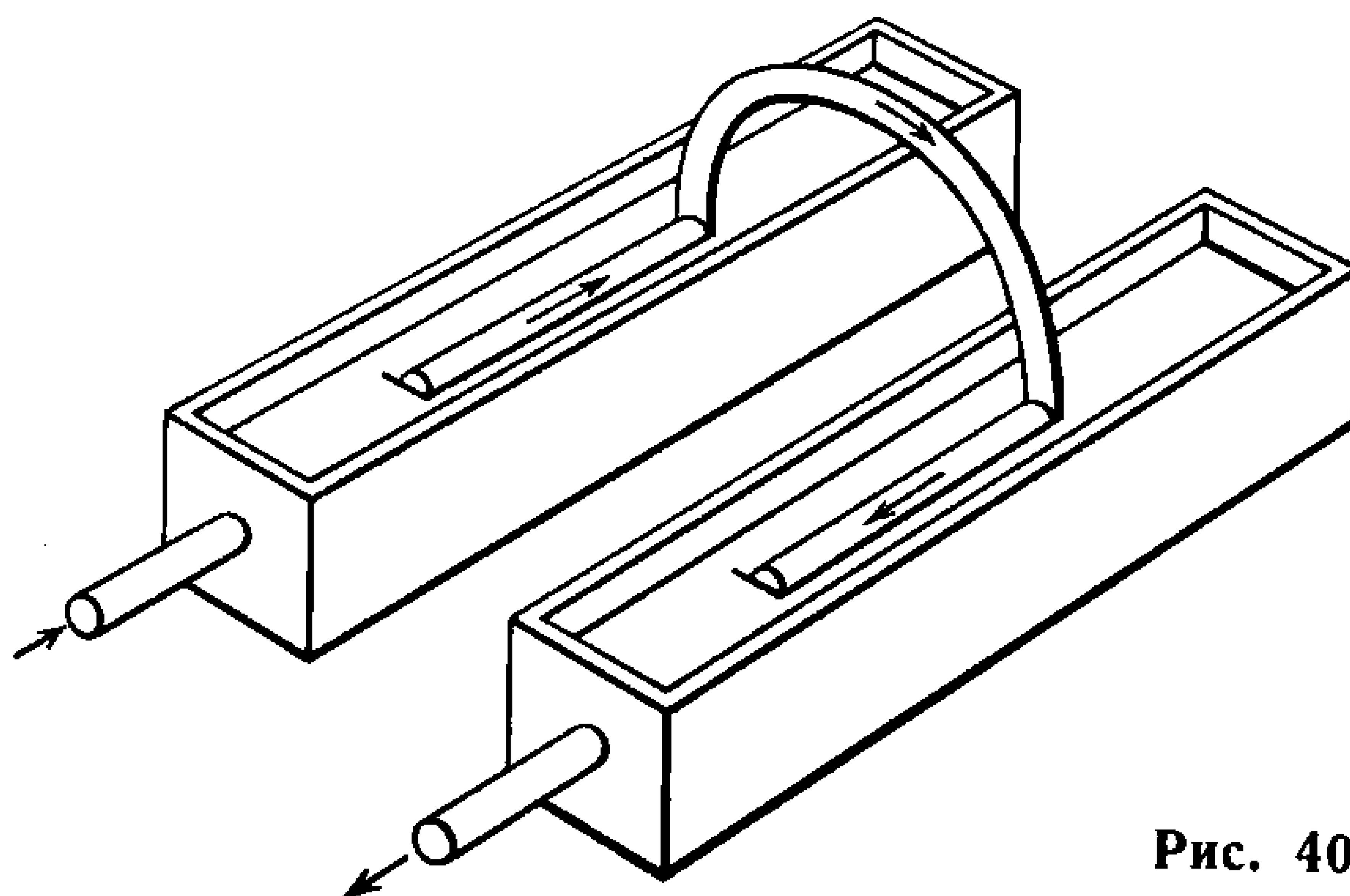


Рис. 40

не дает никакого действия между элементами, расположенными вдоль одной и той же прямой линии; п. 526.

Однако ясно, что, поскольку и формула Ампера, и формула Грассмана для замкнутых контуров приводят к одинаковым результатам и поскольку на опыте мы имеем дело только с замкнутыми контурами, никакие экспериментальные данные не могут создать преимуществ ни одной из этих теорий перед другой.

В самом деле, как уже показано, обе формулы приводят к одному и тому же значению силы отталкивания, из которого следует, что расстояние b между двумя параллельными проводниками является важным параметром.

Когда длина проводников не очень сильно превышает расстояние между ними, выражение для величины L несколько усложняется.

688. По мере уменьшения расстояния между проводниками уменьшается и величина L. Предел этого уменьшения наступает, когда проводники приходят в контакт, т. е. $b=a_1+a_1'$. В этом случае, если $\mu_0=\mu=\mu'=1$,

$$L=2l\left\{\ln\frac{(a_1+a_1')^2}{a_1a_1'}+\frac{1}{2}\right\}. \tag{26}$$

Эта величина минимальна, если $a_1=a_1'$; тогда

$$L=2l\,[\ln 4+(1/2)]=2l\,(1{,}8863)=3{,}7726l. \tag{27}$$

Это является наименьшим значением величины самоиндукции сдвоенного круглого провода общей длиной $2l$.

Так как обе части провода должны быть изолированы друг от друга, то фактически величина самоиндукции никогда не достигает этого предельного значения. Используя широкие плоские металлические полосы вместо круглых проводов, коэффициент самоиндукции можно уменьшать сколько угодно.

Об электродвижущей силе, необходимой для создания тока переменной плотности вдоль цилиндрического проводника

689. Когда ток в проводе имеет переменную плотность, то электродвижущая сила, возникающая в результате индукции тока на самого себя, различна на разных участках сечения провода, являясь в общем случае функцией как расстояния от оси провода, так и времени. Если бы мы предположили, что цилиндрический проводник состоит из пучка проводов, образующих один и тот же контур, и ток задается однородным в любой части сечения пучка, то метод вычисления, использованный выше, был бы применим строго. Если, однако, мы рассмотрим цилиндрический проводник как сплошное тело, внутри которого токи, подчиняясь действию электродвижущих сил, могут течь беспрепятственно, то плотность тока не будет одинаковой на различных расстояниях от оси цилиндра и сами электродвижущие силы будут зависеть от распределения тока в различных цилиндрических слоях провода.

В этом случае вектор-потенциал H, плотность тока w и электродвижущую напряженность в любой точке следует рассматривать как функцию времени и расстояния от оси провода.

Полный ток C, протекающий через сечение провода и полную электродвижущую силу E, действующую вдоль контура, следует рассматривать, как переменные, связь между которыми мы и должны установить.

Предположим, что величина H равна

$$H=S+T_0+T_1r^2+\ldots+T_nr^{n2}+\ldots, \qquad (1)$$

где S, T_0, T_1, ... — функции времени.

Тогда из уравнения

$$\frac{d^2H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH}{dr}=-4\pi w \qquad (2)$$

мы находим

$$-\pi w=T_1+\ldots+n^2T_nr^{2n-2}+\ldots. \qquad (3)$$

Если удельное сопротивление вещества (на единицу объема) обозначить через ρ, то электродвижущая напряженность в любой точке равна $\rho\omega$, что можно выразить через электрический потенциал и через вектор-потенциал H при помощи уравнения (B), п. 598:

$$\rho w=-\frac{d\Psi}{dz}-\frac{dH}{dt}, \qquad (4)$$

или

$$-\rho w=\frac{d\Psi}{dz}+\frac{dS}{dt}+\frac{dT_0}{dt}+\frac{dT_1}{dt}r^2+\ldots+\frac{dT_n}{dt}r^{2n}+\ldots \qquad (5)$$

Сравнивая в уравнениях (3) и (5) коэффициенты при одинаковых степенях r, получаем

$$T_1=\frac{\pi}{\rho}\left(\frac{d\Psi}{dz}+\frac{dS}{dt}+\frac{dT_0}{dt}\right), \tag{6}$$

$$T_2=\frac{\pi}{\rho}\frac{1}{2^2}\frac{dT_1}{dt}, \tag{7}$$

$$T_n=\frac{\pi}{\rho}\frac{1}{n^2}\frac{dT_{n-1}}{dt}. \tag{8}$$

Следовательно, мы можем написать

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{d\Psi}{dz}, \tag{9}$$

$$T_0=T, \qquad T_1=\frac{\pi}{\rho}\frac{dT}{dt}, \ \ldots \qquad T_n=\frac{\pi^n}{\rho^n}\frac{1}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n}. \tag{10}$$

690. Для нахождения полного тока C нам следует проинтегрировать w по всему сечению провода радиуса a:

$$C=2\pi\int_0^a wr\,dr. \tag{11}$$

Подставляя значения πw из уравнения (3), получаем

$$C=-(T_1a^2+\ldots+nT_na^{2n}+\ldots). \tag{12}$$

Величина H в любой точке вне провода определяется только полным током C и не зависит от характера его распределения внутри провода. Поэтому можно принять значение H на поверхности провода равным AC, где A — постоянная величина, которую следует вычислять с учетом общей конфигурации контура. Полагая $H=AC$ при $r=a$, мы получаем

$$AC=S+T_0+T_1a^2+\ldots+T_na_n^{2n}+\ldots. \tag{13}$$

Если далее записать $\pi a^2/\rho=\alpha$, где α — величина проводимости на единицу длины провода, то мы будем иметь

$$C=-\left(\alpha\frac{dT}{dt}+\frac{2\alpha^2}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}+\ldots+\frac{n\alpha^n}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n}+\ldots\right), \tag{14}$$

$$AC-S=T+\alpha\frac{dT}{dt}+\frac{\alpha^2}{1^2\cdot 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}+\ldots+\frac{\alpha^n}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n}+\ldots. \tag{15}$$

Чтобы исключить из этих уравнений T, мы должны вначале обратить ряд (14). Таким образом, получаем

$$\alpha\frac{dT}{dt}=-C+\frac{1}{2}\alpha\frac{dC}{dt}-\frac{1}{6}\alpha^2\frac{d^2C}{dt^2}+\frac{7}{144}\alpha^3\frac{d^3C}{dt^3}-\frac{39}{2880}\alpha^4\frac{d^4C}{dt^4}+\ldots.$$

Из (14) и (15) мы также имеем

$$\alpha\left(A\frac{dC}{dt}-\frac{dS}{dt}\right)+C=\frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{1}{6}\alpha^3\frac{d^3T}{dt^3}+\frac{1}{48}\alpha^4\frac{d^4T}{dt^4}+\frac{1}{720}\alpha^5\frac{d^5T}{dt^5}+\ldots.$$

Из последних двух уравнений находим

$$\alpha\left(A\frac{dC}{dt}-\frac{dS}{dt}\right)+C+\frac{1}{2}\alpha\frac{dC}{dt}-\frac{1}{12}\alpha^2\frac{d^2C}{dt^2}+\frac{1}{48}\alpha^3\frac{d^3C}{dt^3}-\frac{1}{180}\alpha^4\frac{d^4C}{dt^4}+\ldots=0. \quad (16)$$

Если l — полная длина контура, R — его полное сопротивление, E — электродвижущая сила, обусловленная источниками, отличными от самоиндукции тока, то

$$\frac{dS}{dt}=\frac{E}{l},\qquad \alpha=\frac{l}{R}, \quad (17)$$

$$E=RC+l\left(A+\frac{1}{2}\right)\frac{dC}{dt}-\frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{d^2C}{dt^2}+\frac{1}{48}\frac{l^3}{R^2}\frac{d^3C}{dt^3}-\frac{1}{180}\frac{l^4}{R^3}\frac{d^4C}{dt^4}+\ldots. \quad (18)$$

Первый член в правой части этого уравнения, равный RC, выражает электродвижущую силу, необходимую для преодоления сопротивления в соответствии с законом Ома.

Второй член, равный $l\left(A+\frac{1}{2}\right)\frac{dC}{dt}$, выражает электродвижущую силу, которую следовало бы создать для увеличения электрокинетического импульса контура в предположении, что во всех точках сечения провода сила тока одинакова.

Остальные члены выражают поправки к этой величине, возникающие из-за того факта, что сила тока различна на разных расстояниях от оси провода. Реальная система токов обладает большей степенью свободы, чем гипотетическая система, в которой по всему сечению поддерживается однородное распределение токов. Следовательно, электродвижущая сила, которая требуется для быстрого изменения силы тока, несколько меньше той, которая была бы необходима в рамках этой гипотезы.

Отношение между временным интегралом электродвижущей силы и временным интегралом тока равно

$$\int E\,dt=R\int C\,dt+l\left(A+\frac{1}{2}\right)C-\frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{dC}{dt}+\ldots. \quad (19)$$

Если ток вначале имеет постоянное значение C_0, затем в течение некоторого времени увеличивается до величины C_1 и затем остается постоянным, равным C_1, то члены, содержащие производные от C, исчезают на обоих пределах и

$$\int E\,dt=R\int C\,dt+l(A+1/2)\ (C_1-C_0), \quad (20$$

т. е. величина импульса электродвижущей силы такая же, как если бы ток был однороден по сечению провода.

О среднем геометрическом расстоянии между двумя фигурами на плоскости [1]

691. При вычислении электромагнитного действия тока, текущего вдоль прямого проводника любого заданного сечения, на другой ток, текущий по параллель-

[1] *Trans. R. S. Edin.*, 1871—2.

ному проводнику, сечение которого также задано, мы должны найти интеграл

$$\iiiint \ln r\, dx\, dy\, dx'\, dy',$$

где $dx\,dy$ есть элемент площади в первом сечении, $dx'dy'$ — элемент площади во втором сечении, r — расстояние между этими элементами; интегрирование про-

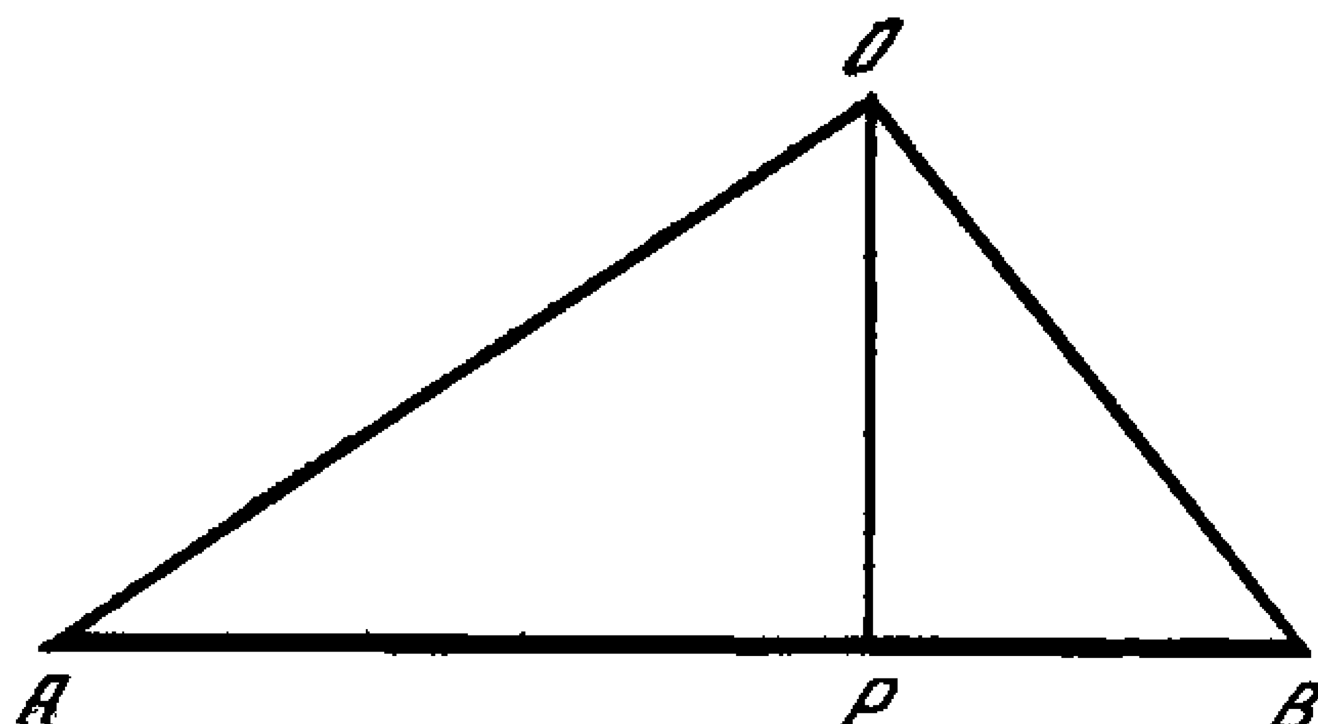


Рис. 41

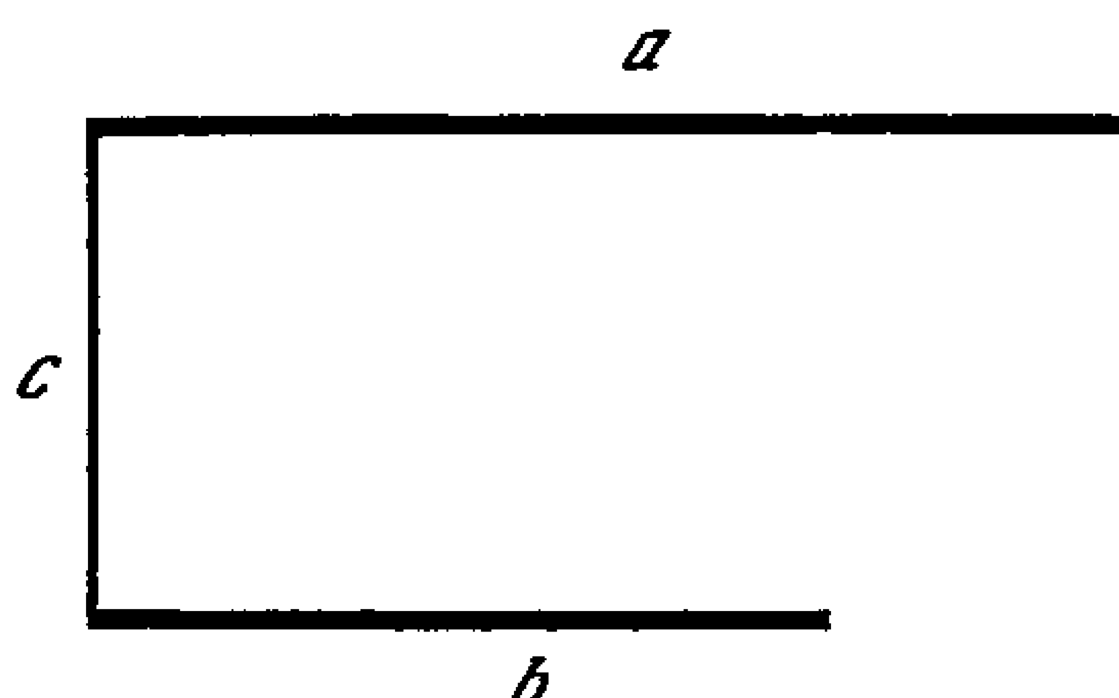


Рис. 42

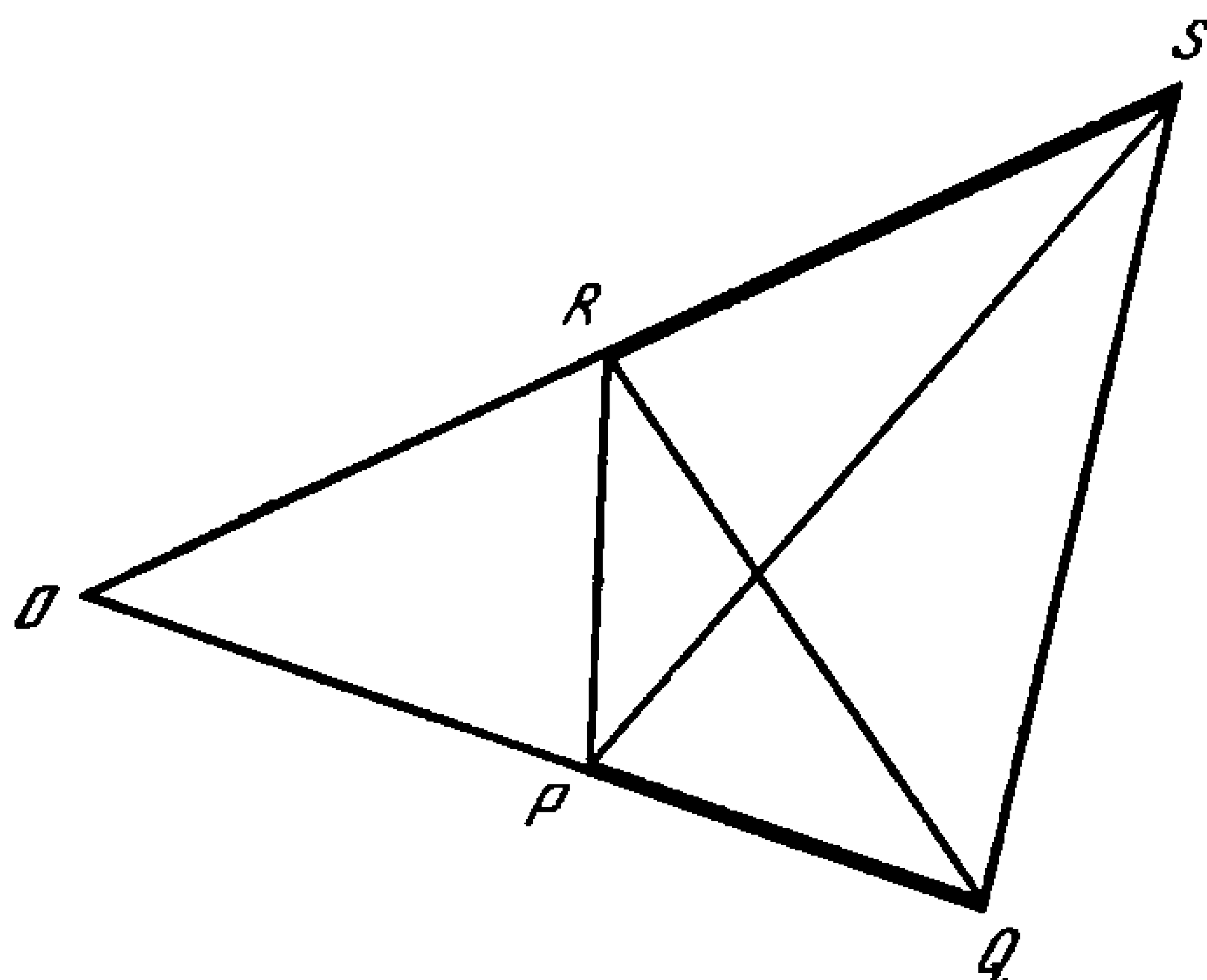


Рис. 44

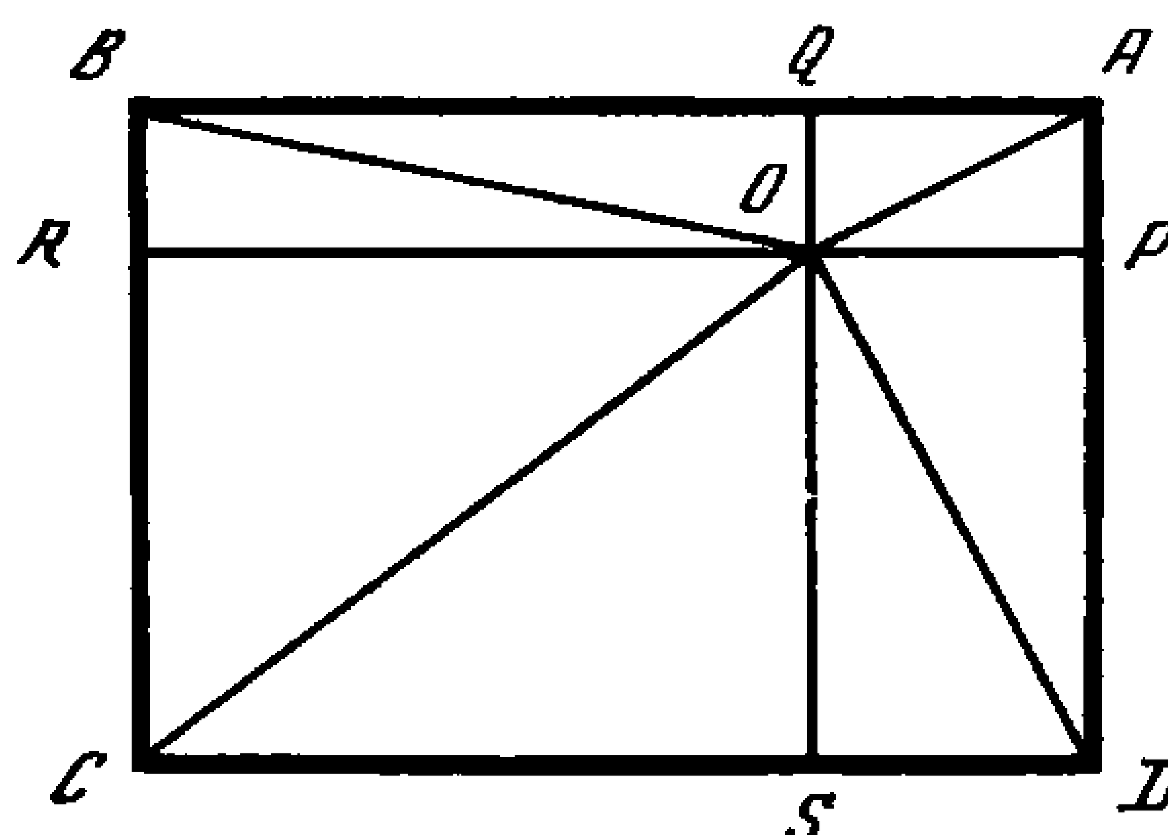


Рис. 43

изводится вначале по всем элементам первого сечения, а затем по всем элементам второго сечения.

Если мы введем теперь некоторую длину R, такую, что интеграл равен $A_1A_2 \ln R$, где A_1 и A_2 — площади двух сечений, то эта длина R останется неизменной, какую бы единицу длины мы ни приняли и какую бы систему логарифмов ни использовали.

Если предположить, что сечения разделены на элементы одинакового размера, то логарифм от R, умноженный на число пар элементов, будет равен сумме логарифмов расстояний между всеми парами элементов. Следовательно, величину R можно рассматривать как среднее геометрическое всех расстояний между парами элементов. Очевидно, что величина R должна быть промежуточной между наибольшим и наименьшим значениями r.

Если R_A и R_B — средние геометрические расстояния фигур A и B до третьей фигуры C, а R_{A+B} — среднее геометрическое расстояние суммы этих двух фигур до C, то

$$(A+B) \ln R_{A+B} = A \ln R_A + B \ln R_B.$$

При помощи этого соотношения мы можем найти расстояние R для сложной фигуры по известным значениям R для ее частей.

692. ПРИМЕРЫ

(1). Пусть R — среднее расстояние от точки O до отрезка AB, а OP — перпендикуляр к AB [рис. 41]; тогда

$$AB(\ln R+1)=AP\ln OA+PB\ln OB+OP\,\widehat{AOB}.$$

(2). Для двух отрезков (рис. 42) длиной a и b, проведенных в одну сторону из концов отрезка длиной c перпендикулярно ему, имеем

$$\begin{aligned}ab(2\ln R+3)&=(c^2-(a-b)^2)\ln\sqrt{c^2+(a-b)^2}+c^2\ln c+\\&+(a^2-c^2)\ln\sqrt{a^2+c^2}+(b^2-c^2)\ln\sqrt{b^2+c^2}\\&-c(a-b)\operatorname{arctg}(a-b)/c+ac\operatorname{arctg}(a/c)+bc\operatorname{arctg}(b/c).\end{aligned}$$

(3). Для двух отрезков PQ и RS (рис. 43), направления которых пересекаются в точке 0,

$$\begin{aligned}PQ\cdot RS(2\ln R+3)&=\ln PR(2OP\cdot OR\sin^2 O-PR^2\cos O)\\&+\ln QS(2OQ\cdot OS\sin^2 O-QS^2\cos O)\\&-\ln PS(2OP\cdot OS\sin^2 O-PS^2\cos O)\\&-\ln QR(2OQ\cdot OR\sin^2 O-QR^2\cos O)\\&-\sin O\,\{OP^2\cdot\widehat{SPR}-OQ^2\cdot SQR+OR^2\cdot\widehat{PRQ}-OS^2\cdot\widehat{PSQ}\}.\end{aligned}$$

(4). Для точки O и прямоугольной площадки $ABCD$ (рис. 44). Пусть OP, OQ, OR, OS перпендикулярны к его сторонам, тогда

$$\begin{aligned}AB\cdot AD(2\ln R+3)&=2OP\cdot OQ\ln OA+2OQ\cdot OR\ln OB+2OR\cdot OS\ln OC+\\&+2OS\cdot OP\ln OD+OP^2\widehat{DOA}+OQ^2\cdot\widehat{AOB}+\\&+OR^2\cdot\widehat{BOC}+OS^2\cdot\widehat{COD}.\end{aligned}$$

(5). Нет необходимости в том, чтобы две фигуры были различны, ибо мы можем найти среднее геометрическое расстояние между каждой парой точек одной и той же фигуры; так, для отрезка прямой длины a

$$\ln R=\ln a-(3/2),\quad\text{или}\quad R=ae^{-3/2},\quad R=0{,}22313a.$$

(6). Для прямоугольной площадки, стороны которой равны a и b,

$$\begin{aligned}\ln R&=\ln\sqrt{a^2+b^2}-\frac{1}{6}\frac{a^2}{b^2}\ln\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}-\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\ln\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}+\\&+\frac{2}{3}\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\frac{2}{3}\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\frac{25}{12}.\end{aligned}$$

Когда этот прямоугольник является квадратом со стороной a,

$$\ln R=\ln a+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3}-\frac{25}{12},\quad R=0{,}44705a.$$

(7). Среднее геометрическое расстояние между точкой и линией окружности равно наибольшей из двух величин: величины расстояния от данной точки до центра окружности и радиуса этой окружности.

(8). Таким образом, среднее геометрическое расстояние любой фигуры от некоторого кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, равно ее среднегеометрическому расстоянию от центра кольца, если эта фигура целиком расположена вне кольца; если же она вся лежит внутри кольца, то

$$\ln R=\frac{a_1^2\ln a_1-a_2^2\ln a_2}{a_1^2-a_2^2}-\frac{1}{2},$$

где a_1 и a_2 — внешний и внутренний радиусы кольца. В этом случае R не зависит от формы фигуры, находящейся внутри кольца.

(9). Среднее геометрическое расстояние всех пар точек в кольце находится из уравнения

$$\ln R=\ln a_1-\frac{a_2^4}{(a_1^2-a_2^2)^2}\ln\frac{a_1}{a_2}+\frac{1}{4}\,\frac{3a_2^2-a_1^2}{a_1^2-a_2^2}.$$

Для круглой площадки радиуса a это выражение принимает вид

$$\ln R=\ln a-(1/4),\ \text{или}\ R=ae^{-1/4},\ R=0{,}7788\ a.$$

Для линии окружности $R=a$.

693. При вычислении коэффициента самоиндукции катушки однородного сечения, радиус кривизны которой значительно превышает размеры поперечного сечения, мы сначала, пользуясь только что описанным методом, определяем средние геометрические расстояния между всеми парами точек сечения катушки, а затем подсчитываем коэффициент взаимной индукции между двумя линейными проводниками заданной формы, помещенными на этом расстоянии друг от друга. Это и будет коэффициентом самоиндукции для единичного полного тока в катушке, если он распределен однородно по всем точкам сечения.

Но если в катушке имеется n витков, мы должны полученный коэффициент помножить на n^2; тогда мы получим коэффициент самоиндукции в предположении, что все сечение катушки полностью заполнено витками проводящего провода.

Однако провод имеет цилиндрическую форму и покрыт изолирующим материалом, поэтому ток не распределен равномерно по сечению, а сконцентрирован в определенных его частях; это увеличивает коэффициент самоиндукции. Помимо этого, токи в соседних проводах не оказывают на ток в данном проводе того же самого действия, что при однородном распределении.

Поправки, возникающие при учете всех этих соображений, могут быть найдены методом среднегеометрического расстояния. Они пропорциональны длине всего провода в катушке и могут быть выражены как некоторые численные величины, на которые мы должны умножать длину провода, с тем чтобы получить поправку к коэффициенту самоиндукции.

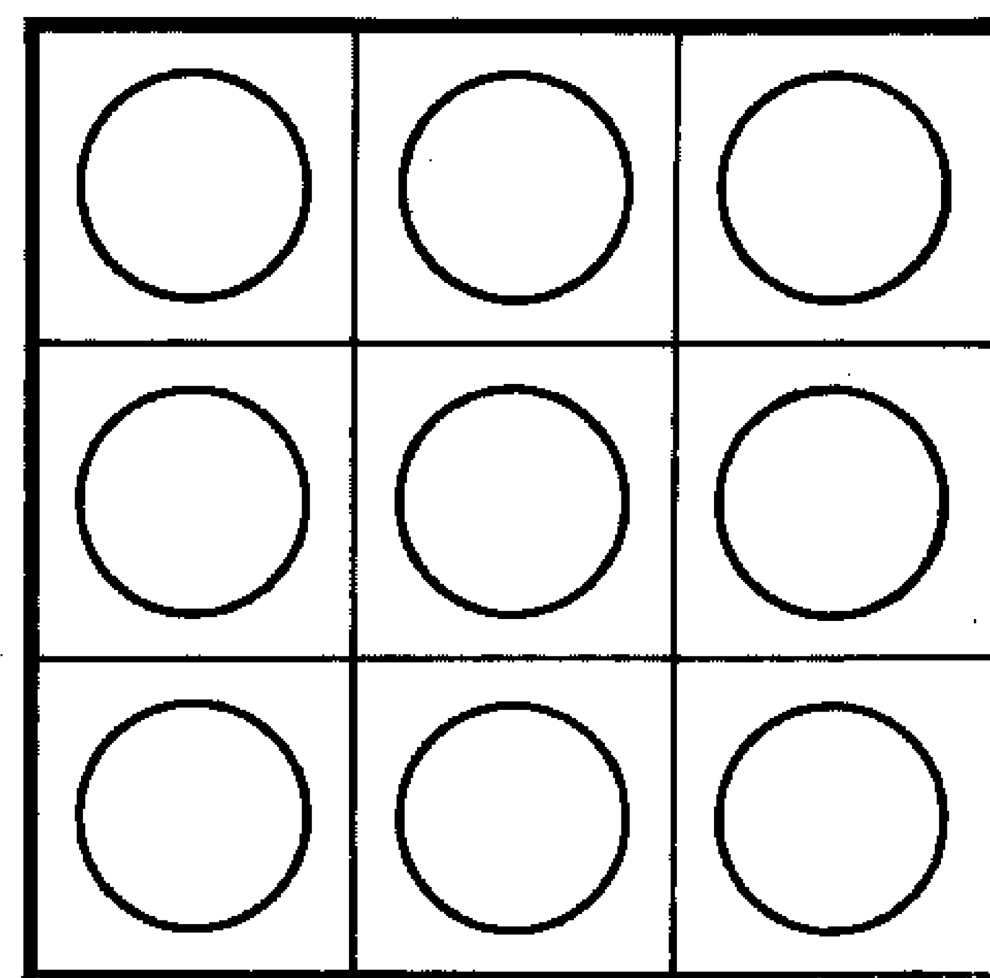
Пусть диаметр провода равен d, провод покрыт изолирующим материалом и свернут в катушку. Мы будем предполагать, что сечения проводов располагают-

ся в квадратном порядке, как это показано на рис. 45, и что расстояние между осью любого провода и осью провода, соседнего с ним, как по ширине, так и по глубине катушки равно D. Очевидно, что D больше d.

Вначале мы должны определить превышение самоиндукции на единицу длины цилиндрического провода диаметра d по сравнению с проводом квадратного сечения со стороной, равной D, т. е.

$$2\ln\frac{R\,(\text{для квадрата})}{R\,(\text{для окружности})}=2\left(\ln\frac{D}{d}+\frac{4}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3}-\frac{11}{6}\right)=2\left(\ln\frac{D}{d}+0{,}1380606\right).$$

Индуктивное действие ближайших восьми круглых проводов на рассматриваемый провод меньше, чем действие соответствующих восьми квадратных проводов на квадратный провод, помещенный в середине в $2\cdot(0{,}01971)$ раза.


Рис. 45

Поправками на влияние проводов, находящихся на больших расстояниях, можно пренебречь и общий корректирующий множитель записать в виде $2[\ln(D/d)+0{,}11835]$.

Окончательное значение самоиндукции поэтому равно

$$L=n^2M+2l[\ln\,(D/d)+0{,}11835],$$

где n — число витков, l — длина провода, M — взаимоиндукция двух контуров, имеющих форму среднего провода катушки и помещенных на расстояние R друг от друга, R — среднегеометрическое расстояние между парами точек сечения; D — расстояние между следующими друг за другом проводами, d — диаметр провода.

ГЛАВА XIV
КРУГОВЫЕ ТОКИ

Магнитный потенциал кругового тока

694. Магнитный потенциал, создаваемый в некоторой заданной точке контуром, несущим единичный ток, численно равен телесному углу с вершиной в этой точке, опирающемуся на контур, см. п. 409, 485.

В случае кругового контура телесный угол является телесным углом конуса второго порядка; для точки, находящейся на оси окружности, конус будет прямым. Если точка не находится на оси, конус является эллиптическим; его телесный угол равен площади сферического эллипса, вырезаемого им на сфере единичного радиуса.

Эта площадь может быть выражена в конечном виде через эллиптические интегралы третьего рода. Мы увидим, однако, что более удобно разложить ее в виде бесконечного ряда по сферическим гармоникам, поскольку те удобства, которые сопутствуют выполнению математических операций с общим членом такого ряда,

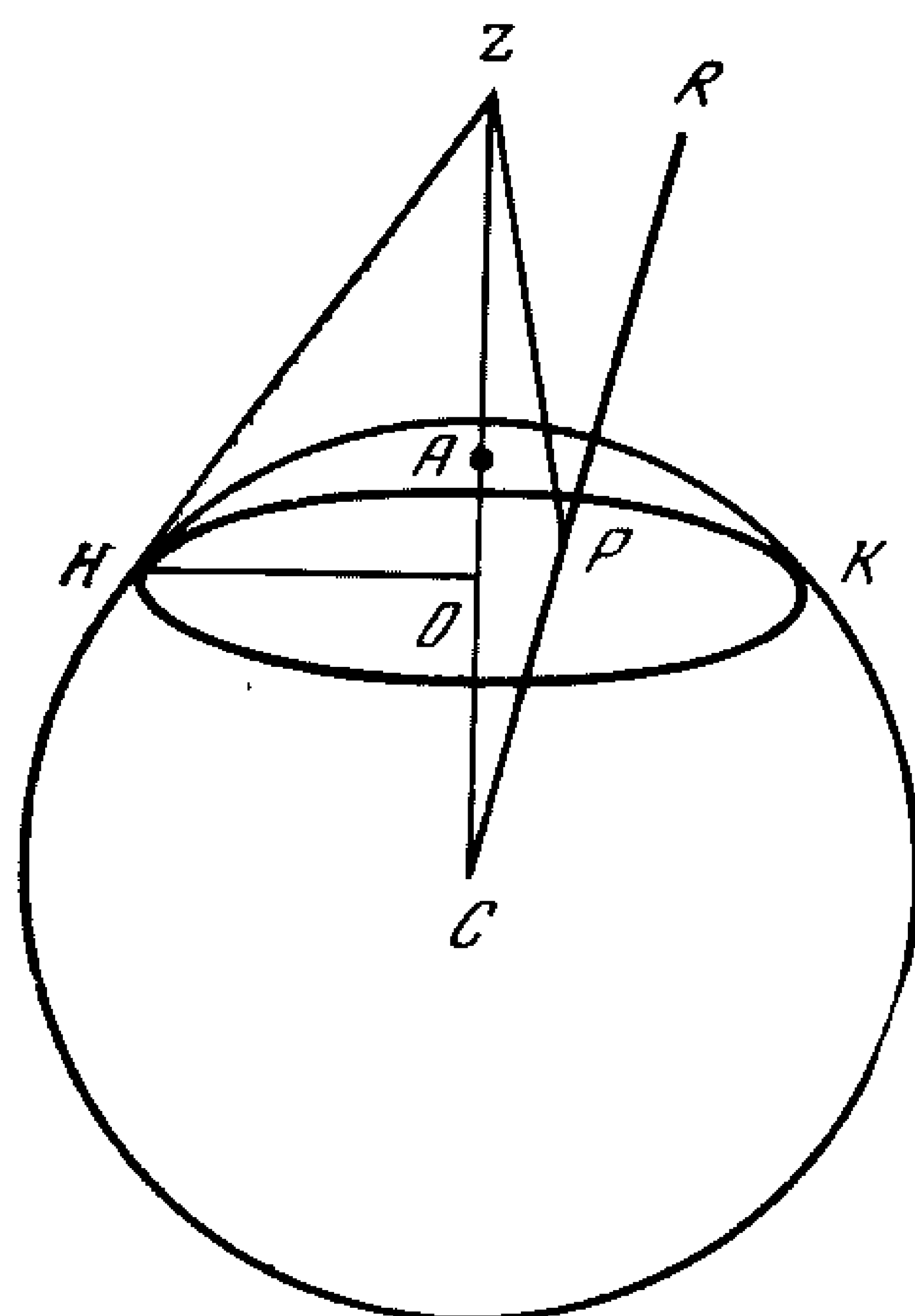


Рис. 46

с избытком перевешивают хлопоты, связанные с подсчетом числа членов ряда, достаточного для обеспечения практической точности.

Будем считать для общности, что начало координат расположено в произвольной точке оси окружности, т. е. на линии, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости.

Пусть точка O (рис. 46) является центром окружности, расположенная на оси точка C выбрана за начало координат, а точка H находится на самой окружности.

Проведем сферу радиусом CH с центром в точке C. Рассматриваемая нами окружность будет лежать на сфере, являясь ее малой окружностью с «угловым радиусом» α.

Обозначим $CH=c$, $OC=b=c\ \cos\alpha$, $OH=a=c\sin\alpha$.

Пусть A будет полюсом сферы, а Z — какой-нибудь точкой на оси и пусть $CZ=z$. Пусть R — произвольная точка в пространстве: $CR=r$, $ACR=\vartheta$.

Пусть P — точка пересечения сферы отрезком CR.

Магнитный потенциал, создаваемый круговым током, равен потенциалу, создаваемому ограниченной этим током магнитной оболочкой с единичной мощностью. Поскольку форма поверхности оболочки безразлична (лишь бы она была ограничена данной окружностью), мы можем предположить, что она совпадает с поверхностью сферы.

В п. 670 мы показали, что если V есть потенциал, создаваемый слоем материи с единичной поверхностной плотностью, распределенной по участку поверхности сферы, ограниченному ее малой окружностью, то потенциал ω, создаваемый магнитной оболочкой, которая ограничена этой же окружностью и имеет единичную мощность, равен $\omega=-\frac{1}{c}\frac{d}{dr}(rV)$.

Мы должны, таким образом, прежде всего найти V.

Пусть заданная точка Z находится на оси окружности, тогда та часть потенциала в Z, которая создается элементом dS, расположенным на сферической поверхности в точке P, равна dS/ZP.

Это выражение можно разложить в один из двух следующих рядов по сферическим гармоникам:

$$\frac{dS}{c}\left\{P_0+P_1\frac{z}{c}+\ldots+P_i\frac{z^i}{c^i}+\ldots\right\},$$

или

$$\frac{dS}{z}\left\{P_0+P_1\frac{c}{z}+\ldots+P_i\frac{c^i}{z^i}+\ldots\right\},$$

первый ряд сходится при значениях z меньших c, а второй — при z больших c.

Записав $dS=-c^2d\mu d\varphi$ и интегрируя по φ в пределах от 0 до 2π и по μ — от

$\cos\alpha$ до 1, находим

$$V=2\pi c\left\{\int\limits_{\cos\alpha}^{1} P_0\,d\mu+\ldots+\frac{z^i}{c^i}\int\limits_{\cos\alpha}^{1} P_i\,d\mu+\ldots\right\}, \tag{1}$$

или

$$V'=2\pi\frac{c^2}{z}\left\{\int\limits_{\cos\alpha}^{1} P_0\,d\mu+\ldots+\frac{c^i}{z^i}\int\limits_{\cos\alpha}^{1} P_i\,d\mu+\ldots\right\}. \tag{1'}$$

Для P_i имеем характеристическое уравнение

$$i(i+1)P_i+\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_i}{d\mu}\right]=0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mu}^{1} P_i\,d\mu=\frac{1-\mu^2}{i(i+1)}\frac{dP_i}{d\mu}. \tag{2}$$

Это выражение утрачивает смысл при $i=0$, но поскольку $P_0=1$, то

$$\int\limits_{\mu}^{1} P_0\,d\mu=1-\mu. \tag{3}$$

Так как функция $dP_i/d\mu$ возникает на каждом этапе этого исследования, мы будем обозначать ее сокращенно через P_i'. Величины P_i', соответствующие нескольким значениям i, даны в п. 698.

Теперь мы можем написать значение V в произвольной точке R, на оси или не на оси, путем замены r на z и умножения каждого из членов на зональную гармонику по ϑ того же порядка. Действительно, потенциал V должен допускать разложение в ряд по зональным гармоникам по ϑ с соответствующими коэффициентами. При $\vartheta=0$ каждая из зональных гармоник обращается в единицу, и точка R лежит на оси. Следовательно, эти коэффициенты являются членами разложения V для точки, расположенной на оси. Таким образом, мы получаем два ряда:

$$V=2\pi c\left\{1-\cos\alpha+\ldots+\frac{\sin^2\alpha}{i(i+1)}\frac{r^i}{c^i}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta)+\ldots\right\}, \tag{4}$$

или

$$V'=2\pi\frac{c^2}{r}\left\{1-\cos\alpha+\ldots+\frac{\sin^2\alpha}{i(i+1)}\frac{c^i}{r^i}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta)+\ldots\right\}. \tag{4'}$$

695. Теперь мы можем, согласно методу п. 670, найти величину потенциала контура ω из уравнения

$$\omega=-\frac{1}{c}\frac{d}{dr}(Vr). \tag{5}$$

Отсюда получаем два ряда:

$$\omega=-2\pi\left\{1-\cos\alpha+\ldots+\frac{\sin^2\alpha}{i}\frac{r^i}{c^i}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta)+\ldots\right\} \tag{6}$$

или

$$\omega' = 2\pi \sin^2\alpha \left\{\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P_1'(\alpha)P_1(\vartheta) + \ldots + \frac{1}{i+1}\frac{c^{i+1}}{r^{i+1}}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta) + \ldots\right\}. \qquad (6')$$

Ряд (6) сходится при всех значениях r меньших c, а ряд (6′) сходится для всех значений r больших c. На поверхности сферы, где $r=c$, оба ряда дают одно и то же значение ω, если ϑ превышает α, т. е. для точек, не занятых магнитной оболочкой; если же величина ϑ меньше α, т. е. для точек, находящихся на магнитной оболочке,

$$\omega' = \omega + 4\pi. \qquad (7)$$

Если принять центр окружности O за начало координат, мы должны положить $\alpha=\pi/2$, и тогда ряды станут такими:

$$\omega = -2\pi\left\{1 + \frac{r}{c}P_1(\vartheta) + \ldots + (-)^s\frac{1\cdot 3\ldots(2s-1)}{2\cdot 4\ldots 2s}\frac{r^{2s+1}}{c^{2s+1}}P_{2s+1}(\vartheta) + \ldots\right\}, \qquad (8)$$

$$\omega' = +2\pi\left\{\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P_1(\vartheta) + \ldots + (-)^s\frac{1\cdot 3\ldots(2s+1)}{2\cdot 4\ldots(2s+2)}\frac{c^{2s+2}}{r^{2s+2}}P_{2s+1}(\vartheta) + \ldots\right\}, \qquad (9)$$

где все гармоники являются гармониками нечетного порядка [1].

О потенциальной энергии двух круговых токов

696. Предположим вначале, что две магнитные оболочки, эквивалентные этим токам, представляют собой участки двух концентричных сфер, имеющих радиусы c_1 и c_2, причем c_1 больше c_2 (рис. 47). Предположим также, что оси обеих оболочек совпадают и что α_1 и α_2 — это углы с вершинами в центре C, опирающиеся на радиус первой оболочки и на радиус второй оболочки соответственно.

Пусть ω_1 — потенциал, создаваемый первой оболочкой в произвольной точке, находящейся на этой же оболочке; тогда работа, необходимая для удаления второй оболочки на бесконечное расстояние, выражается величиной следующего поверхностного интеграла:

$$M = -\iint \frac{d\omega_1}{dr}\,dS,$$

---

[1] Величина телесного угла, опирающегося на окружность, может быть получена более непосредственным путем, а именно:

Телесный угол, опирающийся на окружность, с вершиной в точке Z, находящейся на оси, как легко показать, равен

$$\omega = 2\pi\left(1 - \frac{z - c\cos\alpha}{HZ}\right).$$

Разлагая это выражение по сферическим гармоникам, находим

$$\omega = 2\pi\left\{(\cos\alpha + 1) + (P_1(\alpha)\cos\alpha - P_0(\alpha))\frac{z}{c} + \ldots + (P_i(\alpha)\cos\alpha - P_{i-1}(\alpha))\frac{z^i}{c^i} + \ldots\right\},$$

$$\omega' = 2\pi\left\{(P_0(\alpha)\cos\alpha - P_1(\alpha))\frac{c}{z} + \ldots + (P_i(\alpha)\cos\alpha - P_{i+1}(\alpha))\frac{c^{i+1}}{z^{i+1}} + \ldots\right\},$$

эти разложения ω справедливы для точек на оси при z меньших и больших c соответственно. Легко показать, что эти результаты совпадают с полученными в тексте.

распространенного на всю вторую оболочку. Следовательно,

$$M=\int_{\mu_2}^{1}\frac{d\omega_1}{dr}2\pi c_2^2\,d\mu_2,$$

$$=4\pi^2\sin^2\alpha_1 c_2^2\left\{\frac{1}{c_1}P_1'(\alpha_1)\int_{\mu_2}^{1}P_1(\vartheta)\,d\mu_2+\ldots+\frac{c_2^{i-1}}{c^i}P_i'(\alpha_1)\int_{\mu_2}^{1}P_i(\vartheta)\,d\mu_2+\ldots\right\},$$

или, подставляя значения интегралов из уравнения (2) п. 694,

$$M=4\pi^2\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 c_2\left\{\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}P_1'(\alpha_1)P_1'(\alpha_2)+\ldots+\frac{1}{i(i+1)}\frac{c_2^i}{c_1^i}P_i'(\alpha_1)P_i'(\alpha_2)+\ldots\right\}.$$

697. Предположим теперь, что ось одной из оболочек повернута относительно точки C, взятой за центр, и составляет с осью другой оболочки угол ϑ (рис. 48).

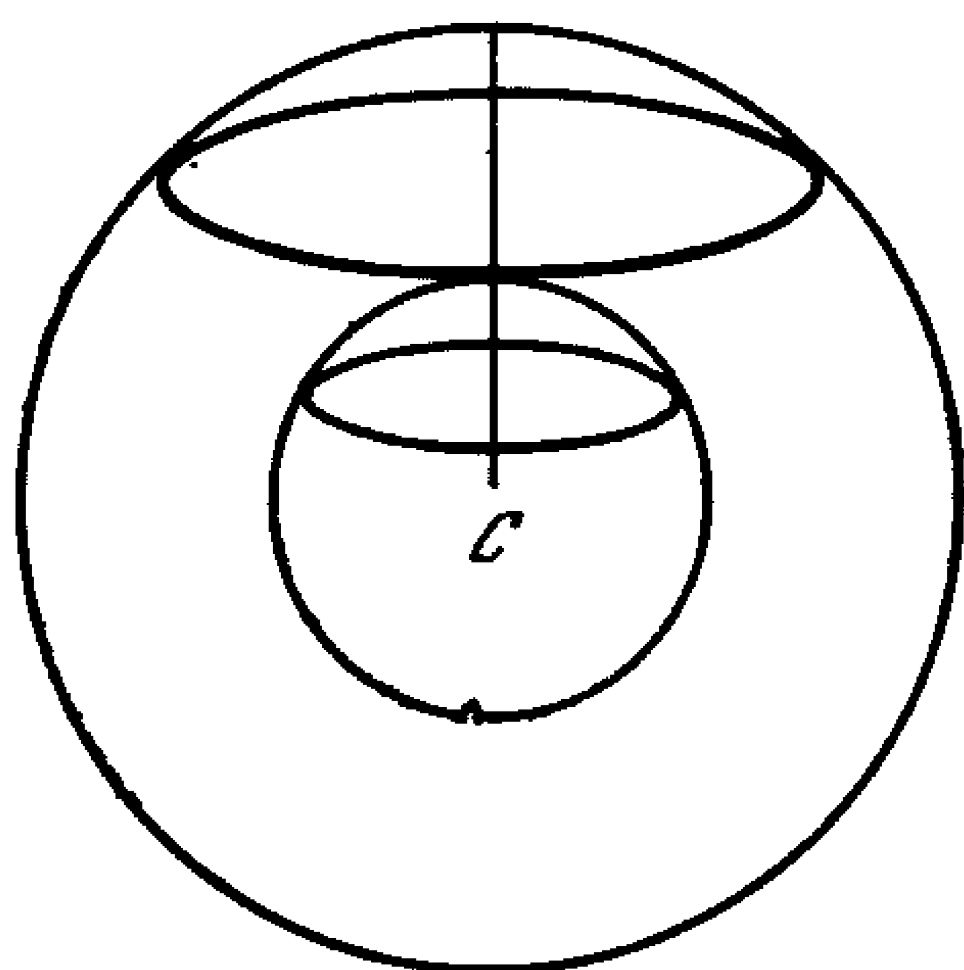


Рис. 47

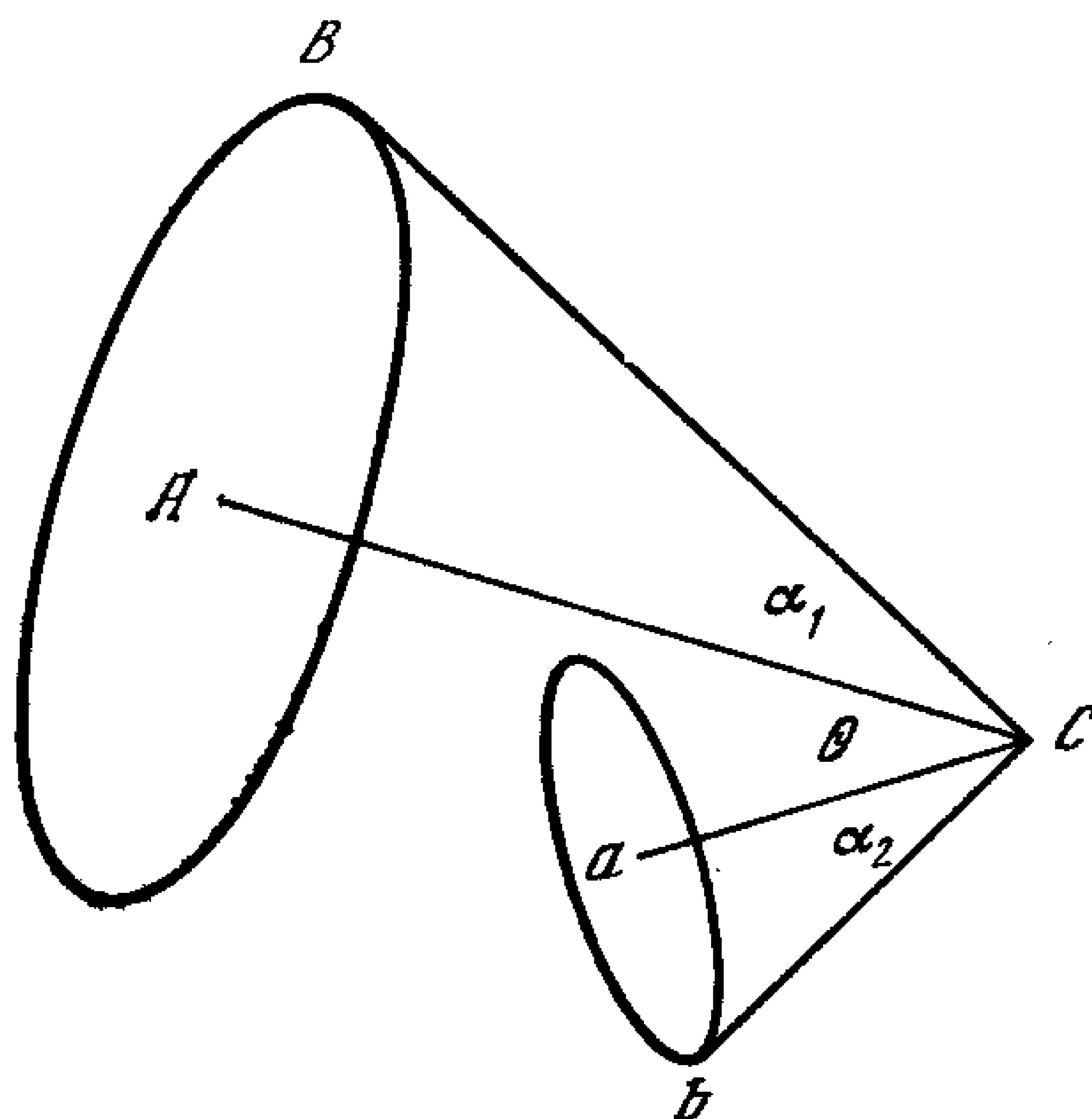


Рис. 48

Нам нужно только ввести в выражение для M зональные гармоники по ϑ, и мы найдем более общую формулу для M:

$$M=4\pi^2\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 c_2^2\left\{\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}P_1'(\alpha_1)P_1'(\alpha_2)P_1(\vartheta)+\ldots+\frac{1}{i(i+1)}\frac{c_2^i}{c_1^i}P_i'(\alpha_1)P_i'(\alpha_2)P_i(\vartheta)\right\}.$$

Это и есть величина потенциальной энергии, обусловленной взаимным действием двух круговых токов единичной силы, расположенных так, что нормали, проходящие через центры кругов, пересекаются друг с другом в точке C под углом ϑ, причем расстояния от периметров окружностей до точки C равны c_1 и c_2, и c_1 больше c_2.

Если какое-то смещение dx меняет значение M, то сила, действующая в направлении этого смещения, есть $X=dM/dx$.

Например, если ось одной из оболочек может свободно вращаться вокруг точки C, вызывая изменение ϑ, то момент силы, стремящийся увеличить ϑ, равен Θ, где $\Theta=dM/d\vartheta$.

Выполняя дифференцирование и помня, что

$$\frac{dP_i(\vartheta)}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\, P_i'(\vartheta),$$

где P_i' имеет тот же смысл, что и в предыдущих уравнениях, получим

$$\Theta = -4\pi^2 \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \sin\vartheta\, c_2 \left\{ \frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1'(\alpha_2) P_1'(\vartheta) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) P_i'(\alpha_2) P_i'(\vartheta) \right\}.$$

698. В связи с тем что в этих вычислениях часто встречаются величины P_i', может оказаться полезной следующая таблица выражений для функций P_i' первых шести порядков; в этой таблице вместо $\cos\vartheta$ фигурирует μ и ν вместо $\sin\vartheta$:

$$P_1' = 1,$$

$$P_2' = 3\mu,$$

$$P_3' = \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1) = 6\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\nu^2\right),$$

$$P_4' = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 10\mu\left(\mu^2 - \frac{3}{4}\nu^2\right),$$

$$P_5' = \frac{15}{8}(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) = 15\left(\mu^4 - \frac{3}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{1}{8}\nu^4\right),$$

$$P_6' = \frac{21}{8}\mu(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5) = 21\mu\left(\mu^4 - \frac{5}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{5}{8}\nu^4\right).$$

699. Иногда удобно представить ряды для M как функции некоторых «линейных» величин следующим образом.

Пусть a — радиус малого контура, b — расстояние от начала координат до плоскости контура и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пусть A, B и C — соответствующие величины для большого контура.

Тогда ряды для M могут быть записаны в виде

$$M = 1.2.\pi^2 \frac{A^2}{C^3} a^2 \cos\vartheta + 2.3.\pi^2 \frac{A^2 B}{C^5} a^2 b \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right) +$$

$$+ 3.4.\pi^2 \frac{A^2\left(B^2 - \frac{1}{4}A^2\right)}{C^7} a^2 \left(b^2 - \frac{1}{4}a^2\right)\left(\cos^3\vartheta - \frac{3}{2}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) + \ldots .$$

Если положить $\vartheta = 0$, то две окружности будут параллельными и будут иметь общую ось. Для того чтобы определить притяжение между ними, мы можем продифференцировать M по b. В результате найдем

$$\frac{dM}{db} = \pi^2 \frac{A^2 a^2}{C^4} \left\{ 2.3\frac{B}{C} + 2.3.4 \frac{B^2 - \frac{1}{4}A^2}{C^3} b + \ldots \right\}.$$

700. Чтобы вычислить действие катушки прямоугольного сечения, мы должны найденное выражение проинтегрировать по радиусу катушки A и по расстоянию

B от ее плоскости до начала координат, распространив интегрирование на всю ширину и высоту катушки.

В некоторых случаях непосредственное интегрирование наиболее удобно, однако существуют и другие случаи, когда к более полезным результатам приводит следующий метод аппроксимации.

Пусть P — произвольная функция x и y, требуется найти значение $\overline{P}$, где

$$\overline{P}_{xy} = \int\limits_{-\frac{1}{2}x}^{+\frac{1}{2}x} \int\limits_{-\frac{1}{2}y}^{+\frac{1}{2}y} P\,dx\,dy.$$

В этом выражении $\overline{P}$ есть среднее значение P внутри пределов интегрирования.

Обозначим через P_0 значение P при $x=0$ и $y=0$, тогда, разлагая P по теореме Тейлора, получим

$$P = P_0 + x\frac{dP_0}{dx} + y\frac{dP_0}{dy} + \frac{1}{2}x^2\frac{d^2P_0}{dx^2} + \ldots .$$

Проинтегрировав это выражение в прежних пределах и разделив результат на xy, мы получим для $\overline{P}$:

$$\overline{P} = P_0 + \frac{1}{24}\left(x^2\frac{d^2P_0}{dx^2} + y^2\frac{d^2P_0}{dy^2}\right) + \frac{1}{1920}\left(x^4\frac{d^4P_0}{dx^4} + y^4\frac{d^4P_0}{dy^4}\right) + \frac{1}{576}x^2y^2\frac{d^4P_0}{dx^2\,dy^2} + \ldots .$$

Рассмотрим катушку, у которой внешний и внутренний радиусы соответственно равны $A+\xi/2$ и $A-\xi/2$, а расстояние плоскостей намотки до начала координат лежит в пределах от $B+\eta/2$ до $B-\eta/2$. В этом случае ширина катушки равна η, ее глубина — ξ; пусть эти величины малы по сравнению с A или C.

Для того чтобы подсчитать магнитное действие данной катушки, мы можем выписать последовательные члены рядов (6) и (6′) п. 695 в следующем виде:

$$G_0 = \pi\frac{B}{C}\left(1 + \frac{1}{24}\frac{2A^2-B^2}{C^4}\xi^2 - \frac{1}{8}\frac{A^2}{C^4}\eta^2 + \ldots\right),$$

$$G_1 = 2\pi\frac{A^2}{C^3}\left\{1 + \frac{1}{24}\left(\frac{2}{A^2} - 15\frac{B^2}{C^4}\right)\xi^2 + \frac{1}{8}\frac{4B^2-A^2}{C^4}\eta^2 + \ldots\right\},$$

$$G_2 = 3\pi\frac{A^2B}{C^5}\left\{1 + \frac{1}{24}\left(\frac{2}{A^2} - \frac{25}{C^2} + \frac{35A^2}{C^4}\right)\xi^2 + \frac{5}{24}\frac{4B^2-3A^2}{C^4}\eta^2 + \ldots\right\},$$

$$G_3 = 4\pi\frac{A^2\left(B^2-\frac{1}{4}A^2\right)}{C^7} + \frac{\pi}{24}\frac{\xi^2}{C^{11}}\{C^4(8B^2-12A^2) + 35A^2B^2(5A^2-4B^2)\} +$$
$$+\frac{5}{8}\frac{\pi\eta^2}{C^{11}}A^2\{A^4 - 12A^2B^2 + 8B^4\},$$

$\ldots, \ldots,$

$$g_1 = \pi a^2 \qquad\qquad + \frac{1}{12}\pi\xi^2$$
$$g_2 = 2\pi a^2 b \qquad\qquad + \frac{1}{6}\pi b\xi^2,$$
$$g_3 = 3\pi a^2\left(b^2 - \frac{1}{4}a^2\right) + \frac{\pi}{8}\xi^2(2b^2 - 3a^2) + \frac{\pi}{4}\eta^2 a^2,$$
$$\ldots, \ldots .$$

Величины G_0, G_1, G_2, . . . относятся к большой катушке. Значение ω для точек, где r меньше C, равно

$$\omega = -2\pi + 2G_0 - G_1 r P_1(\vartheta) - G_2 r^2 P_2(\vartheta) - \ldots .$$

Величины g_1, g_2, . . . относятся к малой катушке. Значения ω' в точках, где r больше C, равны

$$\omega' = g_1 \frac{1}{r^2} P_1(\vartheta) + g_2 \frac{1}{r^3} P_2(\vartheta) + \ldots .$$

Потенциал одной из этих катушек по отношению к другой в том случае, когда общий ток, протекающий через сечение каждой катушки, равен единице, следующий

$$M = G_1 g_1 P_1(\vartheta) + G_2 g_2 P_2(\vartheta) + \ldots .$$

Как найти M через эллиптические интегралы

701. Когда расстояние между периметрами двух кругов соизмеримо с радиусом меньшего из них, приведенные здесь ряды не сходятся достаточно быстро. В любом случае, однако, мы можем найти выражение M для двух параллельных окружностей через эллиптические интегралы.

Действительно, пусть b — длина линии, соединяющей центры окружностей, пусть эта линия перпендикулярна плоскостям обеих окружностей и пусть A и a — радиусы окружностей; тогда

$$M = \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

где интегрирование проводится по обеим замкнутым кривым.

В этом случае

$$r^2 = A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\varphi - \varphi'), \qquad \varepsilon = \varphi - \varphi', \quad ds = a\, d\varphi, \quad ds' = A\, d\varphi',$$

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Aa\cos(\varphi - \varphi')\, d\varphi\, d\varphi'}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\varphi - \varphi')}} = -4\pi\sqrt{Aa}\left\{\left(c - \frac{2}{c}\right)F + \frac{2}{c}E\right\},$$

где $c = \dfrac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + b^2}}$, а F и E — полные эллиптические интегралы модуля c.

Отсюда, помня, что

$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{c(1 - c^2)}\{E - (1 - c^2)F\}, \quad \frac{dE}{dc} = \frac{1}{c}(E - F)$$

и что c есть функция b, мы находим

$$\frac{dM}{db}=\frac{\pi}{\sqrt{Aa}}\frac{bc}{1-c^2}\{(2-c^2)E-2(1-c^2)F\}.$$

Если обозначить через r_1 и r_2 наибольшее и наименьшее значения r, т. е. $r_1^2=(A+a)^2+b^2$, $r_2^2=(A-a)^2+b^2$,
и через γ — угол, у которого $\cos\gamma=r_2/r_1$, то

$$\frac{dM}{db}=-\pi\frac{b\sin\gamma}{\sqrt{Aa}}\{2F_\gamma-(1+\sec^2\gamma)E_\gamma\},$$

где F_γ и E_γ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, модули которых равны $\sin\gamma$.

Если $A=a$, то $\operatorname{ctg}\gamma=b/2a$ и

$$\frac{dM}{db}=-2\pi\cos\gamma\{2F_\gamma-(1+\sec^2\gamma)E_\gamma\}.$$

Величина — dM/db характеризует притяжение двух параллельных круговых контуров, в каждом из которых сила тока равна единице.

Ввиду важности величины M для электромагнитных вычислений значения $\lg(M/4\pi\sqrt{Aa})$, являющегося функцией c и, следовательно, только γ, протабулированы в интервале углов γ от 60 до 90 градусов через 6′.

Второе выражение для М

Другое выражение для M, иногда более удобное, получается, если положить $c_1=(r_1-r_2)/(r_1+r_2)$; в этом случае

$$M=8\pi\sqrt{Aa}\frac{1}{\sqrt{c_1}}\{F(c_1)-E(c_1)\}.$$

Как проводить линии магнитной силы для кругового тока

702. Линии магнитной силы лежат, очевидно, в плоскостях, проходящих через ось окружности; вдоль каждой из этих линий величина M постоянна.

Вычислим величину $K_\vartheta=\dfrac{\sin\vartheta}{(F_{\sin\vartheta}-E_{\sin\vartheta})^2}$ из таблицы Лежандра для достаточно большого числа значений ϑ.

Нанесем на листе бумаги оси прямоугольной системы координат x и z; построим окружность с центром в точке $x=(a/2)(\sin\vartheta+\operatorname{cosec}\vartheta)$ с радиусом $(a/2)\cdot(\operatorname{cosec}\vartheta-\sin\vartheta)$. Для всех точек этой окружности величина c_1 будет равна $\sin\vartheta$. Следовательно, для всех точек этой окружности

$$M=8\pi\sqrt{Aa}\frac{1}{\sqrt{K_\vartheta}},\qquad A=\frac{1}{64\pi^2}\frac{M^2K_\vartheta}{a}.$$

Теперь A является тем значением x, для которого была найдена величина M. Таким образом, если мы проведем линию, на которой $x=A$, она пересечет окружность в двух точках, имеющих заданное значение M.

Задавая последовательно значения величины M, меняющиеся по закону арифметической прогрессии, для A получим последовательность квадратов. Поэто-

му рисуя, семейство линий, параллельных z, на которых x принимает найденные значения A, мы получим, что точки, в которых эти линии пересекаются с окружностью, будут именно теми точками, в которых эту окружность пересекают соответствующие линии силы.

Если положить $m=8\pi a$ и $M=nm$, то $A=x=n^2K_\vartheta a$.

Величину n мы можем назвать индексом линии силы.

Вид этих линий показан на рис. XVIII в конце тома. Они воспроизведены с рисунков, данных сэром У. Томсоном в его статье о «Вихревом движении» [2].

703. Если положение окружности, ось которой известна, считать заданным через расстояние b от ее центра до какой-либо фиксированной точки на оси и через ее радиус a, то коэффициент индукции M окружности по отношению к произвольной системе, состоящей из магнитов или токов, подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{d^2M}{da^2}+\frac{d^2M}{db^2}-\frac{1}{a}\frac{dM}{da}=0. \tag{1}$$

Чтобы доказать это, посмотрим, какое число линий магнитной силы будет пересекать окружность, если менять a или b.

(1). Пусть a становится равным $a+\delta a$, а b остается постоянным. При такой вариации окружность, расширяясь, прочертит в своей плоскости кольцевую площадку шириной δa.

Если через V обозначить магнитный потенциал в произвольной точке, а ось y направить параллельно оси окружности, то магнитная сила, перпендикулярная плоскости кольца, будет равна $-dV/dy$.

Для того чтобы найти поток магнитной индукции через эту кольцевую поверхность, мы должны взять интеграл $-\int\limits_0^{2\pi} a\delta a\frac{dV}{dy}d\vartheta$, где ϑ есть угловое положение точки на кольце.

Но эта величина представляет собой вариацию M, обусловленную изменением a, т. е. $(dM/da)\,\delta a$. Отсюда

$$\frac{dM}{da}=-\int\limits_0^{2\pi} a\,\frac{dV}{dy}\,d\vartheta. \tag{2}$$

(2). Пусть b принимает значение $b+\delta b$, а a остается постоянным. При такой вариации окружность прочерчивает цилиндрическую поверхность радиуса a длиной δb.

Магнитная сила, перпендикулярная к этой поверхности, равна в любой точке величине $-dV/dr$, где r — расстояние от оси.

Отсюда

$$\frac{dM}{db}=\int\limits_0^{2\pi} a\,\frac{dV}{dr}\,d\vartheta. \tag{3}$$

[2] *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXV, p. 217 (1869).

Дифференцируя уравнение (2) по a и уравнение (3) по b, получаем

$$\frac{d^2M}{da^2} = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{dV}{dy}\, d\vartheta - \int\limits_0^{2\pi} a\, \frac{d^2V}{dr\, dy}\, d\vartheta, \qquad (4)$$

$$\frac{d^2M}{db^2} = \int\limits_0^{2\pi} a\, \frac{d^2V}{dr\, dy}\, d\vartheta. \qquad (5)$$

Следовательно,

$$\frac{d^2M}{da^2} + \frac{d^2M}{db^2} = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{dV}{dy}\, d\vartheta = -\frac{1}{a}\frac{dM}{da}, \quad \text{согласно (2)}. \qquad (6)$$

Перенося последний член в левую часть, мы получаем уравнение (1).

Коэффициент индукции двух параллельных окружностей в случае, когда расстояние между их дугами мало по сравнению с радиусами обеих окружностей

704. Для этого случая мы могли бы получить величину M из разложения приведенных выше эллиптических интегралов при близких к единице значениях их модуля. Однако метод, который последует далее, представляет собой более непосредственное применение электрических принципов.

Первое приближение

Пусть радиусы окружностей равны a и $a+c$, а расстояние между их плоскостями равно b; тогда кратчайшее расстояние между дугами окружностей равно $r=\sqrt{c^2+b^2}$.

Мы должны найти поток магнитной индукции сквозь одну из окружностей, обусловленный единичным током, протекающим по другой окружности.

Мы начнем с предположения, что обе окружности лежат в одной плоскости. Рассмотрим малый элемент δs окружности, радиус которой равен $a+c$. В точке, находящейся в плоскости окружности на расстоянии ρ от середины δs и в направлении, образующим с направлением δs угол ϑ, магнитная сила, обусловленная элементом δs, перпендикулярна плоскости окружности и равна $(1/\rho^2)\sin\vartheta\,\delta s$.

Чтобы вычислить поверхностный интеграл от этой силы по поверхности, лежащей внутри окружности радиуса a, мы должны найти значение интеграла

$$2\delta s \int\limits_{\vartheta_1}^{\pi/2} \int\limits_{r_2}^{r_1} \frac{\sin\vartheta}{\rho}\, d\vartheta\, d\rho,$$

где r_1 и r_2 являются корнями уравнения

$$r^2 - 2(a+c)\sin\vartheta\, r + c^2 + 2ac = 0,$$

а именно

$$r_1=(a+c)\sin\vartheta+\sqrt{(a+c)^2\sin^2\vartheta-c^2-2ac},$$
$$r_2=(a+c)\sin\vartheta-\sqrt{(a+c)^2\sin^2\vartheta-c^2-2ac}$$

и

$$\sin^2\vartheta_1=\frac{c^2+2ac}{(c+a)^2}.$$

Когда c мало по сравнению с a, мы можем положить

$$r_1=2a\sin\vartheta, \qquad r_2=c/\sin\vartheta.$$

Интегрируя по ρ, имеем

$$2\delta s\int_{\vartheta_1}^{\frac{1}{2}\pi}\ln\left(\frac{2a}{c}\sin^2\vartheta\right)\cdot\sin\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=2\delta s\left[\cos\vartheta\left\{2-\ln\left(\frac{2a}{c}\sin^2\vartheta\right)\right\}+2\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right]_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}}=2\delta s\left(\ln\frac{8a}{c}-2\right) \quad \text{(приближенно)}.$$

Таким образом, для всей индукции получаем

$$M_{ac}=4\pi a\left(\ln\frac{8a}{c}-2\right).$$

Так как магнитная сила в произвольной точке, расстояние от которой до искривленного провода мало по сравнению с его радиусом кривизны, приблизительно такая же, что и магнитная сила прямого провода, мы можем (п. 684) подсчитать разность между потоком индукции через окружность радиуса $a-c$ и окружность A по формуле

$$M_{aA}-M_{ac}=4\pi a\{\ln c-\ln r\}.$$

Откуда приближенно при условии, что радиус r мал по сравнению с a, находим величину потока индукции между A и a:

$$M_{Aa}=4\pi a(\ln 8a-\ln r-2).$$

705. Поскольку взаимная индукция между двумя витками одной и той же катушки представляет собой весьма важную величину для расчетов экспериментальных результатов, я опишу сейчас метод, с помощью которого приближение к M для данного случая может быть осуществлено с любой требуемой степенью точности.

Мы будем предполагать, что величина M представлена в виде

$$M=4\pi\left\{A\ln\frac{8a}{r}+B\right\},$$

где

$$A=a+A_1x+A_2\frac{x^2}{a}+A_2'\frac{y^2}{a}+A_3\frac{x^3}{a^2}+A_3'\frac{xy^2}{a^2}+\ldots$$
$$+a^{-(n-1)}\{x^nA_n+x^{n-2}y^2A_n'+x^{n-4}y^4A_n''+\ldots\}+\ldots$$

и

$$B=-2a+B_1x+B_2\frac{x_2}{a}+B_2'\frac{y^2}{a}+B_3\frac{x^3}{a^2}+B_3'\frac{xy^2}{a^2}+\ldots,$$

a и $a+x$ — радиусы окружностей, а y — расстояние между их плоскостями.

Нам нужно определить значения коэффициентов A и B. Очевидно, что они могут содержать только четные степени y, потому что при изменении знака y величина M должна остаться неизменной.

Другой набор условий мы получаем из свойства взаимности коэффициента индукции, который остается тем же самым независимо от того, какую из окружностей мы берем в качестве первичной. Поэтому величина M должна остаться той же самой, когда в приведенных выше выражениях мы подставим $a+x$ вместо a и $-x$ вместо x.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых сочетаниях x и y, мы находим таким способом следующие условия взаимности:

$$A_1=1-A_1, \qquad B_1=1-2-B_1$$

$$A_3=-A_2-A_3, \qquad B_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A_1+A_2-B_2-B_3,$$

$$A_3'=-A_2'-A_3', \qquad B_3'=A_2'-B_2'-B_3';$$

$$(-)^nA_n=A_2+(n-2)A_3+\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}A_4+\ldots+A_n,$$

$$(-)^nB_n=-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}A_1-\frac{1}{n-2}A_2+\ldots+(-)^nA_{n-1}+$$
$$+B_2+(n-2)B_3+\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}B_4+\ldots+B_n.$$

Из общего уравнения для M, п. 703,

$$\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{d^2M}{dy^2}-\frac{1}{a+x}\frac{dM}{dx}=0$$

мы получаем другой ряд условий:

$$2A_2+2A_2'=A_1, \quad 2A_2+2A_2'+6A_3+2A_3'=2A_2;$$

$$n(n-1)A_n+(n+1)nA_{n+1}+1\cdot 2A_n'+1\cdot 2A_{n+1}'=nA_n,$$

$$(n-2)(n-3)A_n'+(n-1)(n-2)A_{n+1}'+3\cdot 4A_n''+3\cdot 4A_{n+1}''=(n-2)A_n', \ \ldots;$$

$$4A_2+A_1=2B_2+2B_2'-B_1=4A_2',$$

$$6A_3+3A_2=2B_2'+6B_3+2B_3'=6A_3'+3A_2',$$

$$(2n-1)A_n+(2n+2)A_{n+1}=(2n-1)A_n'+(2n+2)A_{n+1}'=$$
$$=n(n-2)B_n+(n+1)nB_{n+1}+1\cdot 2B_n'+1\cdot 2B_{n+1}'.$$

Решая эти уравнения и подставляя значения коэффициентов, мы приводим ряд для M к виду

$$M=4\pi a\ln\frac{8a}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{x^2+3y^2}{16a^2}-\frac{x^3+3xy^2}{32a^3}+\ldots\right\}+$$
$$+4\pi a\left\{-2-\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{3x^2-y^2}{16a^2}-\frac{x^3-6xy^2}{48a^3}+\ldots\right\}.$$

Как найти форму катушки, у которой при заданной длине и толщине провода коэффициент самоиндукции максимален

706. Опуская поправки, приведенные в п. 705, мы в соответствии с результатами п. 693 находим

$$L=4\pi n^2 a[\ln(8a/R)-2],$$

где n — число витков провода, a — средний радиус катушки, R — среднегеометрическое расстояние поперечного сечения катушки от самого себя, см. п. 691. Если это сечение всюду подобно самому себе, то расстояние R пропорционально его линейным размерам, а n меняется как R^2.

Так как полная длина провода равна $2\pi an$, то a меняется обратно пропорционально n. Следовательно,

$$\frac{dn}{n}=2\frac{dR}{R} \quad \text{и} \quad \frac{da}{a}=-2\frac{dR}{R},$$

и мы находим условие, при котором L может иметь максимум:

$$\ln\frac{8a}{R}=\frac{7}{2}.$$

Если катушка имеет круговое поперечное сечение радиуса c, то, согласно п. 692, $\ln(R/c)=-(1/4)$ и $\ln(8a/c)=(13/4)$, откуда $a=3{,}22\,c$, или, для того чтобы такая катушка имела максимальный коэффициент самоиндукции, ее средний радиус должен превышать радиус поперечного сечения катушки в 3,22 раза. Этот результат был получен Гауссом [3].

Если каркас, на который наматывается катушка, имеет квадратное поперечное сечение, средний диаметр катушки должен в 3,7 раз превышать сторону квадрата.

ГЛАВА XV

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРИБОРЫ

Гальванометры

707. Гальванометр — это прибор, позволяющий регистрировать или измерят электрический ток по его магнитному действию.

Когда этот прибор предназначен для обнаружения существования слабого тока, его называют чувствительным гальванометром.

Когда он предназначен для измерения тока в стандартных единицах с максимальной точностью, его называют эталонным гальванометром.

Все гальванометры основаны на принципе Швайгеровского умножителя (Schweigger's Multiplier), в котором ток пропускается через провод, намотанный таким образом, чтобы он многократно проходил вокруг некоторой открытой области пространства, где подвешен магнит, и создавал в этой области электромагнитную силу, интенсивность которой измеряется при помощи магнита.

[3] *Werke*, Göttingen edition, 1867, Bd. V, p. 622.

У чувствительных гальванометров катушка устроена таким образом, что ее витки занимают положение, при котором они максимально воздействуют на магнит. Поэтому витки укладываются плотно друг к другу, чтобы быть ближе к магниту.

Эталонные гальванометры конструируются так, чтобы размеры и относительное положение всех неподвижных частей были бы точно известны, а небольшие неточности в определении положения подвижных частей вносили бы в расчеты возможно меньшую ошибку.

При создании чувствительного гальванометра мы стремимся сделать поле магнитной силы, в которое подвешивается магнит, по возможности более интенсивным. При конструировании эталонного гальванометра мы хотим сделать поле электромагнитной силы около магнита как можно более однородным и должны знать точное значение его интенсивности при заданной силе тока в катушке.

Об эталонных гальванометрах

708. В эталонном гальванометре сила тока должна быть определена через силу, с которой он воздействует на подвешенный магнит. Но распределение магнетизма внутри магнита, равно как и положение его центра в подвешенном состоянии, не могут быть установлены со сколько-нибудь высокой степенью точности. Поэтому необходимо сконструировать катушку так, чтобы она создавала поле силы, очень близкое к однородному во всей той области, где может находиться магнит при возможных перемещениях. Следовательно, размеры катушки должны в общем случае значительно превышать размеры магнита.

При надлежащем размещении нескольких катушек можно создать внутри них существенно более однородное поле силы, чем при использовании только одной катушки; при этом и размеры прибора могут быть уменьшены, и его чувствительность повышена. Однако ошибки в измерении линейных размеров вносят большую неопределенность в значения электрических постоянных малых приборов, нежели больших. Поэтому лучше определять электрические постоянные небольших приборов не путем непосредственного измерения их размеров, а при электрическом сравнении с большими эталонными приборами, для которых размеры известны более точно, см. п. 752.

Во всех эталонных гальванометрах используются круглые катушки. Каркас, на который должна быть намотана катушка, вытачивается очень тщательно. Его ширина делается равной некоторому целому числу n диаметров провода с покрытием. В боковой стенке каркаса просверливается отверстие для ввода провода; через это отверстие пропускается один конец провода, образующий внутреннее сочленение к катушке. К каркасу прикрепляется деревянная ось, и он помещается в токарный станок, см. рис. 49. К деревянной оси в той же части периметра, где вводится провод, прикрепляется конец длинной нити. Все это затем приводится во вращение, и провод плавно и ровно укладывается на дно каркаса до тех пор, пока оно полностью не покроется n витками. При этом нить тоже n раз намотается на деревянную ось; на ее n-м витке вбивается гвоздик.

Витки нити следует наматывать так, чтобы их легко было сосчитать. После этого замеряется внешний периметр первого слоя намотки и начинается новый слой, и так до тех пор, пока не будет намотано нужное число слоев. Назначение

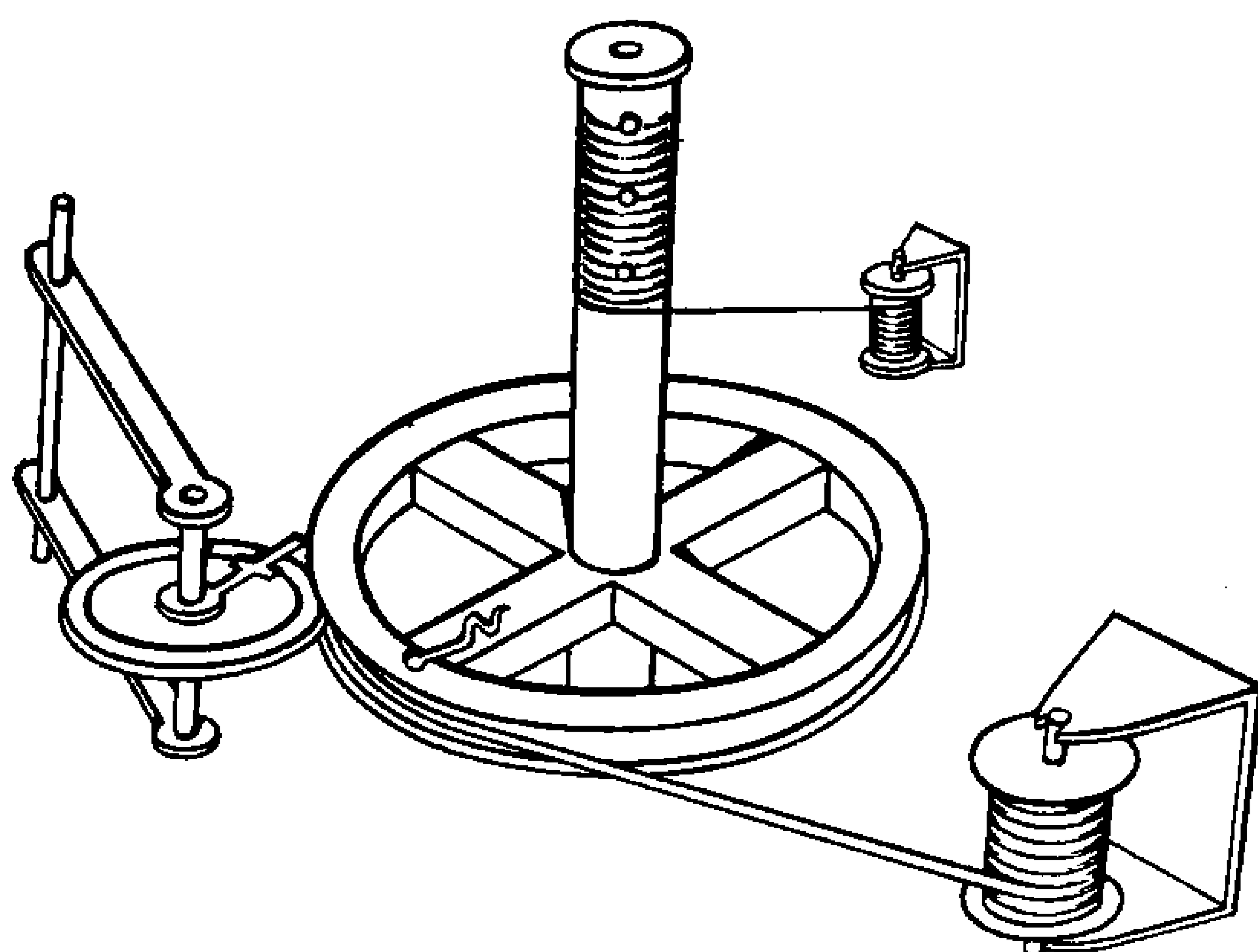


Рис. 49

нити состоит в том, чтобы можно было сосчитать число витков. Если по какой-то причине мы должны размотать часть катушки, то нить тоже разматывается, и мы не потеряем счет действительному числу витков катушки. Гвоздики служат для того, чтобы различать число витков в каждом слое.

Измерение периметра каждого слоя контролирует регулярность намотки и позволяет вычислять электрические постоянные катушки. Действительно, если взять среднее арифметическое от периметра каркаса и внешнего слоя и добавить к нему периметры всех промежуточных слоев, а затем разделить сумму на число слоев, то получится средний периметр, откуда можно получить величину среднего радиуса катушки. Периметр каждого слоя можно измерить с помощью стальной рулетки, а еще лучше — с помощью градуированного колесика, которое катится по катушке, когда она поворачивается в процессе намотки. Цена делений на рулетке или на колесике должна быть установлена путем сравнения с прямолинейной шкалой.

709. Момент силы, с которой единичный ток в катушке воздействует на подвешенную часть аппаратуры, можно выразить в виде ряда

$$G_1 g_1 \sin\vartheta + G_2 g_2 \sin\vartheta P_2'(\vartheta) + \ldots,$$

где коэффициенты G относятся к катушке, коэффициенты g — к подвешенной аппаратуре, ϑ — угол между осью катушки и осью подвешенной аппаратуры, см. п. 700.

Если подвешенная часть аппаратуры представляет собой длинный стержневой магнит длиной $2l$, однородно намагниченный в продольном направлении с единичной мощностью и прикрепленный к подвесу за середину, то $g_1=2l$, $g_2=0$, $g_3=2l^3$, ... Значения этих коэффициентов для стержневого магнита длины $2l$, намагниченного любым другим способом, оказываются меньшими, чем при однородном намагничении.

710. Если прибор используется как тангенс-гальванометр, то катушка закрепляется таким образом, чтобы плоскость ее была вертикальна и параллельна направлению земной магнитной силы. Уравнение равновесия магнита в этом случае

$$mg_1 H \cos\vartheta = m\gamma \sin\vartheta \{G_1 g_1 + G_2 g_2 P_2'(\vartheta) + \ldots\},$$

где mg_1 — магнитный момент магнита, H — горизонтальная составляющая земной магнитной силы, γ — сила тока в катушке. Когда длина магнита мала по сравнению с радиусом катушки, то всеми членами по G и g после первого можно пренебречь, и мы находим $\gamma = (H/G_1)\operatorname{ctg}\vartheta$.

Обычно измеряется угол отклонения магнита δ, который является дополнительным к ϑ, так что $\operatorname{ctg}\vartheta=\operatorname{tg}\delta$.

Ток, таким образом, пропорционален тангенсу угла отклонения, поэтому прибор называют тангенс-гальванометром.

При другом методе все устройство может вращаться вокруг вертикальной оси; его поворачивают до тех пор, пока магнит не окажется в равновесии, при котором его ось параллельна плоскости катушки. Если угол между плоскостью катушки и магнитным меридианом равен δ, то уравнение равновесия следующее:

$$mg_1H\sin\delta=m\gamma\left\{G_1g_1-\frac{3}{2}G_3g_3+\ldots\right\},$$

откуда $\gamma=\dfrac{H}{(G_1-\ldots)}\sin\delta$.

Поскольку ток измеряется через синус угла отклонения, то прибор, используемый в таком режиме, называется синус-гальванометром.

Метод синусов может быть применен лишь в том случае, когда ток меняется настолько плавно, что его можно считать постоянным в течение всего времени регулировки прибора и установления магнита в равновесии.

711. Теперь нам надо рассмотреть устройство катушек эталонного гальванометра.

Простейшим является гальванометр, в котором имеется лишь одна катушка, а в центре ее подвешен магнит.

Пусть A — средний радиус катушки, ξ — ее высота, η — ширина, а n — число витков; тогда значения коэффициентов равны

$$G_1=\frac{2\pi n}{A}\left\{1+\frac{1}{12}\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{1}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right\},\qquad G_2=0.$$

$$G_3=-\frac{\pi n}{A^3}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{5}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right\},\qquad G_4=0,\ \ldots.$$

Основная поправка возникает из-за G_3. Ряд $G_1g_1+G_3g_3P_3'(\vartheta)$ п риближенн принимает вид

$$G_1g_1\left(1-3\frac{1}{A^2}\frac{g_3}{g_1}\left(\cos^2\vartheta-\frac{1}{4}\sin^2\vartheta\right)\right).$$

Когда магнит намагничен однородно и $\vartheta=0$, поправочный множитель сильнее всего отличается от единицы. В этом случае он равен $1-3(l^2/A^2)$. При $\operatorname{tg}\vartheta=2$, т. е. когда угол отклонения равен $\operatorname{arctg}(1/2)$, или 26°34′, этот множитель обращается в нуль. Поэтому некоторые экспериментаторы проводят свои опыты так, чтобы сделать наблюдаемое отклонение максимально близким к этому углу. Однако самый лучший метод состоит в использовании такого короткого по сравнению с радиусом катушки магнита, что можно вообще пренебречь всеми поправками.

Подвешенный магнит тщательно устанавливается так, чтобы центр его как можно точнее совпадал с центром катушки. Если, однако, регулировка несовершенна и координаты центра магнита относительно центра катушки равны

x, y, z (z измеряется параллельно оси катушки), то корректирующий множитель равен

$$\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{A^2}\right).$$

Для катушки большого радиуса при тщательно проведенной установке магнита мы можем считать эти поправки неощутимыми.

Прибор Гогейна (Gaugain)

712. Чтобы избавиться от поправок, связанных с величиной G_3, Гогейн сконструировал такой гальванометр, для которого этот член уменьшается до нуля; это достигается путем подвешивания магнита не в центре катушки, а в точке ее оси, отстоящей от центра на половину радиуса катушки. Формула для G_3 такова:

$$G_3=4\pi\frac{A^2\left(B^2-\frac{1}{4}A^2\right)}{C^7},$$

и поскольку для этой конструкции $B=A/2$, то $G_3=0$.

Эта конструкция могла бы считаться улучшенной по сравнению с предыдущей, если бы мы были уверены в том, что центр подвешенного магнита находится точно в найденной таким образом точке. Однако положение центра магнита всегда обладает некоторой неопределенностью, и эта неопределенность вводит корректирующий множитель неизвестной величины, зависящий от G_2 вида $\left(1-\frac{6}{5}\frac{z}{A}\right)$, где z — неизвестное превышение расстояния центра магнита от плоскости катушки. Эта поправка зависит от первой степени z/A. Таким образом, катушка Гогейна с эксцентрически подвешенным магнитом подвержена гораздо большим неточностям, чем прежняя конструкция.

Прибор Гельмгольца

713. Гельмгольц преобразовал гальванометр Гогейна в более надежный прибор, поместив на том же расстоянии по другую сторону от магнита вторую катушку, одинаковую с первой.

Размещая эти катушки симметрично по обе стороны от магнита, мы сразу же избавляемся от всех членов четного порядка.

Пусть A — средний радиус любой из катушек; расстояние между их средними плоскостями также берется равным A. Магнит подвешивается в средней точке их общей оси. Коэффициенты равны:

$$G_1=\frac{16\pi n}{5\sqrt{5}}\,\frac{1}{A}\left(1-\frac{1}{60}\,\frac{\xi^2}{A^2}\right),$$

$$G_2=0,\qquad G_3=0{,}0512\frac{\pi n}{3\sqrt{5}\,A^5}\,(31\xi^2-36\eta^2),$$

$$G_4=0,\qquad G_5=-0{,}73728\frac{\pi n}{\sqrt{5}\,A^5},$$

где n обозначает число витков в обеих катушках, вместе взятых.

Из этих результатов следует, что если каркас катушки с намоткой по φ имеет прямоугольное сечение высотой ξ и шириной η, то величина G_3 с учетом по-

правки на конечные размеры сечения будет малой, а при отношении ξ^2 к η^2, равном 36 к 31, она обращается в ноль.

Поэтому совсем не обязательно стараться наматывать катушку на коническую поверхность, как это делалось некоторыми изготовителями приборов, ибо соответствующим условиям можно удовлетворить с помощью катушек прямоугольного сечения, которые могут быть изготовлены с гораздо большей точностью, чем катушки, намотанные на конус с широким раствором.

Расположение катушек в двойном гальванометре Гельмгольца представлено на рис. 53 в п. 725.

Поле силы, создаваемое двойной катушкой в плоскости ее сечения, представлено на рис. XIX в конце данного тома.

Четырехкатушечный гальванометр

714. Комбинируя четыре катушки, можно избавиться от коэффициентов G_2, G_3, G_4, G_5 и G_6. При любой симметричной комбинации мы избавляемся от коэффициентов четных порядков. Пусть четыре катушки будут параллельны окружностям, принадлежащими одной и той же сфере, а соответствующие им углы равны ϑ, φ, $\pi-\varphi$ и $\pi-\vartheta$.

Пусть число витков в первой и четвертой катушках равно n, а во второй и третьей — pn. Тогда условие того, что для этой комбинации $G_2=0$, дает

$$n\sin^2\vartheta P_3'(\vartheta)+pn\sin^2\varphi P_3'(\varphi)=0, \tag{1}$$

а условие того, что $G_5=0$, дает

$$n\sin^2\vartheta P_5'(\vartheta)+pn\sin^2\varphi P_5'(\varphi)=0. \tag{2}$$

Полагая

$$\sin^2\vartheta=x \quad \text{и} \quad \sin^2\varphi=y \tag{3}$$

и выражая P_3' и P_5' (п. 698) через эти величины, получим в качестве уравнений (1) и (2)

$$4x-5x^2+4py-5py^2=0, \tag{4}$$

$$8x-28x^2+21x^3+8py-28py^2+21py^3=0. \tag{5}$$

Дважды вычитая (4) из (5) и деля на 3, получаем

$$6x^2-7x^3+6py^2-7py^3=0. \tag{6}$$

Следовательно, из (4) и (6) имеем

$$p=\frac{x}{y}\frac{5x-4}{4-5y}=\frac{x^2}{y^2}\frac{7x-6}{6-7y},$$

и мы получаем

$$y=\frac{4}{7}\frac{7x-6}{5x-4}, \qquad \frac{1}{p}=\frac{32}{49x}\frac{7x-6}{(5x-4)^3}.$$

Как x, так и y являются квадратами синусов углов и должны поэтому лежать в пределах от 0 до 1. Следовательно, либо x лежит между 0 и 4/7, при этом y находится между 6/7 и 1, а $1/p$ — между ∞ и 49/32, или же x лежит между 6/7 и 1, при этом y находится между 0 и 4/7, а $1/p$ — между 0 и 32/49.

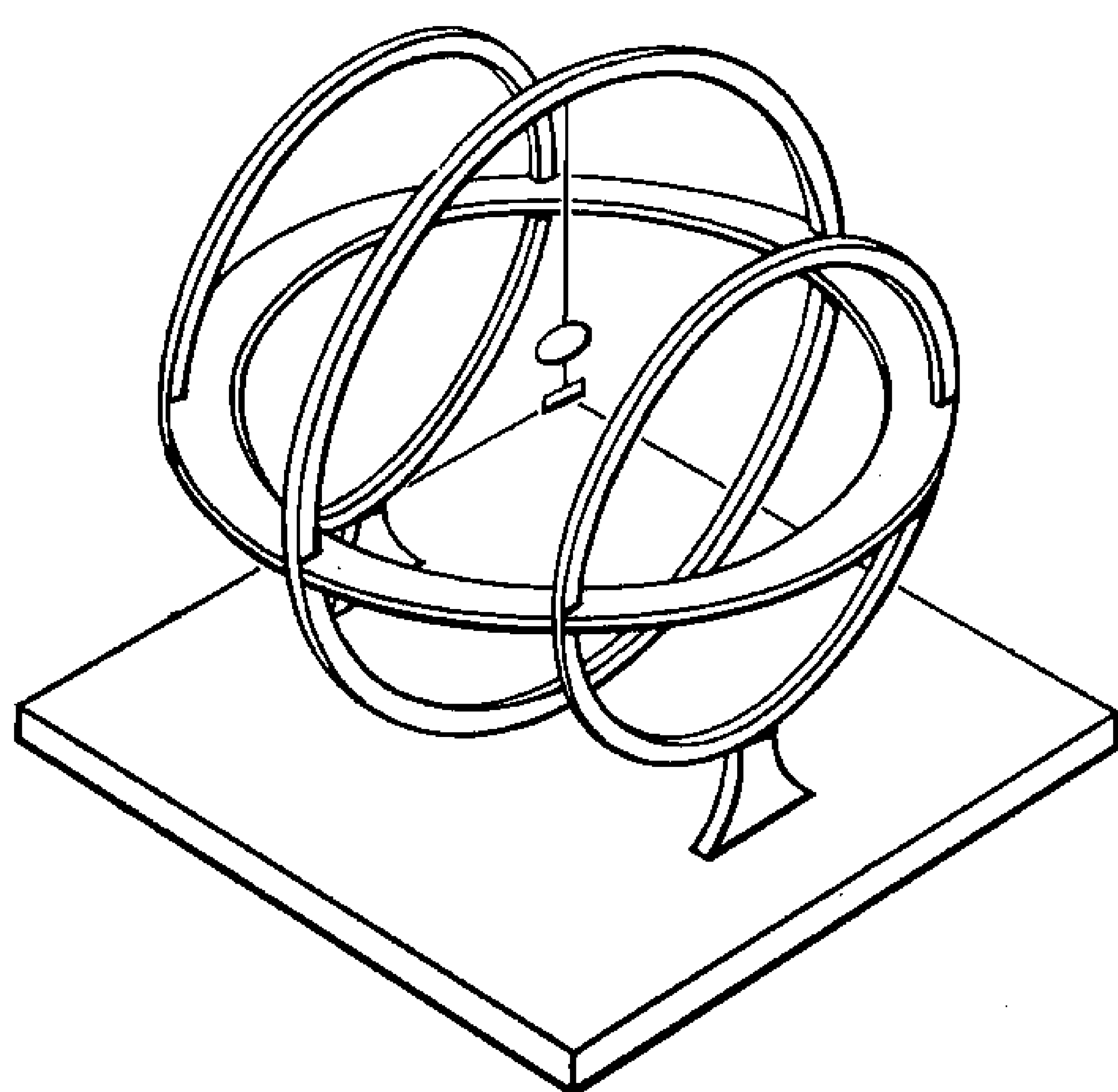


Рис. 50

Трехкатушечный гальванометр

715. Наиболее удобным является расположение катушек, при котором $x=1$. В этом случае две катушки совмещаются друг с другом и образуют большую окружность сферы радиуса C. Число витков в этой составной катушке равно 64. Две другие катушки образуют малые окружности сферы. Радиус каждой из них равен $\sqrt{(4/7)}C$. Расстояние от каждой из них до плоскости первой катушки равно $\sqrt{(3/7)}C$. Число витков в каждой из этих катушек равно 49.

Значение G_1 равно $240\pi/C$.

Такое расположение катушек показано на рис. 50.

Поскольку для такого трехкатушечного гальванометра первым после G_1 членом, имеющим конечное значение, является G_7, то в большей части пространства внутри сферы, на поверхности которой лежат катушки, поле силы будет довольно однородным.

Если бы мы могли намотать провод по всей сферической поверхности, как описано в п. 672, мы получили бы поле абсолютно однородной силы. Однако, даже отвлекаясь от того, что область внутри такой катушки, образующей замкнутую поверхность, недоступна извне, практически невозможно распределить обмотку на сферической поверхности с достаточной точностью.

Исключая из цепи тока среднюю катушку и пропуская ток через две боковые катушки в противоположных направлениях, мы получаем поле силы, которое в направлении оси обладает почти однородным действием на магнит или катушку, подвешенные в нем так, что их ось совпадает с осью катушек, см. п. 673. Действительно, в этом случае все коэффициенты нечетных порядков исчезают, а в силу равенства $\mu=\sqrt{3/7}$ мы имеем $P'_4=(5/2)\mu(7\mu^2-3)=0$.

Следовательно, выражение (6) п. 695 для магнитного потенциала вблизи центра катушки принимает вид

$$\omega=\frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\,\pi n\left\{-3\frac{r^2}{C^2}P_2(\vartheta)+\frac{11}{7}\frac{r^6}{C^6}P_6(\vartheta)+\ \dots\right\},$$

где n — число витков в каждой из катушек.

О необходимой толщине провода гальванометра при заданном внешнем сопротивлении

716. Пусть форма каркаса, внутри которого наматывается катушка гальванометра, задана и требуется определить, должен ли он быть заполнен длинным тонким или коротким толстым проводом.

Пусть l — длина провода, y — его радиус, $y+b$ — радиус провода с покрытием, ρ — удельное сопротивление, g — значение G для единицы длины провода, а r — та часть сопротивления, которая не зависит от гальванометра.

Сопротивление провода гальванометра равно $R=\frac{\rho}{\pi}\frac{l}{y^2}$.

Объем катушки равен $V=\pi l(y+b)^2$.

Электромагнитная сила равна γG, где γ — сила тока, а $G=gl$.

Если E является электродвижущей силой, действующей в контуре с сопротивлением $R+r$, то $E=\gamma(R+r)$.

Электромагнитная сила, обусловленная этой электродвижущей силой, равна $EG/(R+r)$, ее мы и должны сделать максимальной, меняя величины y и l.

Перевертывая эту дробь, мы получаем выражение $\frac{\rho}{\pi g}\frac{1}{y^2}+\frac{r}{gl}$, которое следует сделать минимальным. Следовательно, $2\frac{\rho}{\pi}\frac{dy}{y^3}+\frac{r\,dl}{l^2}=0$.

Если объем катушки остается постоянным, то $\frac{dl}{l}+2\frac{dy}{y+b}=0$.

Исключая dl и dy, получаем $\frac{\rho}{\pi}\frac{y+b}{y^3}=\frac{r}{l}$, или $\frac{r}{R}=\frac{y+b}{y}$.

Таким образом, толщина провода в гальванометре должна быть такой, чтобы внешнее сопротивление относилось к сопротивлению катушки гальванометра как диаметр провода вместе с изоляцией к диаметру собственно провода.

О чувствительных гальванометрах

717. При конструировании чувствительного гальванометра назначение каждой из его частей состоит в обеспечении максимально возможного отклонения магнита посредством малой заданной электродвижущей силы, приложенной между клеммами катушки.

Протекающий по проводу ток производит наибольшее действие тогда, когда он находится на возможно более близком расстоянии от подвешенного магнита. Магнит, однако, должен свободно колебаться, и поэтому какое-то пространство внутри катушки необходимо оставить пустым. Это определяет границу катушки изнутри.

Вне этой области каждый виток должен располагаться так, чтобы производить максимально возможное воздействие на магнит. По мере увеличения числа витков заполняются наиболее выгодные места, так что в конце концов нопротивление нового витка более уменьшает действие тока предыдущих витков, сежели сам новый виток добавляет к нему. Изготавливая внешние витки из более толстого провода, чем внутренние, мы получаем наибольший магнитный эффект при заданной электродвижущей силе.

718. Будем предполагать, что витки в гальванометре представляют собой окружности, а ось гальванометра проходит через центры этих окружностей под прямым углом к их плоскостям.

Пусть $r\sin\vartheta$ будет радиусом одной из этих окружностей, а $r\cos\vartheta$ — расстоянием между ее центром и центром гальванометра; тогда, если l есть длина участка провода, совпадающего с данной окружностью, а γ — текущий по нему

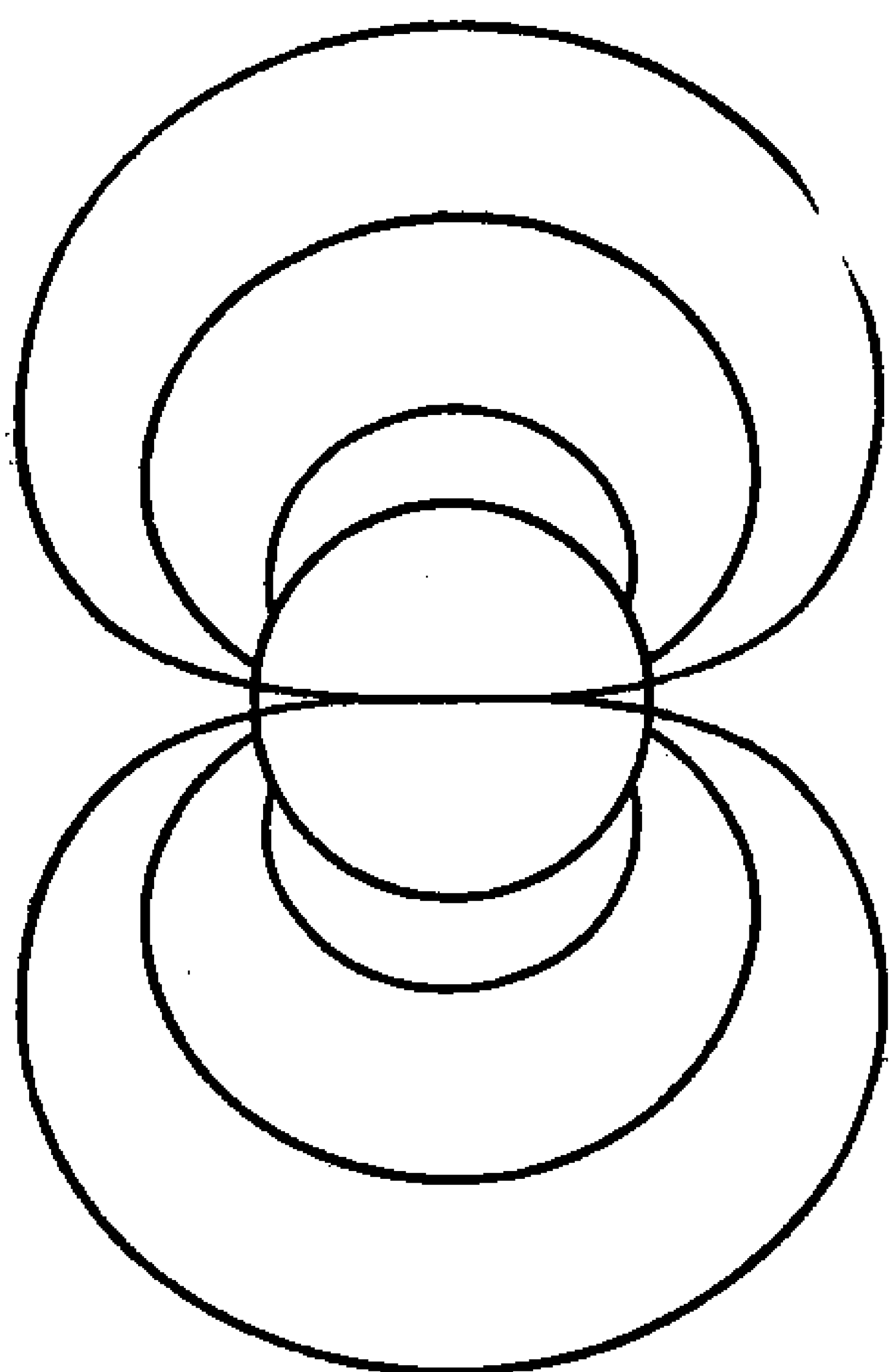


Рис. 51

ток, то магнитная сила в центре гальванометра, спроектированная на направление его оси, равна $\gamma l r^{-2} \sin\vartheta$.

Если записать

$$r^2 = x^2 \sin\vartheta, \tag{1}$$

то это выражение примет вид $\gamma l/x^2$.

Следовательно, если сделать поверхность, подобную одной из тех, сечения которых представлены на рис. 51 (их уравнение в полярных координатах имеет вид

$$r^2 = x_1^2 \sin\vartheta, \tag{2}$$

где x_1 — произвольная постоянная), то провод заданной длины, изогнутый в виде дуги окружности, будет производить большее магнитное действие, когда он лежит внутри этой поверхности, чем когда он находится вне ее. Отсюда следует, что внешняя поверхность любого слоя провода должна иметь постоянное значение x, так как, если x в одном месте больше, чем в другом, то можно часть провода переместить из первого места во второе и тем самым увеличить силу в центре гальванометра.

Полная сила, создаваемая катушкой, равна γG, где

$$G = \int \frac{dl}{x}, \tag{3}$$

интегрирование распространяется на всю длину провода, а x считается функцией l.

719. Пусть y — радиус провода, тогда площадь его поперечного сечения равна πy^2. Пусть ρ — удельное сопротивление (отнесенное к единице объема) материала, из которого изготовлена проволока, тогда сопротивление провода длины l равно $l\rho/(\pi y^2)$, а полное сопротивление катушки

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int \frac{dl}{y^2}, \tag{4}$$

где y рассматривается как функция l.

Пусть Y^2 — площадь четырехугольника, вершины которого совпадают с сечениями осей четырех ближайших проводов катушки, тогда $Y^2 l$ есть объем, занимаемый в катушке проводом длины l вместе с его изолирующим покрытием и той незаполненной частью пространства, которая с необходимостью остается между витками катушки. Следовательно, общий объем катушки равен

$$V = Y^2 dl, \tag{5}$$

где Y рассматривается как функция l.

Но поскольку катушка представляет собой фигуру вращения, то

$$V = 2\pi \iint r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta, \tag{6}$$

или, если выразить при помощи уравнения (1) r через x,

$$V=2\pi\iint x^2(\sin\vartheta)^{5/2}\,dx\,d\vartheta. \tag{7}$$

Далее интеграл $2\pi\int\limits_0^\pi(\sin\vartheta)^{5/2}d\vartheta$ является численной величиной; обозначим ее через N, тогда

$$V=(1/3)Nx^3-V_0, \tag{8}$$

где V_0 есть объем внутренней области, оставленной для магнита.

Рассмотрим теперь слой катушки, содержащийся между поверхностями x и $x+dx$.

Объем этого слоя равен

$$dV=Nx^2dx=Y^2dl, \tag{9}$$

где dl — длина провода в этом слое.

Это дает нам выражение dl через dx. Подставляя его в уравнения (3) и (4), находим

$$dG=N\frac{dx}{Y^2}, \tag{10}$$

$$dR=N\frac{\rho}{\pi}\frac{x^2\,dx}{Y^2y^2}, \tag{11}$$

где dG и dR представляют собой части величин G и R, относящиеся к данному слою катушки.

Далее, если E — заданная электродвижущая сила, то $E=\gamma(R+r)$, где r есть сопротивление внешней части контура, не зависящее от гальванометра; сила γG в центре равна: $\gamma G=EG/(R+r)$.

Мы должны, таким образом, путем надлежащего подбора сечения провода в каждом из слоев сделать величину $G/(R+r)$ максимальной. А это с неизбежностью приводит к изменениям Y, поскольку Y зависит от y.

Обозначим через G_0 и R_0 значения G и $R+r$ для того случая, когда данный слой исключен из вычислений. Тогда имеем

$$\frac{G}{R+r}=\frac{G_0+dG}{R_0+dR}, \tag{12}$$

и, для того чтобы путем вариации относящегося к этому слою значения y сделать данное выражение максимальным, мы должны иметь

$$\frac{\frac{d}{dy}\cdot dG}{\frac{d}{dy}\cdot dR}=\frac{G_0+dG}{R_0+dR}=\frac{G}{R+r}. \tag{13}$$

Так как dx есть величина малая и в пределе исчезающая, то отношение G_0/R_0 будет приближенно (а в пределе точно) одним и тем же независимо от того, какой слой исключен; следовательно, мы можем считать это отношение постоянным.

Тогда, согласно (10) и (11), мы имеем

$$\frac{\rho}{\pi}\frac{x^2}{y^2}\left(1+\frac{Y}{y}\frac{dy}{dY}\right)=\frac{R+r}{G}=\text{constant}. \tag{14}$$

Если способ покрытия провода изолирующим слоем, а также способ его намотки таковы, что независимо от того, является провод толстым или тонким, между областью, заполненной металлом, и пространством между проводами соблюдается одна и та же пропорция, то $\frac{Y}{y}\cdot\frac{dy}{dY}=1$, и мы должны взять как y, так и Y пропорциональными x; иначе говоря, диаметр провода в любом слое должен быть пропорционален линейному размеру этого слоя.

Если же толщина изолирующего покрытия постоянна и равна b, а провода расположены в квадратном порядке, то

$$Y=2(y+b) \tag{15}$$

и рассматриваемое условие записывается так:

$$\frac{x^2\,(2y+b)}{y^3}=\text{constant}. \tag{16}$$

В этом случае диаметр провода возрастает с увеличением диаметра слоя, частью которого он является, но не в такой большой степени.

Если принять первую из этих двух гипотез, приблизительно верную в случае, когда собственно провод почти полностью заполняет всю область, то можно положить $y=\alpha x$, $Y=\beta y$, где α и β — постоянные численные величины, тогда

$$G=N\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right),\qquad R=N\frac{\rho}{\pi}\frac{1}{\alpha^4\beta^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right),$$

где постоянная a зависит от размера и формы пустого пространства, оставшегося внутри катушки.

Следовательно, если толщину провода менять пропорционально x, мы будем получать очень небольшой выигрыш от увеличения внешнего размера катушки после того, как ее внешние размеры значительно превысят внутренние.

720. Если не считать недостатком увеличение сопротивления (как в случае, когда внешнее сопротивление значительно превышает внутреннее сопротивление гальванометра или когда нашей единственной задачей является получение поля значительной силы), мы можем сделать величины y и Y постоянными. Тогда мы имеем

$$G=\frac{N}{Y^2}(x-a),\qquad R=\frac{1}{3}\frac{N}{Y^2y^2}\frac{\rho}{\pi}(x^3-a^3),$$

где a — постоянная, определяемая незаполненной областью внутри катушки. В этом случае величина G монотонно растет с увеличением размеров катушки, и на величину G нет никаких ограничений, за исключением тех, которые связаны с затратами труда и со стоимостью изготовления катушки.

О подвешенных катушках

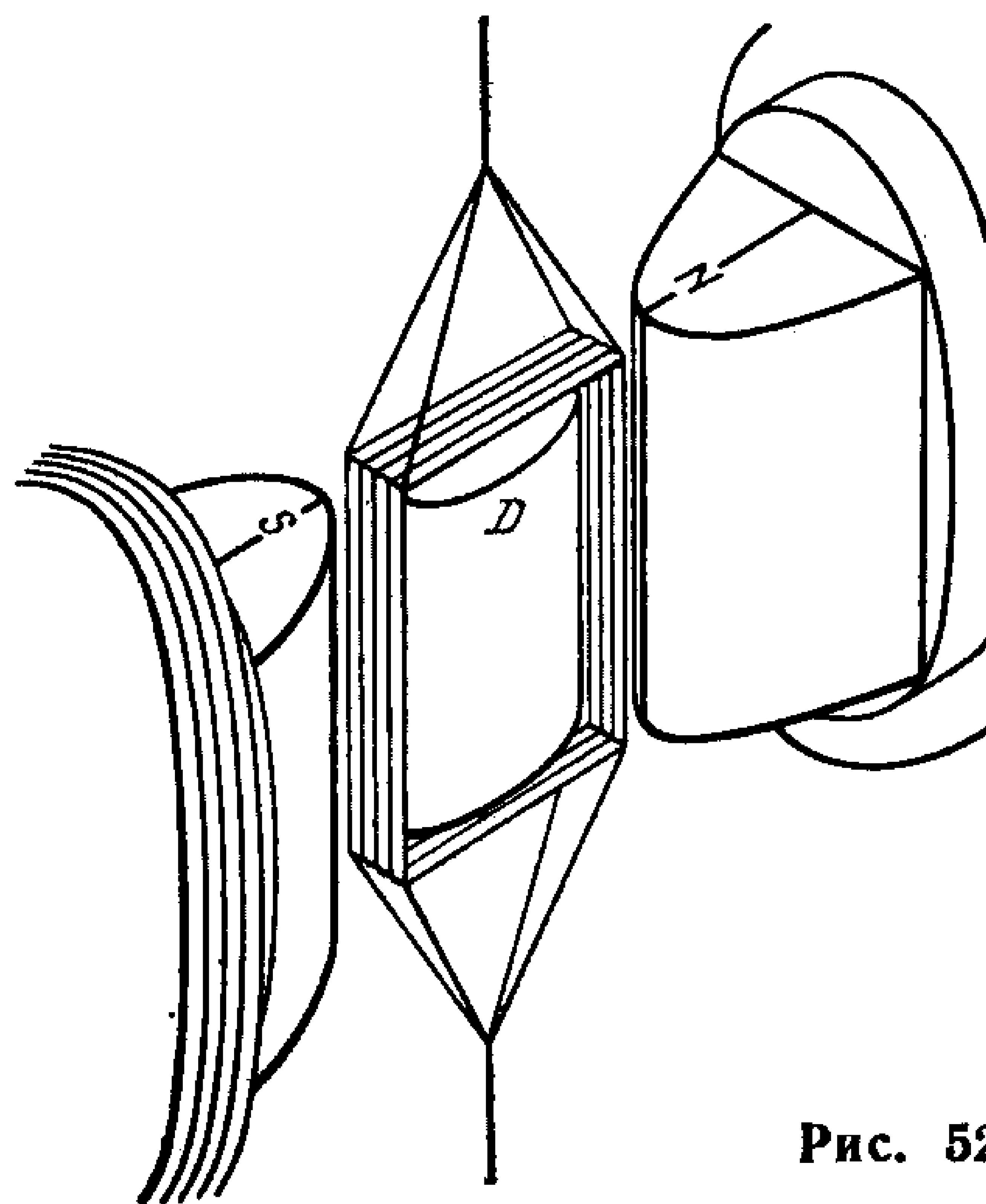


Рис. 52

721. В обычных гальванометрах неподвижная катушка воздействует на подвешенный магнит. Однако если достаточно аккуратно подвесить катушку, то мы можем определять действие магнита или другой катушки на подвешенную катушку по ее отклонению от положения равновесия.

Мы не можем, однако, ввести в катушку электрический ток, если нет металлического соединения между клеммами батареи и концами провода катушки. Такое соединение можно осуществить двумя различными способами — при помощи бифилярного подвеса и с помощью двух противоположно направленных проводов.

Бифилярный подвес уже был описан в п. 459 применительно к магнитам. На рис. 54 показано устройство верхней части этого подвеса. В случае катушек обе нити уже не шелковые, а металлические, и поскольку кручение металлического провода, который в состоянии удерживать катушку и пропускать электрический ток, существенно превышает кручение шелковой нити, то это следует специально учитывать. В приборах, сконструированных Вебером, этот подвес был доведен до большой степени совершенства.

При другом способе подвешивание осуществляется при помощи одного провода, который присоединяется к одному из концов катушки. Второй конец катушки присоединяется к другому проводу, который вдоль той же вертикальной линии, что и первый провод, опущен вниз в чашку со ртутью, как показано на рис. 56 п. 726. В некоторых случаях удобно прикреплять концы двух проводов к каким-либо предметам, с помощью которых провода можно туго натягивать, следя, однако, чтобы при этом линия проводов проходила через центр тяжести катушки. Устройство такого типа можно использовать, когда ось не направлена вертикально, см. рис. 52.

722. Подвешенную катушку можно использовать в качестве очень чувствительного гальванометра, так как, увеличивая интенсивность магнитной силы, в поле которой она подвешена, можно значительно увеличить силу, вызываемую протекающим по катушке слабым током, без добавочного увеличения массы катушки. Магнитная сила для этой цели может быть создана с помощью постоянных магнитов или электромагнитов, возбуждаемых дополнительным током; применяя арматуру из мягкого железа, можно сильно сконцентрировать поле вблизи подвешенной катушки. Так, в записывающей аппаратуре сэра У. Томсона, рис. 52, катушка подвешивается между противоположными полюсами электромагнитов N и S, а чтобы сконцентрировать линии магнитной силы на вертикальных сторонах катушки, между полюсами магнитов закрепляется кусок мягкого железа D. Железо, намагничиваясь через индукцию, создает в промежутке между ним и двумя магнитами очень мощное поле силы, в котором

вертикальные стороны могут свободно перемещаться, так что катушка, даже когда через нее течет очень слабый ток, находится под действием значительной силы, стремящейся повернуть ее вокруг вертикальной оси.

723. Другое применение подвешенной катушки состоит в определении горизонтальной составляющей земного магнетизма путем сравнения с показаниями тангенс-гальванометра.

Катушка подвешивается таким образом, чтобы в устойчивом равновесии ее плоскость была параллельна магнитному меридиану. Через катушку пропускается ток γ, отклоняющий ее в новое состояние равновесия, в котором плоскость катушки образует угол с магнитным меридианом. Если подвес является бифилярным, то создающий такое отклонение момент пары сил равен $F\sin\vartheta$, и он должен быть равен величине $H\gamma g\cos\vartheta$, где H — горизонтальная составляющая земного магнетизма, γ — ток в катушке, g — сумма площадей всех витков катушки. Следовательно, $H\gamma=\frac{F}{g}\operatorname{tg}\vartheta$.

Если A — момент инерции катушки относительно оси подвеса, а T — полупериод одиночного колебания, то в отсутствии тока $FT^2=\pi^2A$ и мы получаем $H\gamma=\frac{\pi^2A}{T^2g}\operatorname{tg}\vartheta$.

Если через катушку тенгенс-гальванометра проходит тот же самый ток и отклоняет магнит на угол φ, то $\frac{\gamma}{H}=\frac{1}{G}\operatorname{tg}\varphi$, где G — главная постоянная тангенс-гальванометра, см. п. 710.

Из этих двух уравнений получаем

$$H=\frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{AG\operatorname{tg}\vartheta}{g\operatorname{tg}\varphi}},\qquad \gamma=\frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{A\operatorname{tg}\vartheta\operatorname{tg}\varphi}{Gg}}.$$

Этот метод был дан Ф. Кольраушем [1].

724. Сэр Уильям Томсон сконструировал единый прибор, с помощью которого все измерения, необходимые для определения H и γ, могут быть выполнены одновременно одним и тем же наблюдателем.

Катушка подвешивается так, чтобы в состоянии равновесия ее плоскость лежала в плоскости магнитного меридиана и при пропускании через нее тока отклонялась бы от этого положения. В центре катушки подвешивается очень маленький магнит, который под действием тока отклоняется в направлении, противоположном направлению отклонения катушки. Пусть отклонение катушки равно ϑ, а отклонение магнита φ, тогда изменяемая часть энергии системы равна

$$-H\gamma g\sin\vartheta-m\gamma G\sin(\vartheta-\varphi)-Hm\cos\varphi-F\cos\vartheta.$$

Дифференцируя по ϑ и φ, получим соответственно уравнения равновесия катушки и магнита:

$$-H\gamma g\cos\vartheta-m\gamma G\cos(\vartheta-\varphi)+F\sin\vartheta=0,$$

$$m\gamma G\cos(\vartheta-\varphi)+Hm\sin\varphi=0.$$

Из этих уравнений, исключая H или γ, мы получаем квадратное уравнение, из которого можно найти γ или H. Если магнитный момент подвешенного маг-

[1] Pogg. *Ann.*, CXXXVIII, p. 1—10, Aug. 1869.

нита m очень мал, мы получаем следующие приближенные значения:

$$H=\frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{-AG\sin\vartheta\cos(\vartheta-\varphi)}{g\cos\vartheta\sin\varphi}}-\frac{1}{2}\frac{mG}{g}\frac{\cos(\vartheta-\varphi)}{\cos\vartheta},$$

$$\gamma=-\frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{-A\sin\vartheta\sin\varphi}{Gg\cos\vartheta\cos(\vartheta-\varphi)}}+\frac{1}{2}\frac{m}{g}\frac{\sin\varphi}{\cos\vartheta}.$$

В этих выражениях G и g — основные электрические постоянные катушки, A — ее момент инерции, T — полупериод ее колебаний, m — магнитный момент магнита, H — напряженность горизонтальной магнитной силы, γ — сила тока, ϑ — отклонение катушки, φ — отклонение магнита.

Поскольку отклонения катушки и магнита противоположны по направлениям, то эти значения H и g всегда будут действительными.

Электродинамометр Вебера

725. В этом приборе внутри большой неподвижной катушки с помощью двух проводов подвешивается маленькая катушка. Когда по обеим катушкам пропускается ток, подвешенная катушка стремится расположиться параллельно неподвижнсй. Этому препятствует момент сил, возникающий в бифилярном подвесе; кроме того, катушка находится под действием земного магнетизма.

При обычном использовании прибора плоскости двух катушек расположены примерно под прямым углом друг к другу, так, чтобы взаимодействие токов в них было максимальным; в то же время плоскость подвешенной катушки располагается под прямым углом к магнитному меридиану, так, чтобы действие земного магнетизма было минимальным.

Пусть магнитный азимут плоскости неподвижной катушки равен α, а угол, который составляет ось подвешенной катушки с плоскостью неподвижной катушки, равен $\vartheta+\beta$, где β — значение этого угла, когда катушка находится в равновесии и ток по ней не протекает; ϑ — отклонение, обусловленное этим током. Уравнение равновесия таково:

$$Gg\gamma_1\gamma_2\cos(\vartheta+\beta)-Hg\gamma_2\sin(\vartheta+\beta+\alpha)-F\sin\vartheta=0,$$

где γ_1 — ток в неподвижной катушке, γ_2 — ток в подвижной катушке.

Предположим, что прибор отлажен таким образом, что углы α и β очень малы, а величина $Hg\gamma_2$ мала по сравнению с F. В этом случае мы приблизительно имеем

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{Gg\gamma_1\gamma_2\cos\beta}{F}-\frac{Hg\gamma_2\sin(\alpha+\beta)}{F}-\frac{HGg^2\gamma_1^2\gamma_2^2}{F^2}-\frac{G^2g^2\gamma_1^2\gamma_2^2\sin\beta}{F^2}.$$

Если при изменении знаков токов γ_1 и γ_2 получаются следующие отклонения:

ϑ_1 при γ_1+ и γ_2+

ϑ_2 при γ_1- и γ_2-,

ϑ_3 при γ_1+ и γ_2-,

ϑ_4 при γ_1- и γ_2+,

то мы находим

$$\gamma_1\gamma_2=\frac{1}{4}\frac{F}{Gg\cos\beta}(\operatorname{tg}\vartheta_1+\operatorname{tg}\vartheta_2-\operatorname{tg}\vartheta_3-\operatorname{tg}\vartheta_4).$$

Если по обеим катушкам течет один и тот же ток, то мы можем положить $\gamma_1\gamma_2=\gamma^2$ и получить, таким образом, величину γ.

Когда токи не очень постоянны, то лучше всего прибегать именно к этому методу (его называют методом тангенсов).

Если же токи настолько постоянны, что можно успеть отрегулировать угол крутильной головки инструмента, то мы можем сразу же избавиться от поправок на земной магнетизм, используя метод синусов.

В этом методе угол β регулируется так, чтобы отклонение было равно нулю, т. е. $\vartheta=-\beta$.

Если для указания знаков γ_1 и γ_2 использовать при β те же индексы, что и раньше, то

$$F\sin\beta_1=-F\sin\beta_3=-Gg\gamma_1\gamma_2+Hg\gamma_2\sin\alpha,$$

$$F\sin\beta_2=-F\sin\beta_4=-Gg\gamma_1\gamma_2-Hg\gamma_2\sin\alpha$$

и $$\gamma_1\gamma_2=-[F/(4Gg)](\sin\beta_1+\sin\beta_2-\sin\beta_3-\sin\beta_4).$$

Этот метод был принят г-ном Латимером Кларком (Clark), когда он использовал прибор, построенный Комитетом по электричеству при Британской Ассоциации (Electrical Committee of the British Association). Мы признательны г-ну Кларку за рисунок электрогальванометра (рис. 53), где применено гельмгольцевское размещение обеих катушек — и подвешенной и неподвижной [2]. Крутильная головка прибора, при помощи которой регулируется бифилярный подвес, представлена на рис. 54. Равенство натяжений проводов подвеса обеспечивается тем, что они прикреплены к концам шелковой нити, перекинутой через блок, а расстояние между ними регулируется с помощью двух направляющих роликов, которые можно устанавливать на требуемом расстоянии друг от друга. Подвешенная катушка может перемещаться вертикально — при помощи винта, действующего на блок подвеса, и горизонтально в двух направлениях — своими скользящими частями, показанными внизу на рис. 54. По азимуту она регулируется посредством крутильного винта, поворачивающего крутильную головку вокруг вертикальной оси (см. п. 459). Азимут подвешенной катушки определяется путем наблюдения отражения шкалы в зеркале, которое видно непосредственно под осью подвешенной катушки.

Этот прибор, впервые сконструированный Вебером, описан в его работе *«Электродинамическое определение массы»* (*Elektrodynamische Maasbestimmungen*). Он предназначался для измерения малых токов, и поэтому в нем и неподвижная и подвижная катушки состояли из большого количества витков, подвешенная катушка занимала гораздо большую часть объема внутри неподвижной катушки, нежели в приборе Британской Ассоциации; последний первоначально предпо-

---

[2] В реальных приборах провода, через которые ток подводится к катушке и отводится от нее, не разнесены так, как это изображено на рисунке, а расположены как можно ближе друг к другу, чтобы нейтрализовать электромагнитное действие друг друга.

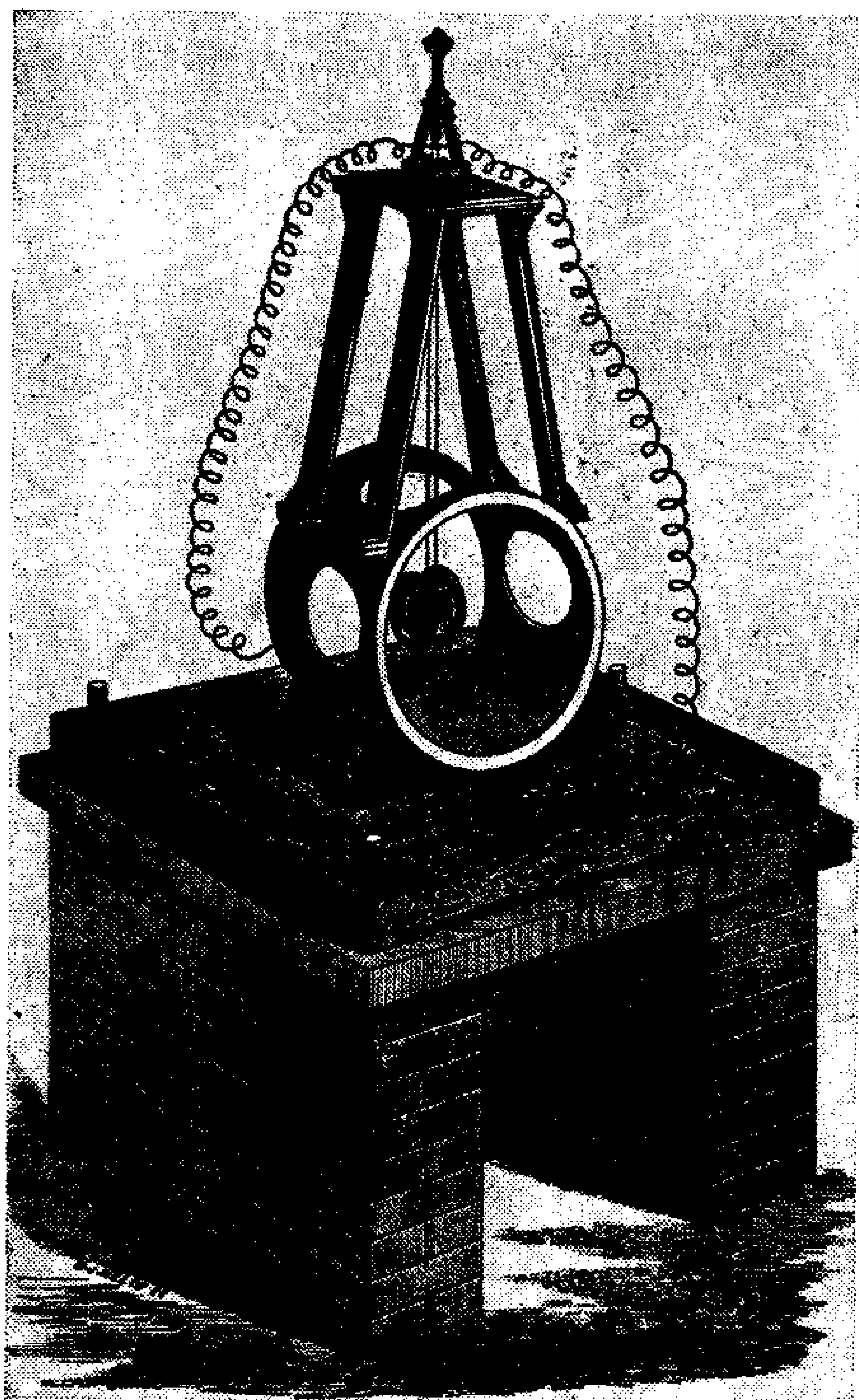


Рис. 53

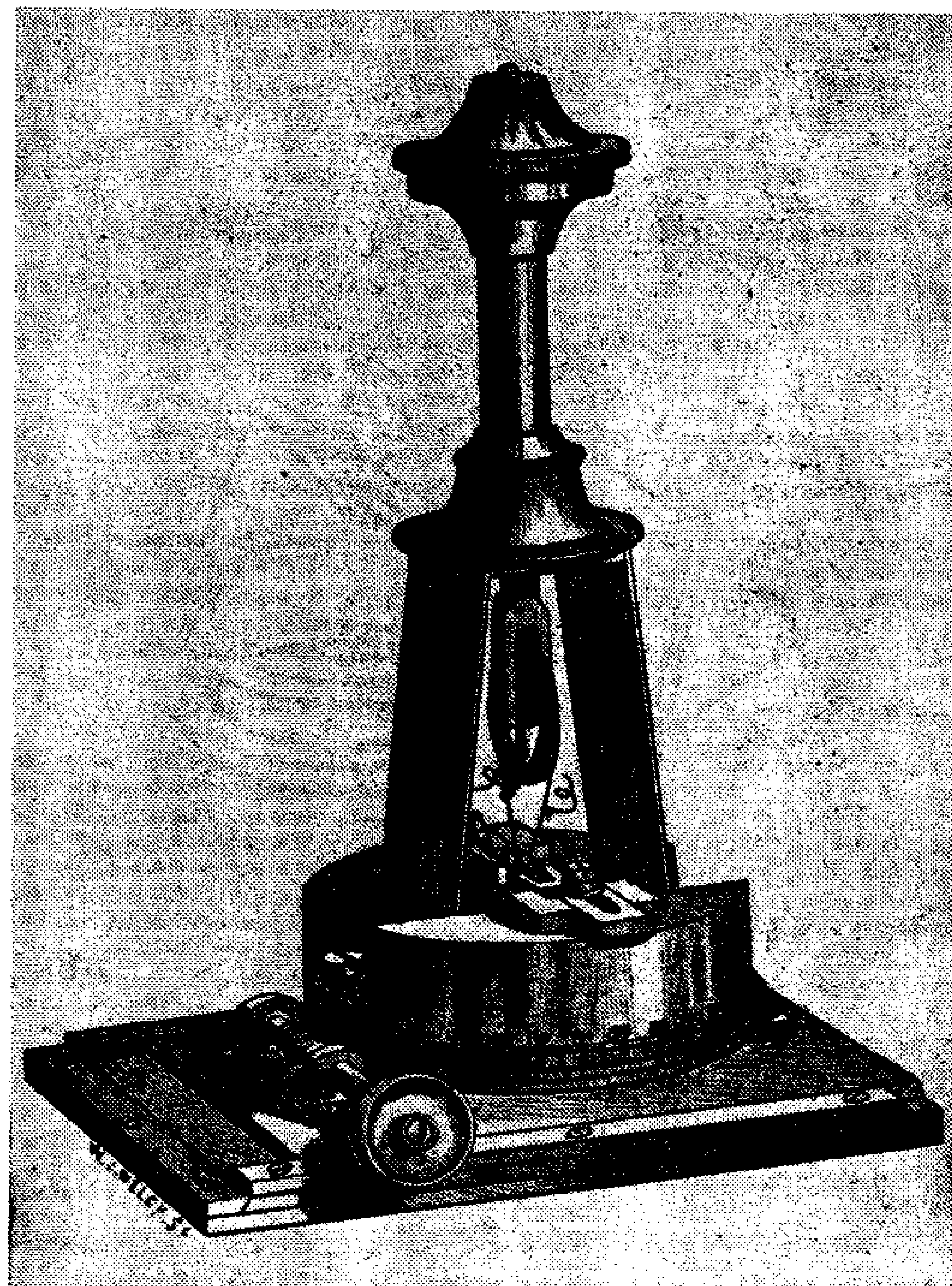


Рис. 54

лагалось использовать в качестве эталонного прибора, с которым можно было бы сравнивать другие, более чувствительные приборы. Опыты, проведенные Вебером с использованием этого прибора, обеспечили наиболее полное экспериментальное доказательство точности формулы Ампера применительно к замкнутым токам и составили важную часть тех исследований, в которых Вебер поднял на высокий уровень точности численное определение электрических величин.

Веберовский вариант электродинамометра, где одна из катушек подвешена внутри другой и находится под действием пары сил, стремящейся повернуть ее вокруг вертикальной оси, является, вероятно, наиболее пригодным для абсолютных измерений. В п. 700 приведен метод вычисления постоянных, характеризующих такое устройство.

726. Если, однако, мы хотим получить при помощи слабого тока значительную электромагнитную силу, то лучше ориентировать подвешенную катушку параллельно неподвижной, предоставив ей возможность перемещаться в направлении неподвижной катушки или от нее.

В токовых весах Джоуля (рис. 55) подвешенная катушка ориентирована горизонтально и может перемещаться в вертикальном направлении; сила взаимодействия между ней и неподвижной катушкой оценивается тем весом, который необходимо добавить к катушке или убрать от нее, для того чтобы привести ее

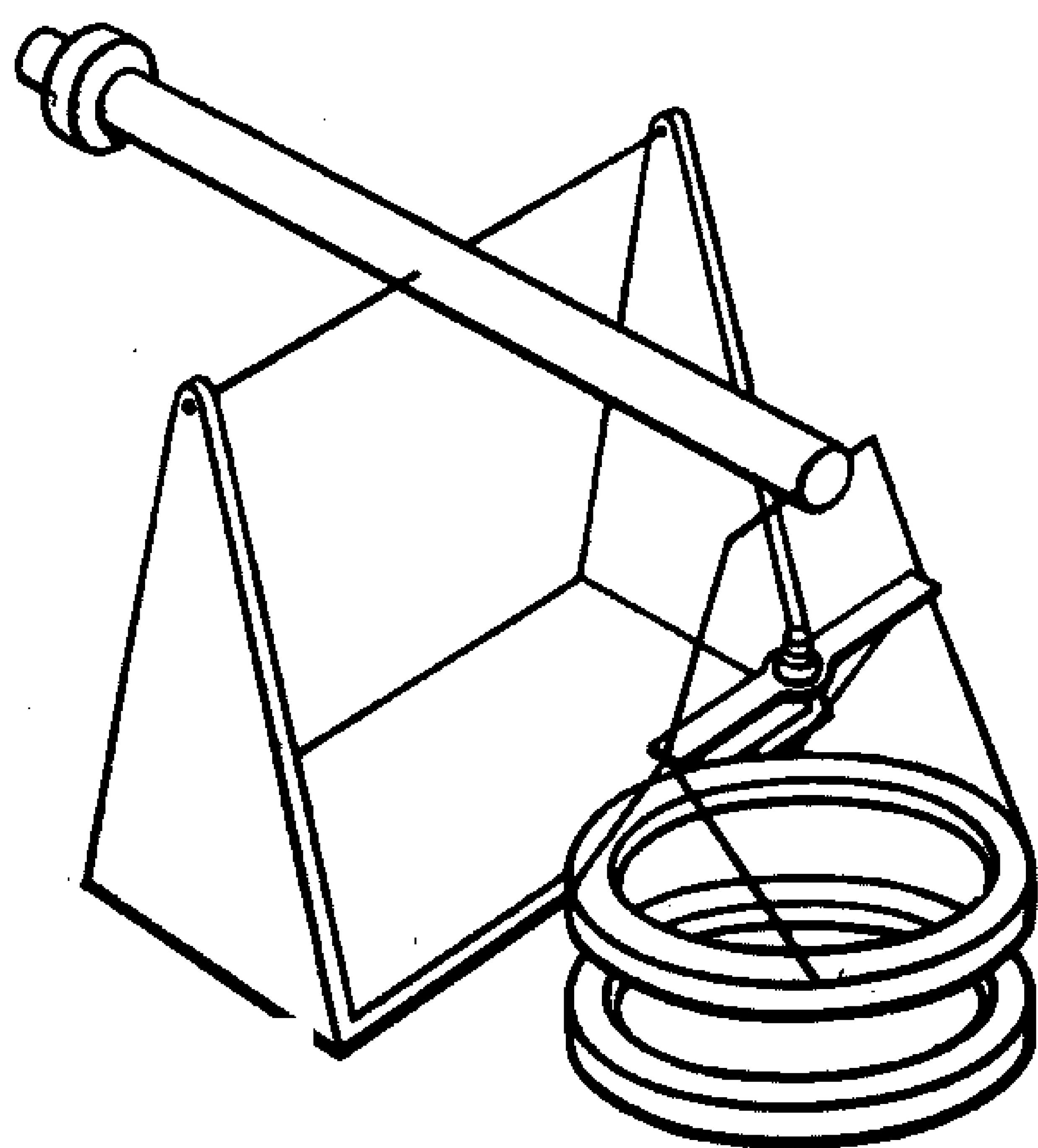


Рис. 55

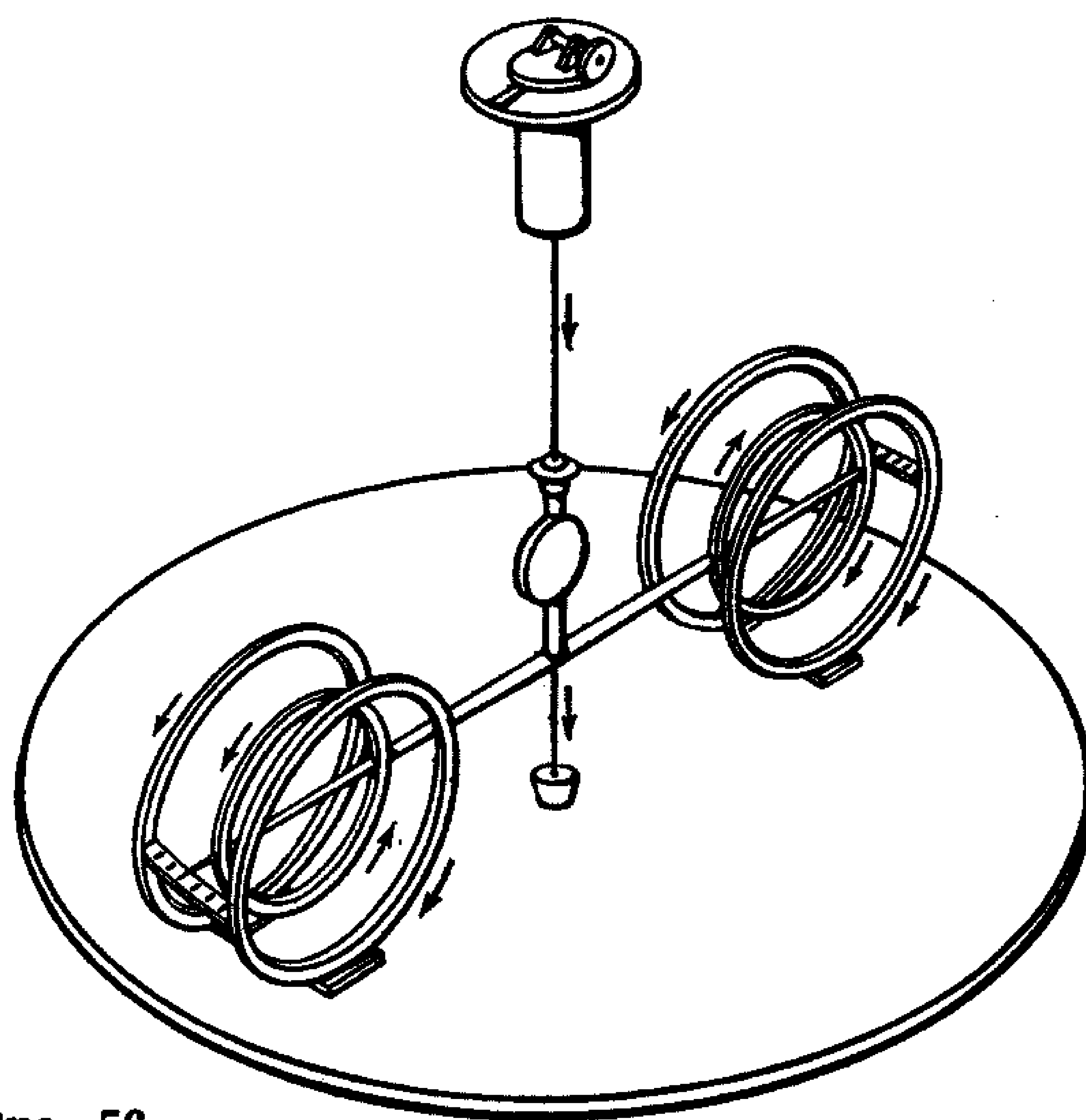


Рис. 56

в то же самое положение относительно неподвижной катушки, в котором она находилась в отсутствие тока.

Подвешенную катушку можно также прикрепить к концу горизонтального плеча крутильных весов и можно поместить ее между двумя неподвижными катушками, одна из которых притягивает, а другая отталкивает ее, как это показано на рис. 56.

При размещении катушек, описанном в п. 729, сила, действующая на подвешенную катушку в пределах небольшого удаления от положения равновесия, может быть сделана почти однородной.

К другому концу крутильных весов можно прикрепить вторую катушку, также поместив ее между двумя неподвижными катушками. Если обе подвешенные катушки одинаковы, но ток в них течет в противоположных направлениях, то полностью будет исключено влияние земного магнетизма на положение плеча крутильных весов.

727. Если подвешенная катушка имеет форму длинного соленоида и может двигаться параллельно своей оси, входя при этом внутрь большего соленоида, имеющего общую с ней ось, то при одинаковом направлении токов в обоих соленоидах подвешенный соленоид будет втягиваться внутрь неподвижного с силой, которая остается приблизительно однородной до тех пор, пока концы этих соленоидов не окажутся близко друг к другу.

728. Чтобы создать однородную продольную силу, действующую на маленькую катушку, помещаемую между двумя другими одинаковыми катушками гораздо больших размеров, мы должны сделать отношение диаметра больших катушек к расстоянию между их плоскостями равным отношению 2 к $\sqrt{3}$. Если пустить через обе катушки один и тот же ток в противоположных направлениях, то в выражении для ω члены, содержащие нечетные степени r, исчезают и, поскольку $\sin^2\alpha=4/7$, а $\cos^2\alpha=3/7$, член, содержащий r^4, также исчезает и в

соответствии с п. 715 для переменной части ω имеем

$$\frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\,\pi n\gamma\left\{3\frac{r^2}{c^2}P_2(\vartheta)-\frac{11}{7}\frac{r^6}{c^6}P_6(\vartheta)+\ldots\right\},$$

что указывает на почти однородную силу, действующую на маленькую подвешенную катушку. Расположение катушек в этом случае такое же, как расположение двух внешних катушек в трехкатушечном гальванометре, описанном в п. 715, см. рис. 50.

729. Если мы хотим подвесить катушку между двумя другими катушками, расположенными так близко к ней, что расстояние между взаимодействующими проводами мало по сравнению с радиусами катушек, то наиболее однородная сила получается, если радиус каждой из внешних катушек превышает радиус средней катушки на $1/\sqrt{3}$ расстояния между плоскостями средней и внешней катушек. Это следует из выражения для взаимной индукции между двумя круговыми токами, полученного в п. 705.

ГЛАВА XVI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

730. Очень многие измерения электрических величин зависят от наблюдений движения колеблющегося тела; поэтому мы уделим внимание природе этого движения, а также наилучшим методам его наблюдения.

Малые колебания тела около положения равновесия обычно аналогичны колебаниям точки, на которую действует сила, меняющаяся пропорционально расстоянию от некоторой фиксированной точки. В наших опытах в случае колеблющихся тел имеется также сопротивление движению, обусловленное рядом причин, таких как вязкость воздуха и вязкость нити подвеса. Во многих электрических приборах имеется другой источник сопротивления, а именно обратное воздействие токов, индуцируемых в проводящих контурах, расположенных вблизи колеблющихся магнитов. Эти токи индуцируются движением магнита и их действие на магнит в соответствии с правилом Ленца состоит в постоянном противодействии его движению. Во многих случаях это составляет основную часть сопротивления.

Иногда около магнита с явно выраженной целью уменьшения или полного прекращения его колебаний помещается металлический контур, называемый Демпфером. Поэтому о сопротивлении такого рода мы будем говорить как о Демпфирующем.

В случае медленных колебаний, таких, которые легко наблюдать, полное сопротивление, какими бы причинами оно ни было обусловлено, оказывается прямо пропорциональным скорости. И только когда скорость гораздо больше, чем при обычных колебаниях в электромагнитных приборах, появляются свидетельства в пользу того, что сопротивление пропорционально квадрату скорости.

Таким образом, мы должны исследовать движение тела под действием при-

тяжения, меняющегося пропорционально расстоянию, и сопротивления, меняющегося пропорционально скорости.

731. Нижеследующее применение принципа Годографа, данное профессором Тэтом[1], позволяет нам очень простым способом исследовать движение такого рода при помощи равноугловой спирали.

Пусть требуется найти ускорение частицы, которая описывает логарифмическую или равноугловую спираль, двигаясь с постоянной угловой скоростью ω вокруг полюса.

Эта спираль обладает тем свойством, что касательная PT образует постоянный угол α с радиус-вектором PS [рис. 57].

Рис. 57

Если скорость в точке P равна v, то $v \cdot \sin\alpha = \omega \cdot SP$. Следовательно, если мы проведем отрезок SP', параллельный PT и равный SP, то скорость в точке P и по величине, и по направлению будет задана выражением $v = (\omega/\sin\alpha) SP'$. Таким образом, точка P' будет точкой на годографе. Но SP' есть отрезок SP, повернутый на постоянный угол $\pi - \alpha$, так что годограф, описываемый точкой P', совпадает с исходной спиралью, повернутой вокруг полюса на угол $\pi - \alpha$.

Ускорение точки P по величине и по направлению представлено скоростью точки P', умноженной на тот же самый фактор $\omega/\sin\alpha$.

Следовательно, если мы произведем над отрезком SP' ту же самую операцию поворота на угол $\pi - \alpha$ в новое положение SP'', то ускорение точки P по величине и направлению будет равно $(\omega^2/\sin^2\alpha)SP''$, где SP'' есть отрезок SP, повернутый на угол $2\pi - 2\alpha$.

Проведя отрезок PF, равный и параллельный SP'', мы можем ускорение $(\omega^2/\sin^2\alpha)PF$ разложить на $(\omega^2/\sin^2\alpha)PS$ и $(\omega^2/\sin^2\alpha)PK$.

Первая из этих составляющих есть ускорение, направленное к центру S и пропорциональное расстоянию.

Вторая составляющая направлена против скорости, и, поскольку $PK = 2\cos\alpha P'S = -2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\omega}v$, это ускорение можно записать так: $-2\frac{\omega\cos\alpha}{\sin\alpha}v$.

Ускорение частицы состоит, таким образом, из двух частей, первая из которых обусловлена силой притяжения μr, направленной к S и пропорциональной расстоянию, а вторая, равная $-2kv$, является сопротивлением движению, пропорциональным скорости, где $\mu = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}$, $k = \omega\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

---

[1] *Proc. R. S. Edin.*, Dec. 16, 1867.

Если мы положим в этих выражениях $\alpha=\pi/2$, орбита становится круговой, и мы имеем $\mu_0=\omega_0^2$, $k=0$.

Следовательно, если сила на единичном расстоянии остается той же самой, то $\mu=\mu_0$ и $=\omega_0\sin\alpha$, т. е. угловая скорость на различных спиралях при одном и том же законе притяжения пропорциональна синусу угла спирали.

732. Если мы рассмотрим теперь движение точки, являющейся проекцией движущейся точки P на горизонтальную линию XY, то увидим, что ее расстояние от S и ее скорость являются горизонтальными составляющими соответствующих величин для P. Следовательно, ускорение этой точки также состоит из притяжения, направленного к S и равного расстоянию от S, взятому μ раз, и торможения, равного скорости, умноженной на $2k$.

Мы имеем, таким образом, завершенную конструкцию для описания прямолинейного движения точки, происходящего под действием притяжения, пропорционального расстоянию от некоторой фиксированной точки, и сопротивления, пропорционального скорости. Движение такой точки является горизонтальной проекцией движения другой точки, которая движется с постоянной угловой скоростью вдоль логарифмической спирали.

733. Уравнение спирали $r=Ce^{-\varphi\operatorname{ctg}\alpha}$.

Чтобы определить горизонтальное движение, положим $\varphi=\omega t$, $x=a+r\sin\varphi$, где a — значение x для точки равновесия.

Если мы проведем отрезок BSD, образующий с вертикалью угол α, то касательные BX, DY, GZ, . . . будут вертикальными, а точки X, Y, Z, . . . окажутся крайними точками последовательных осцилляций.

734. При наблюдении колеблющихся тел отмечаются: (1). Показания шкалы в стационарных точках. Они называются элонгациями. (2). Моменты прохождения определенного деления шкалы в положительном или отрицательном направлении. (3). Показания шкалы в определенные моменты времени. Подобного рода наблюдения проводятся редко, лишь в случае колебаний с большим периодом [2].

Мы должны определить следующие величины: (1). Показание шкалы в положении равновесия. (2) Логарифмический декремент колебаний. (3). Время одного колебания.

Как определить показание шкалы в положении равновесия через три последовательные элонгации

735. Допустим, мы засекли три показания шкалы x_1, x_2, x_3, соответствующие элонгациям X, Y, Z, и пусть a—показание в положении равновесия S, а r_1—значение величины SB, тогда $x_1-a=r_1\sin\alpha$, $x_2-a=-r_1\sin\alpha e^{-\pi\operatorname{ctg}\alpha}$, $x_3-a=r_1\sin\alpha e^{-2\pi\operatorname{ctg}\alpha}$.

Из этих величин мы находим $(x_1-a)(x_3-a)=(x_2-a)^2$. Откуда

$$a=\frac{x_1x_3-x_2^2}{x_1+x_3-2x_2}.$$

Если x_3 не очень сильно отличается от x_1, мы можем пользоваться приближенной формулой $a=(x_1+2x_2+x_3)/4$.

---

[2] См. Gauss and W. Weber, *Resultate des magnetischen Vereins*, 1836. Chap. II, p. 34—50.

Как найти логарифмический декремент

736. Логарифмическим декрементом называется логарифм отношения амплитуды какого-либо колебания к амплитуде следующего за ним колебания. Если мы обозначим это отношение через ρ:

$$\rho=(x_1-x_2)/(x_3-x_2), \quad L=\lg\rho, \quad \lambda=\ln\rho,$$

то величина L называется обычным логарифмическим декрементом, а величина λ — неперовским логарифмическим декрементом. Очевидно, что $\lambda=L\ln 10=\pi\operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно, $\alpha=\operatorname{arcctg}(\lambda/\pi)$. определяет угол логарифмической спирали.

Для определения величины λ нужно позволить телу совершить значительное число колебаний. Если c_1 — амплитуда первого, а c_n — амплитуда n-го колебания, то

$$\lambda=\frac{1}{n-1}\ln\left(\frac{c_1}{c_n}\right).$$

Если мы предположим, что точность налюдений при малых и при больших колебаниях одинакова, то для получения наилучшего значения λ мы должны были бы дать возможность затухать колебаниям до тех пор, пока отношение c_1 к c_n не станет приближенно равным основанию натуральных логарифмов e. Это дает для n значение ближайшего к $(1/\lambda)+1$ целого числа.

Поскольку, однако, в большинстве случаев время дорого, то лучше провести другую серию наблюдений, не дожидаясь такого значительного уменьшения амплитуды.

737. В некоторых случаях может оказаться, что мы должны определить положение равновесия по двум соседним элонгациям, когда логарифмический декремент известен из специально проведенного опыта. Тогда мы имеем $a=\dfrac{x_1+e^{\lambda}x_2}{1+e^{\lambda}}$.

Время одного колебания

738. После определения показания шкалы, соответствующего точке равновесия, в эту точку шкалы или как можно ближе к ней помещается хорошо различимая метка и для нескольких последовательных колебаний замечаются моменты прохождения этой метки.

Допустим, что метка смещена в положительном направлении от точки равновесия на неизвестное, но очень малое расстояние x, и пусть t_1 — зарегистрированный момент времени первого прохождения метки в положительном направлении, а t_2, t_3, ... — моменты последующих прохождений.

Если T — время одного колебания (полупериод), а P_1, P_2, P_3, ... — моменты прохождения точки истинного равновесия, то

$$t_1=P_1+\frac{x}{v_1}, \quad t_2=P_2+\frac{x}{v_2}, \quad P_2-P_1=P_3-P_2=T,$$

где v_1, v_2, ... — последовательные значения скоростей прохождения, которые на очень малых расстояниях x мы можем считать постоянными.

Если ρ есть отношение амплитуды какого-либо колебания к амплитуде последующего колебания, то

$$v_2 = -\frac{1}{\rho} v_1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{v_2} = -\rho \frac{x}{v_1}.$$

Если три прохождения наблюдались в моменты времени t_1, t_2, t_3, мы находим

$$\frac{x}{v_1} = \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(\rho+1)^2}.$$

Следовательно, время одного колебания равно

$$T = \frac{1}{2}(t_3 - t_1) - \frac{1}{2}\frac{\rho-1}{\rho+1}(t_1 - 2t_2 + t_3).$$

Момент второго прохождения истинной точки равновесия равен

$$P_2 = \frac{1}{4}(t_1 + 2t_2 + t_3) - \frac{1}{4}\frac{(\rho-1)^2}{(\rho+1)^2}(t_1 - 2t_2 + t_3).$$

Для определения этих трех величин достаточно трех прохождений, однако любое большее число прохождений можно скомбинировать по методу наименьших квадратов. Так, для пяти прохождений

$$T = \frac{1}{10}(2t_5 + t_4 - t_2 - 2t_1) - \frac{1}{10}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5)\frac{\rho-1}{\rho+1}\left(2 - \frac{\rho}{1+\rho^2}\right).$$

Момент третьего прохождения при этом равен

$$P_3 = \frac{1}{8}(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + t_5) - \frac{1}{8}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5)\frac{(\rho-1)^2}{(\rho+1)^2}.$$

739. Этот же метод можно распространить и на серию, состоящую из любого числа колебаний. Если колебания настолько быстрые, что невозможно регистрировать момент каждого прохождения, мы можем засекать момент каждого третьего или каждого пятого прохождения, следя за тем, чтобы направления соседних регистрируемых прохождений были противоположны. Если колебания регулярно происходят в течение большого промежутка времени, то нет необходимости вести наблюдение все это время. Мы можем начать с наблюдения достаточного числа прохождений, для того чтобы приближенно определить время одного колебания T и момент среднего прохождения P, заметив, в каком направлении — положительном или отрицательном — оно происходит. Затем можно либо продолжать считать колебания, не отмечая моменты прохождения, либо вообще не следить за прибором. Далее мы наблюдаем вторую серию прохождений и находим время одного колебания T' и момент среднего прохождения P', замечая направление этого прохождения.

Если времена одного колебания T и T', найденные из двух серий наблюдений, приближенно равны, мы можем перейти к более точному определению периода, комбинируя наблюдения двух серий.

Частное от деления $P' - P$ на T должно получиться очень близким к целому числу, четному или нечетному в соответствии с тем, одинаковы или противоположны направления прохождений P и P'. Если это не так, то вся серия наблюдений бесполезна, но если результат очень близок к целому числу n, то,

разделив $P'-P$ на n, мы найдем значение T, среднее для всего времени колебаний.

740. Найденное таким образом время одного колебания T является фактическим средним временем колебания; к нему необходимо вводить поправки, если мы хотим вывести из него время колебаний при бесконечно малых дугах в отсутствие затухания.

Чтобы свести наблюдаемое время к времени бесконечно малых колебаний, мы заметим, что время колебания с амплитудой c от одного состояния покоя до другого обычно можно представить в виде $T=T_1(1+\varkappa c^2)$, где $\varkappa$ — некоторый коэффициент, который в случае обычного маятника равен 1/64. Амплитуды следующих друг за другом колебаний равны c, $c\rho^{-1}$, $c\rho^{-2}$, . . ., $c\rho^{1-n}$, так что полное время колебаний равно

$$nT=T_1\left(n+\varkappa\frac{c_1^2\rho^2-c_n^2}{\rho^2-1}\right),$$

где T есть время, полученное из наблюдений.

Следовательно, для нахождения времени при бесконечно малых дугах T_1 мы приближенно имеем

$$T_1=T\left\{1-\frac{\varkappa}{n}\frac{c_1^2\rho^2-c_n^2}{\rho^2-1}\right\}.$$

Для получения времени T_0 в отсутствие затухания мы имеем (п. 731)

$$T_0=T_1\sin\alpha=T_1\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}.$$

741. Уравнение прямолинейного движения тела под действием притяжения к некоторой неподвижной точке, пропорционального расстоянию, и силы сопротивления, меняющейся пропорционально скорости, следующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\omega^2(x-a)=0, \qquad (1)$$

где x — координата тела в момент времени t, a — координата точки равновесия.

Чтобы решить это уравнение, положим

$$x-a=e^{-kt}y; \qquad (2)$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(\omega^2-k^2)y=0. \qquad (3)$$

Решение этого уравнения:

$$y=C\cos\left(\sqrt{\omega^2-k^2}t+\alpha\right), \quad \text{если } k \text{ меньше чем } \omega; \qquad (4)$$

$$y=A+Bt, \quad \text{если } k \text{ равно } \omega; \qquad (5)$$

$$y=C'\cosh\left(\sqrt{k^2-\omega^2}t+\alpha'\right), \quad \text{если } k \text{ больше, чем } \omega. \qquad (6)$$

Величину x можно получить из y при помощи уравнения (2). Когда k меньше ω, движение состоит из бесконечной серии последовательности колебаний с

постоянным периодом и непрерывно уменьшающейся амплитудой. С ростом k период колебаний увеличивается, а уменьшение амплитуды становится более быстрым.

Когда величина k (половина коэффициента сопротивления) становится равной или большей чем ω (корень квадратный из ускорения на единичном расстоянии от точки равновесия), движение перестает быть колебательным; за время всего движения тело может лишь один раз пройти точку равновесия, после чего оно достигает положения максимального отклонения, а затем начинает возвращаться к точке равновесия, непрерывно приближаясь к ней, но никогда ее не достигая.

Гальванометры, в которых сопротивление столь велико, что в них происходит такого рода движение, называются *апериодическими гальванометрами*. Они полезны во многих экспериментах, но особенно при телеграфной связи, где существование свободных колебаний могло бы совершенно замаскировать те движения, которые предполагается обнаруживать.

Какими бы ни были значения k и ω, величина a (показание шкалы в точке равновесия) может быть выведена из пяти показаний шкалы p, q, r, s, t, взятых через равные промежутки времени по формуле

$$a=\frac{q(rs-qt)+r(pt-r^2)+s(qr-ps)}{(p-2q+r)(r-2s+t)-(q-2r+s)^2}.$$

О наблюдениях с гальванометром

742. Для измерения постоянного тока с помощью тангенс-гальванометра прибор устанавливается таким образом, чтобы плоскость его катушек была параллельна магнитному меридиану, и снимается нулевое показание шкалы. После этого через катушки пропускается ток и наблюдается отклонение магнита, соответствующее его новому положению равновесия. Обозначим его через φ.

Тогда, если H есть горизонтальная магнитная сила, G — коэффициент гальванометра, а γ — сила тока, то

$$\gamma=(H/G)\operatorname{tg}\varphi. \qquad (1)$$

Если коэффициент кручения нити подвеса равен τMH (см. п. 452). то мы должны пользоваться уточненной формулой

$$\gamma=(H/G)(\operatorname{tg}\varphi+\tau\varphi\sec\varphi). \qquad (2)$$

Наилучшее значение величины отклонения

743. В некоторых гальванометрах можно по желанию менять число витков в катушке, по которым протекает ток. В других гальванометрах заданную часть тока можно отвести от гальванометра с помощью проводника, называемого шунтом. В любом из этих случаев меняется величина G, представляющая собой действие единичного тока на магнит.

Определим значение G, для которого заданная ошибка наблюдаемого отклонения соответствует наименьшей ошибке вычисленного значения силы тока.

Дифференцируя уравнение (1), находим

$$\frac{d\gamma}{d\varphi}=\frac{H}{G}\sec^2\varphi \qquad (3)$$

Исключая G,

$$\frac{d\varphi}{d\gamma}=\frac{1}{2\gamma}\sin 2\varphi. \qquad (4)$$

Это выражение имеет максимум при заданном значении γ, когда отклонение равно 45°. Поэтому величину G следовало бы регулировать до тех пор, пока произведение $G\gamma$ не станет как можно более близким к H, т. е. для сильных токов лучше не пользоваться слишком чувствительным гальванометром.

О наилучшем способе подключения тока

744. Если наблюдатель может в любой момент времени замыкать и размыкать цепь при помощи ключа, то целесообразно работать ключом таким образом, чтобы магнит подходил к положению равновесия с наименьшей возможной скоростью. Для этой цели Гаусс рекомендовал следующий метод.

Предположим, что магнит находится в положении равновесия и ток отсутствует. Наклюдатель замыкает цепь на короткий промежуток времени, так что магнит приходит в движение в направлении нового положения равновесия. Затем наблюдатель прерывает контакт. Теперь сила направлена к первоначальному положению равновесия, и движение становится замедленным. Если сделать так, что магнит остановится точно в новом положении равновесия, и в этот момент замкнуть цепь, сохраняя контакт и далее, то магнит будет оставаться в покое в новом положении равновесия.

Пренебрежем влиянием сопротивления, а также различием между значениями полной силы в старом и новом положениях. Поскольку мы хотим, чтобы новая сила за время своего первого воздействия создала ровно столько кинетической энергии, сколько уничтожается первоначальной силой, когда контур разомкнут, то мы должны продолжать первое действие тока до тех пор, пока магнит не пройдет половину пути от первого положения равновесия до второго. Тогда, если на второй половине пути на магнит действует первоначальная сила, она в точности остановит его. Время, необходимое для прохождения от точки максимального отклонения до точки, находящейся на полпути к положению равновесия, составляет одну треть времени прохождения от состояния покоя до состояния покоя.

Поэтому оператор, предварительно установив время одного колебания от состояния покоя до состояния покоя, замыкает контакт на одну треть этого интервала времени, потом размыкает его снова на треть того же интервала и затем снова замыкает цепь уже до конца всего опыта. Магнит после этого либо будет находиться в состоянии покоя, либо будет совершать настолько малые колебания, что можно сразу же проводить наблюдения, не дожидаясь прекращения этих движений. Для подобных опытов можно использовать метроном, отрегулировав его таким образом, чтобы за время каждого колебания магнита он отстукивал трижды. Это правило несколько усложняется, когда величина сопротивления оказывается такой, что его следует принимать во внимание; однако в этом случае колебания затухают настолько быстро, что нет необходимости принимать какие-либо поправки к этому правилу.

Когда необходимо возвратить магнит в первоначальное положение, контур размыкается на одну треть времени одного колебания, затем замыкается на то же самое время и затем окончательно размыкается. Это приводит магнит в состояние покоя в его первоначальном положении.

Если необходимо снять показания при обратном включении сразу же после снятия прямых показаний, то контур размыкается на время одного колебания, а затем гальванометр включается в обратном направлении. Это приводит магнит в состояние покоя при обратном направлении тока.

Измерение при первом колебании

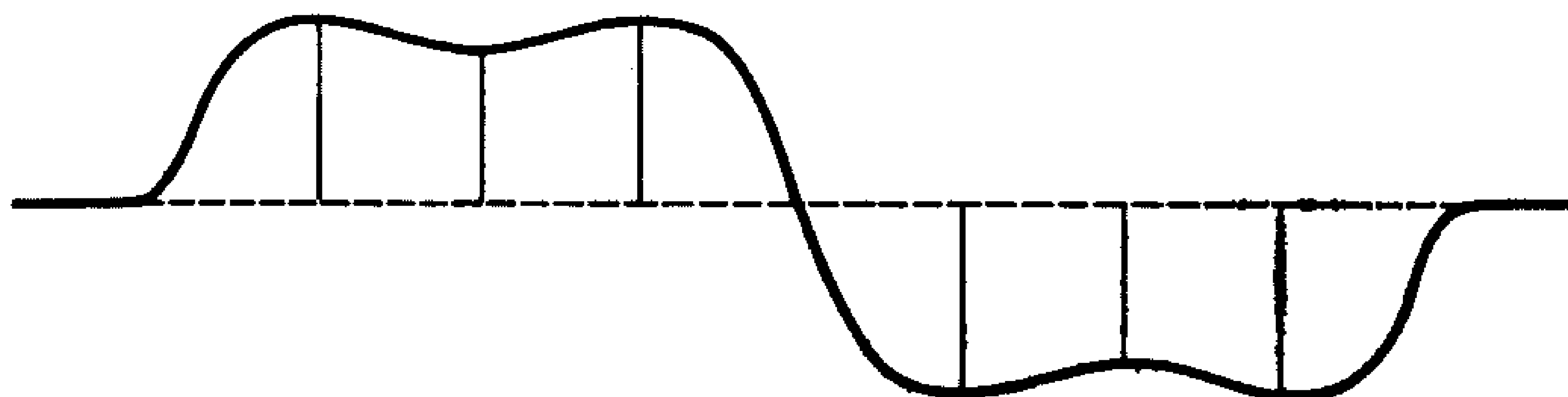
745. Когда нет времени сделать более чем одно наблюдение, ток можно измерить по максимальному отклонению при первом колебании магнита. Если сопротивление отсутствует, то постоянное отклонение φ равно половине максимального отклонения. Если же сопротивление таково, что отношение амплитуд соседних колебаний равно ρ, то отклонение φ, соответствующее точке равновесия, есть $\varphi=\frac{\vartheta_0+\rho\vartheta_1}{1+\rho}$, где ϑ_0 — нулевое показание шкалы, а ϑ_1 — максимальное отклонение при первом колебании.

Таким способом можно вычислить отклонение, не дожидаясь, пока магнит придет в состояние покоя в новом положении равновесия.

Как выполнить серию наблюдений

746. Наилучший способ для проведения значительного числа измерений постоянного тока состоит в том, чтобы наблюдать три элонгации при положительном направлении тока, далее разомкнуть контакт примерно на время одного

Рис. 58



колебания, с тем чтобы магнит перешел в положение отрицательного отклонения, затем изменить направление тока на противоположное и наблюдать три последовательные элонгации на отрицательной стороне, далее снова прервать контакт на время одного колебания и повторить наблюдения на положительной стороне и так далее, пока не будет произведено достаточное число наблюдений. При этом исключаются ошибки, которые могут возникнуть из-за изменения направления земной магнитной силы в течение времени наблюдения. Оператор, тщательно следя за временем замыкания и размыкания контакта, может легко регулировать размах колебаний, так чтобы сделать их достаточно малыми, но отчетливо различимыми. Движение магнита графически представлено на рис. 58, где абсцисса соответствует времени, а ордината — отклонению магнита. Если $\vartheta_1...\vartheta_6$ — наблюдаемые алгебраические значения элонгаций, то отклонение магнита определяется уравнением $8\varphi=\vartheta_1+2\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4-2\vartheta_5-\vartheta_6$.

Метод умножения

747. В некоторых случаях, когда отклонение магнита гальванометра очень мало, может быть целесообразно увеличить визуальный эффект путем изменения направления тока в надлежащие моменты времени, с тем чтобы магнит стал

совершать колебательные движения. Для этой цели после установления времени одного колебания магнита в положительном направлении пропускается ток в течение времени T, а затем в течение равного ему промежутка времени ток пропускается в отрицательном направлении и так далее. Когда движение магнита станет видимым, мы можем менять направление тока в моменты наибольшего отклонения.

Пусть магнит находится в положении крайнего положительного отклонения ϑ_0, а через катушку пропускается ток в отрицательном направлении. Тогда точкой равновесия будет φ, а максимальное отрицательное отклонение магнита ϑ_1 будет таким, что

$$-\rho(\varphi+\vartheta_1)=(\vartheta_0+\varphi), \text{ или } -\rho\vartheta_1=\vartheta_0+(\rho+1)\varphi.$$

Аналогично, если теперь ток сделать положительным на то время, пока магнит поворачивается в положение ϑ_2:

$$\rho\vartheta_2=-\vartheta_1+(\rho+1)\varphi, \text{ или } \rho^2\vartheta_2=\vartheta_0+(\rho+1)^2\varphi,$$

и если направление тока меняется на противоположное последовательно n раз, мы находим

$$(-1)^n\vartheta_n=\rho^{-n}\vartheta_0+\frac{\rho+1}{\rho-1}(1-\rho^{-n})\varphi,$$

откуда можно найти φ в виде

$$\varphi=(\vartheta_n-\rho^{-n}\vartheta_0)\frac{\rho-1}{\rho+1}\frac{1}{1-\rho^{-n}}.$$

Если число n столь велико, что величиной ρ^{-n} можно пренебречь, то это выражение принимает вид $\varphi=\vartheta_n\frac{\rho-1}{\rho+1}$.

Для применения этого метода при точных измерениях необходимо точно знать ρ — величину отношения амплитуд двух соседних колебаний, зависящую от сопротивлений, действующих на магнит. Неточности, возникающие из-за того, что трудно избежать неопределенности в значении ρ, обычно перевешивают преимущества больших угловых отклонений. И только когда мы хотим установить существование очень малых токов, создавая с их помощью видимое движение стрелки, этот метод действительно полезен.

Об измерении переходных токов

748. Когда ток длится только в течение небольшой доли времени колебания магнита гальванометра, общее количество электричества, перенесенное током, можно измерить через угловую скорость, сообщенную магниту за время прохождения тока; эту величину можно определить по величине максимального отклонения при первом колебании магнита.

Если мы пренебрежем сопротивлением, которое приводит к затуханию колебаний магнита, исследование становится очень простым.

Пусть γ — сила тока в произвольный момент времени, а Q — количество электричества, которое он переносит; тогда

$$Q=\int\gamma dt. \tag{1}$$

Пусть M — магнитный момент, A — момент инерции магнита вместе с подвешенной аппаратурой, а ϑ — угол, который образует магнит с плоскостью катушки; тогда

$$A\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+MH\sin\vartheta=MG\gamma\cos\vartheta. \tag{2}$$

Если время прохождения тока очень мало, мы можем произвести интегрирование по t в течение этого короткого промежутка времени, не принимая во внимание изменение ϑ, и мы найдем

$$A\frac{d\vartheta}{dt}=MG\cos\vartheta_0\int\gamma\,dt+C=MGQ\cos\vartheta_0+C. \tag{3}$$

Отсюда видно, что прохождение заряда Q создает момент количества движения магнита, равный $MGQ\cos\vartheta_0$, где ϑ_0 есть значение ϑ в момент прохождения тока. Если первоначально магнит находился в положении равновесия, мы можем положить $\vartheta_0=0$, $C=0$.

Далее магнит свободно поворачивается и достигает отклонения ϑ_1. Если сопротивление отсутствует, работа, совершаемая против магнитной силы за время этого перемещения, равна $MH(1-\cos\vartheta_1)$.

Энергия, сообщенная магниту током, равна $\frac{1}{2}A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$.

Приравнивая эти величины, мы находим

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{dt}\right)^2=2\frac{MH}{A}(1-\cos\vartheta_1), \tag{4}$$

откуда

$$\frac{d\vartheta}{dt}=2\sqrt{\frac{MH}{A}}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1=\frac{MG}{A}Q \text{ (согласно (3))}. \tag{5}$$

Но время T одного колебания магнита от состояния покоя до состояния покоя равно

$$T=\pi\sqrt{A/(MH)}, \tag{6}$$

и мы находим

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1, \tag{7}$$

где H — горизонтальная магнитная сила, G — коэффициент гальванометра, T — время одного колебания и ϑ_1 — величина первого максимального отклонения магнита.

749. Во многих реальных экспериментах углы максимального отклонения невелики, поэтому мы легко можем учесть действие сопротивления, ибо можем рассматривать уравнение движения как линейное уравнение.

Пусть магнит находится в положении равновесия в состоянии покоя, пусть ему мгновенно сообщена угловая скорость v, и пусть его первая элонгация равна ϑ_1.

Уравнение движения следующее:

$$\vartheta = Ce^{-\omega_1 t \operatorname{tg} \beta} \sin \omega_1 t, \tag{8}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = C\omega_1 \sec \beta e^{-\omega_1 t \operatorname{tg} \beta} \cos (\omega_1 t + \tag{9}$$

Когда $t=0$, $\vartheta=0$ и $\frac{d\vartheta}{dt} = C\omega_1 = v$.

Когда $\omega_1 t + \beta = \frac{\pi}{2}$,

$$\vartheta = Ce^{-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{tg}\beta} \cos \beta = \vartheta_1. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\vartheta_1 = \frac{v}{\omega_1} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{tg}\beta} \cos \beta. \tag{11}$$

Далее, согласно п. 741,

$$\frac{MH}{A} = \omega^2 = \omega_1^2 \sec^2 \beta, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\lambda}{\pi}, \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{T_1} \tag{13}$$

и в соответствии с уравнением (5)

$$v = \frac{MG}{A} Q. \tag{14}$$

Следовательно,

$$\vartheta_1 = \frac{QG}{H} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda^2}{T_1}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{15}$$

и

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T_1 \vartheta_1}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}}, \tag{16}$$

что дает выражение для величины первой элонгации через количество электричества в переходном токе и наоборот; здесь T_1 есть полученное из наблюдений время одного колебания с учетом влияния реального затухания. При малых λ мы можем пользоваться приближенной формулой

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) \vartheta_1. \tag{17}$$

Метод отдачи

750. Изложенный выше метод предполагает, что во время протекания через катушку переходного тока магнит находится в положении равновесия в состоянии покоя. Если мы желаем повторить опыт, мы должны ждать, пока магнит снова не окажется в состоянии покоя. В некоторых случаях, однако, когда мы можем создавать переходные токи равной интенсивности и можем делать это в любой момент времени по своему усмотрению, наиболее удобным для осуществ-

ления непрерывной серии измерений является следующий метод, описанный Вебером [3].

Предположим, что мы привели магнит в состояние колебательного движения при помощи переходного тока, величина которого характеризуется значением Q_0. Если для краткости мы запишем

$$\frac{G}{H}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{T_1}e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda}}=K, \tag{18}$$

то первая элонгация

$$\vartheta_1=KQ_0=a_1. \tag{19}$$

Мгновенно сообщенная вначале магниту скорость равна:

$$v_0=(MG/A)Q_0. \tag{20}$$

Когда магнит, возвращаясь, проходит через точку равновесия в отрицательном направлении, его скорость равна:

$$v_1=-v_0e^{-\lambda}. \tag{21}$$

Следующая отрицательная элонгация будет

$$\vartheta_2=-\vartheta_1e^{-\lambda}=b_1. \tag{22}$$

Когда магнит снова вернется в точку равновесия, его скорость будет равна

$$v_2=v_0e^{-2\lambda}. \tag{23}$$

Пусть теперь в тот момент времени, когда магнит находится в нулевой точке, через катушку пропущен мгновенный ток, полный заряд в котором равен $-Q$. Это изменит скорость магнита v_2 до величины v_2-v, где

$$v=(MG/A)Q. \tag{24}$$

Если Q больше, чем $Q_0e^{-2\lambda}$, то новая скорость будет отрицательной и равной $-(MG/A)(Q-Q_0e^{-2\lambda})$.

Магнит, таким образом, станет двигаться в противоположном направлении, и следующая элонгация будет отрицательной:

$$\vartheta_3=-K(Q-Q_0e^{-2\lambda})=c_1=-KQ+\vartheta_1e^{-2\lambda}. \tag{25}$$

После этого магниту предоставляется возможность достигнуть положительной элонгации

$$\vartheta_4=-\vartheta_3e^{-\lambda}=d_1=e^{-\lambda}(KQ-a_1e^{-2\lambda}), \tag{26}$$

а когда он вновь придет в точку равновесия, пропускается положительный ток с общим зарядом Q. Это отбрасывает магнит обратно в положительном направлении до положительной элонгации

$$\vartheta_5=KQ+\vartheta_3e^{-2\lambda}, \tag{27}$$

[3] Gauss and Weber, *Resultate des Magnetischen Vereins*, 1838, p. 98.

или, называя это первой элонгацией второй серии из четырех,

$$a_2 = KQ(1 - e^{-2\lambda}) + a_1 e^{-4\lambda}. \tag{28}$$

Продолжая аналогичным образом, т. е. наблюдая две элонгации + и —, затем посылая отрицательный ток и наблюдая две элонгации — и +, затем снова посылая положительный ток и так далее, мы получаем серию, состоящую из наборов по четыре элонгации, в каждой из которых

$$(d - b)/(a - c) = e^{-\lambda} \tag{29}$$

и

$$KQ = \frac{(a-b)e^{-2\lambda} + d - c}{1 + e^{-\lambda}}; \tag{30}$$

Если проведено n таких наблюдений, то логарифмический декремент мы находим из уравнения

$$\frac{\Sigma(d) - \Sigma(b)}{\Sigma(a) - \Sigma(c)} = e^{-\lambda}, \tag{31}$$

а Q — из уравнения

$$KQ(1 + e^{-\lambda})(2n - 1) = \Sigma_n(a - b - c + d)(1 + e^{-2\lambda}) - (a_1 - b_1) - (d_n - c_n)e^{-2\lambda}. \tag{32}$$

Движение магнита при использовании метода отдачи графически представлено на рис. 59, где абсцисса представляет время, а ордината — отклонение магнита в этот момент времени, см. п. 760.

Метод умножения

751. Если пропускать переходный ток каждый раз, когда магнит проходит через нулевую точку, причем всегда так, чтобы увеличивать скорость магнита, то для последовательных элонгаций ϑ_1, ϑ_2 будем иметь

$$\vartheta_2 = -KQ - e^{-\lambda}\vartheta_1, \tag{33}$$

$$\vartheta_3 = KQ - e^{-\lambda}\vartheta_2, \tag{34}$$

Предельное значение, к которому стремится элонгация после большого числа колебаний, получается, если положить $\vartheta_n = -\vartheta_{n-1}$; откуда мы находим

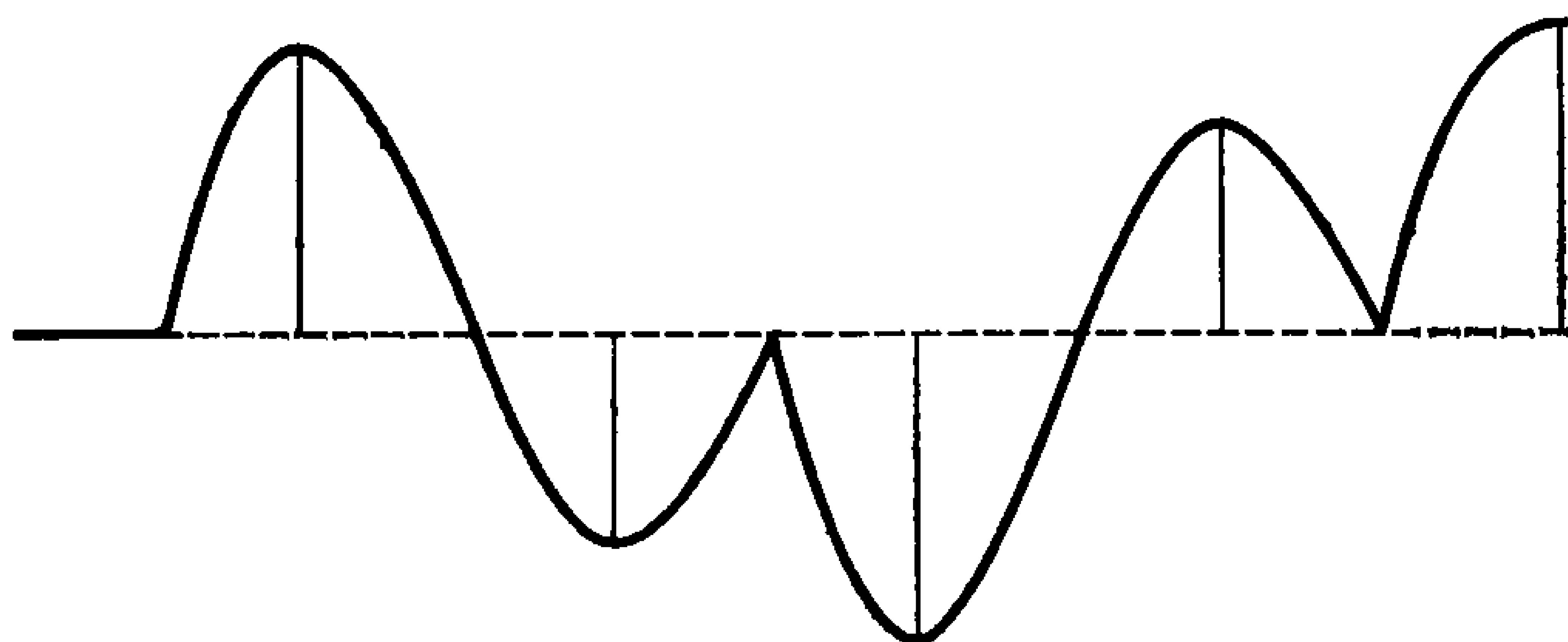
$$\vartheta = \pm \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} KQ. \tag{35}$$

Если величина λ мала, то значение предельной элонгации может быть большим, а поскольку такой опыт продолжается долго и предполагает точное определение λ (малые ошибки в λ вносят большую ошибку при определении Q), то этот метод редко используется для количественных измерений, его следует использовать для получения данных о наличии или отсутствии токов, слишком слабых для того, чтобы их можно было обнаружить непосредственно.

Во всех опытах, в которых переходные токи воздействуют на движущийся магнит гальванометра, существенно, чтобы весь ток успел пройти за то время, пока расстояние от магнита до нулевой точки составляет малую долю полной

элонгации. Период колебаний поэтому должен быть большим по сравнению с временем, необходимым для создания тока, а оператор должен постоянно следить за движением магнита, так чтобы регулировать момент прохождения тока в соответствии с моментом прохождения магнита через точку равновесия.

Рис. 59



Чтобы оценить ошибку, вносимую в связи с неспособностью оператора включить ток в необходимый момент времени, заметим, что увеличение элонгации, обусловленное импульсом, меняется как

$$e^{\varphi \operatorname{tg} \beta} \cos(\varphi + \beta),$$

о максимально, когда $\varphi=0$. Следовательно, ошибка, возникающая из-за несвоевременности включения тока, всегда будет приводить к недооценке его величины; ошибку можно оценить, сравнив с единицей косинус фазы колебания в момент прохождения тока.

ГЛАВА XVII

СРАВНЕНИЕ КАТУШЕК

Экспериментальное определение электрических постоянных катушки

752. В п. 717 мы поняли, что радиус катушки чувствительного гальванометра должен быть мал, но катушка при этом должна содержать много витков провода. Определение электрических постоянных такой катушки путем прямого измерения ее формы и размеров было бы чрезвычайно затруднительно даже при наличии доступа к каждому витку провода для его измерения. Фактически же не только большая часть витков полностью скрыта под внешними витками, но у нас даже нет уверенности в том, что давление внешних витков не изменило формы внутренних после наматывания провода.

Следовательно, электрические постоянные катушки лучше измерять путем прямого электрического сравнения с некоторой эталонной катушкой, постоянные которой известны.

Поскольку размеры эталонной катушки должны определяться из реальных измерений, она должна иметь большие размеры, с тем чтобы неизбежные ошибки измерения ее диаметра и периметра окружности оказались бы по возможности малыми по сравнению с измеряемыми величинами. Каркас, внутри которого

наматывается катушка, должен иметь прямоугольное сечение, а размеры сечения должны быть малы по сравнению с радиусом катушки. Это необходимо не столько для уменьшения поправок, связанных с конечным размером сечения, сколько для того, чтобы устранить всякую неопределенность относительно расположения тех витков катушки, которые скрыты под внешними витками [1].

Основные постоянные, которые мы хотим определить, следующие.

(1). Магнитная сила, создаваемая в центре катушки единичным током. В п. 700 эта величина обозначена через G_1. (2). Магнитный момент катушки с единичным током. Это величина g_1.

753. *Как определить* G_1. Поскольку катушки работающих гальванометров гораздо меньше эталонной катушки, мы поместим гальванометр внутрь эталонной катушки так, чтобы их центры совпадали, а плоскости обеих катушек были вертикальны и параллельны земной магнитной силе. Таким образом, мы получили разностный гальванометр, одной из катушек которого является эталонная катушка с известным значением G_1, тогда как для второй катушки значение этой величины G_1' мы должны определить.

На магнит, подвешенный в центре катушки гальванометра, действуют токи обеих катушек. Если сила тока в эталонной катушке равна γ, а в катушке гальванометра γ', и если эти токи, текущие в противоположных направлениях, производят отклонение магнита δ, то

$$H \operatorname{tg} \delta = G_1'\gamma' - G_1\gamma, \tag{1}$$

где H — горизонтальная магнитная сила Земли.

Если токи подобраны так, что отклонение отсутствует, мы можем найти G_1' из уравнения

$$G_1' = (\gamma/\gamma')G_1. \tag{2}$$

Отношение γ/γ' можно определить несколькими способами. Поскольку значение G_1 обычно для гальванометра больше, чем для эталонной катушки, мы можем построить контур таким образом, чтобы весь ток вначале протекал через эталонную катушку, а далее разделялся так, чтобы ток γ' протекал через гальванометр и катушки сопротивления с общим сопротивлением R_1, а оставшийся ток $\gamma - \gamma'$

---

[1] Большие тангенс-гальванометры иногда делают с одним круговым проводящим кольцом значительной толщины, обладающим достаточной жесткостью, чтобы сохранять свою форму без какой-либо опоры. Но для эталонного гальванометра этот вариант нехорош. Распределение тока внутри проводника зависит от относительной проводимости его различных частей. Поэтому любые скрытые разрывы однородности металла могут приводить к тому, что основной поток электричества будет протекать ближе либо к внешнему, либо к внутреннему ободу кругового кольца. При этом истинный путь тока становится неопределенным. Кроме того, при однократном протекании тока по кольцу необходимо принимать особые меры для предотвращения какого-либо действия на подвешенный магнит, обусловленного током на его пути к кольцу и от кольца, ибо в этом случае ток в электродах равен току, циркулирующему по окружности. При построении многих приборов действие этой части тока, по-видимому, совсем упущено из виду.

Наиболее совершенный метод состоит в том, чтобы один из электродов изготавливать в виде металлической трубки, а другой — в виде провода, покрытого изолирующим материалом и помещенного внутрь трубки концентрично ей. При таком устройстве внешнее действие электродов равно нулю (п. 683).

протекал через другой набор катушек сопротивления, общее сопротивление которых равно R_2.

Тогда в соответствии с п. 276 мы имеем

$$\gamma' R_1 = (\gamma - \gamma') R_2, \tag{3}$$

$$\gamma/\gamma' = (R_1 + R_2)/R_2, \tag{4}$$

$$G_1' = G_1 (R_1 + R_2)/R_2. \tag{5}$$

При наличии неопределенности в фактическом значении величины сопротивления катушки гальванометра (обусловленной, скажем, неопределенностью ее температуры) можно добавить к ней катушку сопротивления, так чтобы сопротивление самого гальванометра составляло малую часть R_1 и потому вносило бы лишь небольшую неопределенность в окончательный результат.

754. *Для определения* g_1 — магнитного момента малой катушки, обусловленного протекающим по ней единичным током,— магнит по-прежнему остается подвешенным в центре эталонной катушки, а малая катушка перемещается параллельно самой себе вдоль общей оси обеих катушек до тех пор, пока один и тот же ток, текущий по катушкам в противоположных направлениях, перестанет отклонять магнит. Если расстояние между центрами катушек равно r, мы имеем

$$G_1 = 2\frac{g_1}{r^3} + 3\frac{g_2}{r^4} + 4\frac{g_3}{r^5} + \ldots . \tag{6}$$

Повторяем опыт, поместив малую катушку по другую сторону от эталонной катушки; измеряя расстояние между положениями малой катушки, мы исключаем неизвестную ошибку в определении центров магнита и малой катушки и избавляемся от членов g_2, g_4, ...

Если эталонная катушка устроена так, что можно пропустить ток через половину ее витков, задавая тем самым другое значение G_1, мы можем определить новое значение r и, таким образом (как и в п. 454), исключить член, содержащий g_3.

Часто, однако, оказывается возможным определить g_3 путем непосредственных, достаточно точных измерений малой катушки, что позволяет вычислить величину поправки к g_1 в соответствии с уравнением

$$g_1 = \frac{1}{2} G_1 r^3 - 2\frac{g_3}{r^2}, \tag{7}$$

где, согласно п. 700,

$$g_3 = -\frac{1}{8}\pi a^2 (6a^2 + 3\xi^2 - 2\eta^2).$$

Сравнение коэффициентов индукции

755. Существует лишь небольшое число случаев, когда легко выполнить непосредственное вычисление коэффициентов индукции, исходя из формы и положения контуров. Для достижения достаточной степени точности необходимо, чтобы расстояние между контурами допускало точное измерение. Но

когда расстояние между контурами достаточно велико, для того чтобы ошибки измерений не приводили к большим ошибкам в результате, сама величина коэффициента индукции должна сильно уменьшиться. Однако во многих экспериментах требуется сделать коэффициент индукции большим, а это можно осуществить, только тесно сблизив контура. В этом случае метод прямых измерений неприменим, и для определения коэффициента индукции необходимо сравнение его с коэффициентом индукции пары катушек, сконструированных так, что их коэффициент индукции может быть получен путем прямых измерений и расчетов.

Это можно сделать следующим образом.

Пусть A и a будут эталонной парой катушек, а B и b — катушками, которые необходимо сравнить с ними. Соединим A и B в одну цепь и поместим электроды

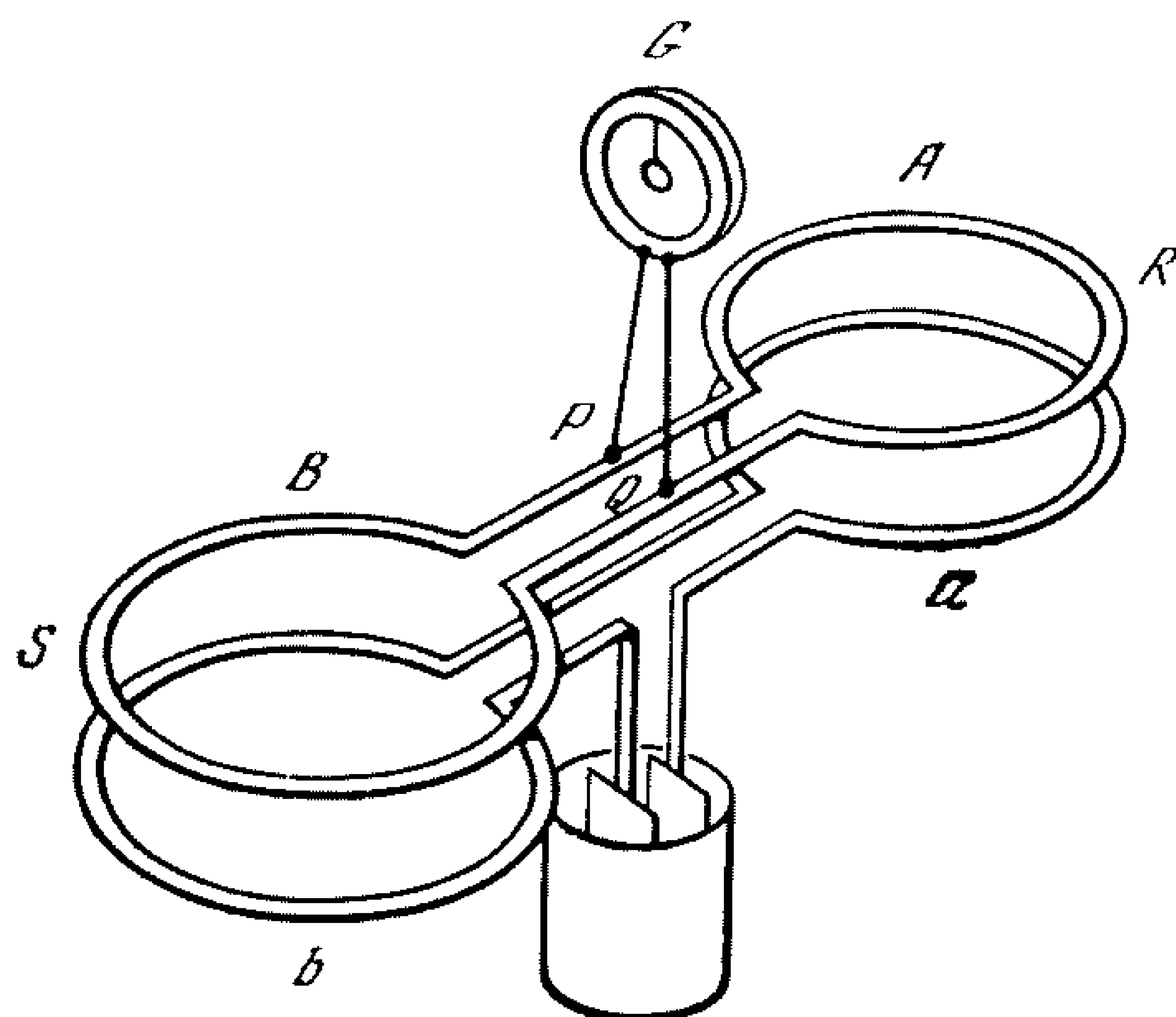


Рис. 60

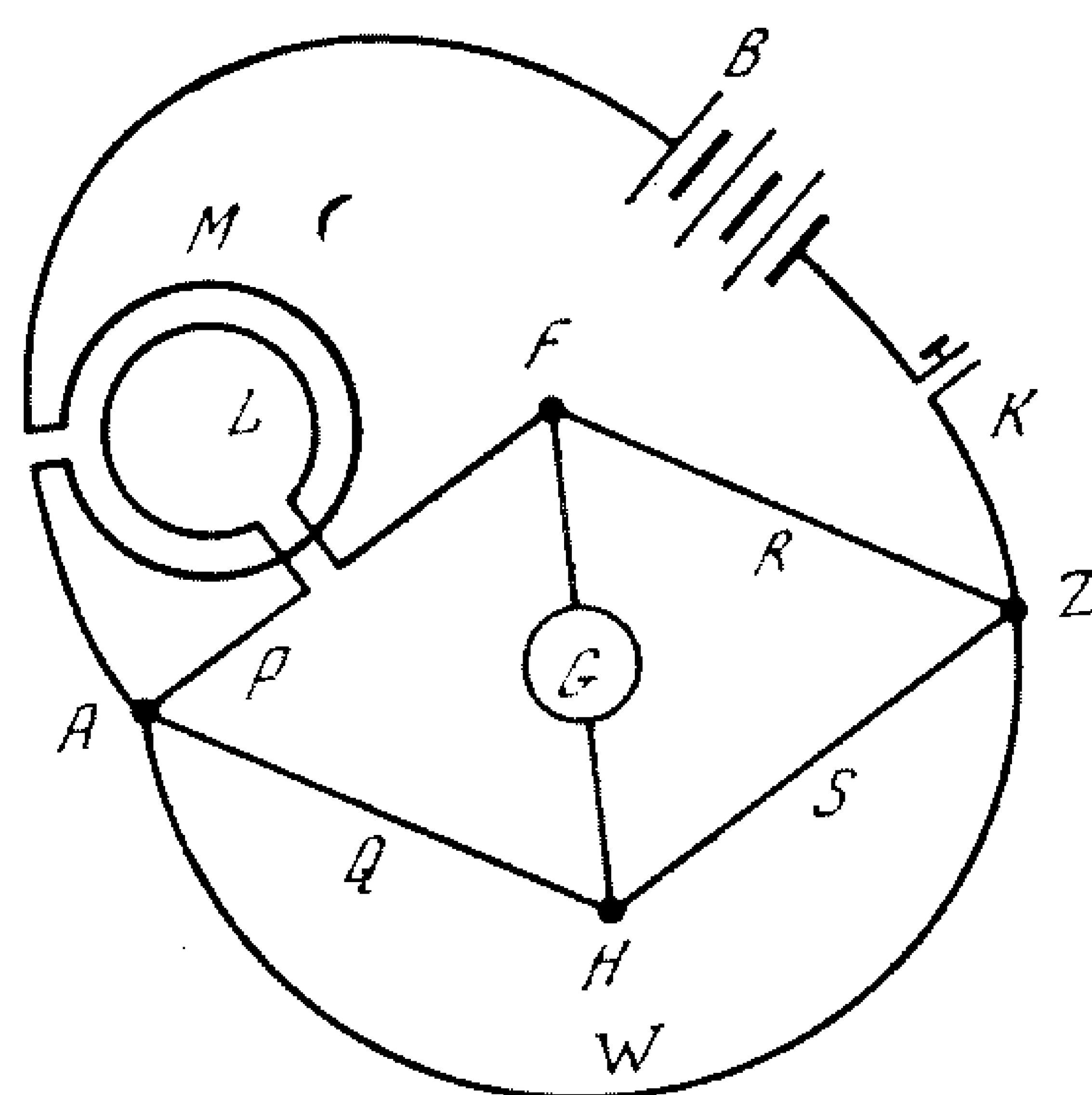


Рис. 61

гальванометра G в точках P и Q; при этом сопротивление PAQ равно R, сопротивление QBP равно S, а K является сопротивлением гальванометра. Включим a и b в одну цепь с батареей [рис. 60].

Пусть ток в A равен $\dot{x}$, ток в B равен $\dot{y}$, ток в гальванометре равен $\dot{x}—\dot{y}$ и ток в цепи батареи равен γ.

Тогда, если коэффициент индукции между A и a равен M_1, а между B и b равен M_2, то интегральный индукционный ток, протекающий через гальванометр при отключении батареи, равен

$$x-y=\gamma\frac{\frac{M_2}{S}-\frac{M_1}{R}}{1+\frac{K}{R}+\frac{K}{S}}. \qquad (8)$$

Подбирая сопротивления R и S такими, чтобы при замыкании или размыкании цепи батареи через гальванометр не протекал ток, можно, измерив отношение S к R, определить отношение M_2 к M_1.

Сравнение коэффициента самоиндукции с коэффициентом взаимной индукции

756. Пусть в плечо AF мостика Уитстона поставлена катушка, коэффициент самоиндукции которой мы хотим найти. Назовем его L.

В соединяющий провод между точкой A и батареей поставлена еще одна катушка. Коэффициент взаимной индукции между этой катушкой и катушкой в AF равен M. Он может быть измерен методом, описанным в п. 755.

Если ток от A к F равен x, а ток от A к H равен y, то ток через B от Z к A будет равен $x+y$ [рис. 61]. Внешняя электродвижущая сила на пути от A к F равна

$$A-F=Px+L\frac{dx}{dt}+M\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Внешняя электродвижущая сила вдоль AH равна

$$A-H=Qy. \tag{10}$$

Если гальванометр, помещенный между F и H, не показывает ни постоянного ни переходного тока, то, поскольку $H-F=0$, из (9) и (10) следует

$$Px=Qy \tag{11}$$

и

$$L\frac{dx}{dt}+M\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)=0, \tag{12}$$

откуда

$$L=-\left(1+\frac{P}{Q}\right)M. \tag{13}$$

Так как величина L всегда положительна, коэффициент M должен быть отрицательным, т. е. токи в катушках, помещенных в P и B, должны течь в противоположных направлениях. При выполнении эксперимента мы можем начать с регулировки сопротивлений, добиваясь равенства

$$PS=QR, \tag{14}$$

что является условием отсутствия постоянного тока, и затем установить расстояние между катушками, при котором гальванометр при подключении или отключении батареи перестанет показывать переходный ток. Если же это расстояние не поддается регулировке, мы можем избавиться от переходного тока, меняя сопротивления Q и S таким образом, чтобы их отношение оставалось неизменным.

Если эта двойная регулировка оказывается слишком трудной, можно принять третий метод. Начав с положения, при котором переходный ток, обусловленный самоиндукцией, слегка превосходит ток взаимной индукции, мы затем можем избавиться от этого неравенства, поместив между A и Z проводник с сопротивлением W. Введение W не влияет на условие отсутствия постоянного тока через гальванометр. Поэтому мы можем избавиться от переходного тока регулировкой одного лишь сопротивления W. Когда мы сделаем это, значение L будет равно

$$L=-\left(1+\frac{P}{Q}+\frac{P+R}{W}\right)M. \tag{15}$$

Сравнение коэффициентов самоиндукции двух катушек

757. Поставим катушки в два прилегающих плеча мостика Уитстона. Пусть L и N будут коэффициентами самоиндукции катушек, помещенных соответственно в P и R, тогда условие отсутствия тока в гальванометре (см. рис. 61) будет таким:

$$\left(Px + L\frac{dx}{dt}\right)Sy = Qy\left(Rx + N\frac{dx}{dt}\right), \tag{16}$$

откуда $PS = QR$, для того чтобы не было постоянного тока, (17)

и $L/P = N/R$, для того чтобы не было переходного тока. (18)

Следовательно, соответствующей регулировкой сопротивлений можно избавиться как от постоянного, так и от переходного тока, после чего отношение L к N можно определить путем сравнения сопротивлений.

ГЛАВА XVIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЕДИНИЦА СОПРОТИВЛЕНИЯ

Об определении сопротивления катушки в электромагнитной системе единиц

758. Сопротивление проводника определяется как отношение численного значения электродвижущей силы к численному значению тока, создаваемого ею в проводнике. Определение величины тока в электромагнитной мере можно осуществить при помощи эталонного гальванометра, если известна величина земной магнитной силы. Более сложным является определение электродвижущей силы, поскольку непосредственно вычислить ее значение мы можем лишь в том случае, когда она возникает в результате движения контура относительно известной магнитной системы.

759. Первое определение сопротивления провода в электромагнитных единицах было выполнено Кирхгоффом [1]. Он взял две катушки известной конфигурации A_1 и A_2 и подсчитал их коэффициент взаимной индукции, исходя из геометрических данных относительно их формы и расположения. Эти катушки были включены в контур, содержащий также гальванометр G и батарею B; две точки контура — точка P, расположенная между катушками, и точка Q, расположенная между батареей и гальванометром,— были соединены проводом, сопротивление которого R необходимо измерить [рис. 62].

Когда ток постоянен, он делится между сопротивлением и цепью гальванометра, вызывая некоторое постоянное отклонение гальванометра. Если теперь катушку A_1 быстро убрать от A_2, поместив ее в такое положение, при котором коэффициент взаимной индукции между A_1 и A_2 равен нулю (п. 538), то в обоих контурах создается индукционный ток и стрелка гальванометра приобретает

[1] «Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirten elektrischer Ströme abhängt». Pogg. Ann., LXXVI (April 1849).

некоторый импульс, приводящий к определенному кратковременному отклонению.

Сопротивление провода R находится путем сравнения стационарного отклонения, обусловленного постоянным током, и кратковременного отклонения, обусловленного током индукции.

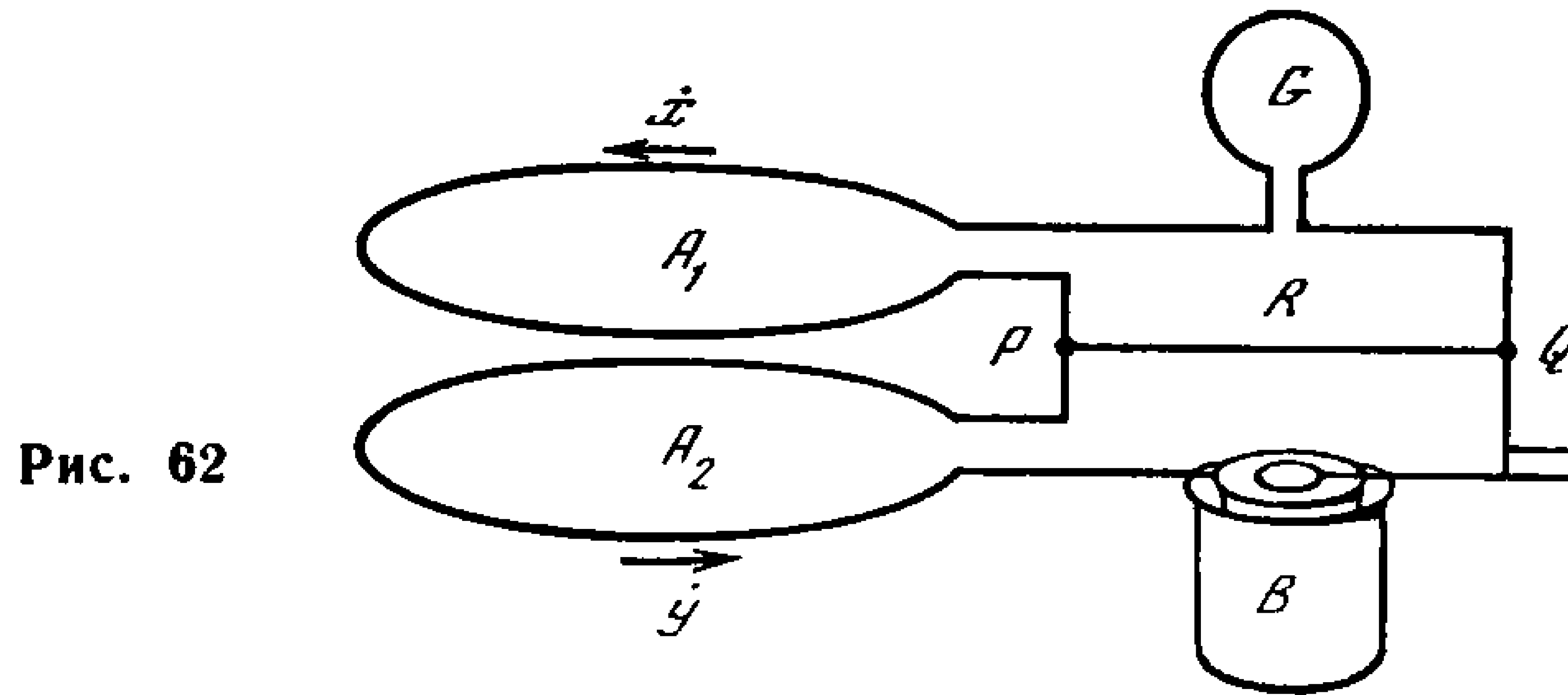


Рис. 62

Пусть сопротивление участка QGA_1P равно K, участка PA_2BQ — B, а участка PQ — R.

Пусть L, M и N — коэффициенты индукции A_1 и A_2.

Пусть $\dot{x}$ — ток в G, $\dot{y}$ — ток в B; тогда ток, текущий от P к Q, равен $\dot{x}-\dot{y}$.

Пусть E — электродвижущая сила батареи, тогда

$$(K+R)\dot{x}-R\dot{y}+\frac{d}{dt}(L\dot{x}+M\dot{y})=0, \tag{1}$$

$$-R\dot{x}+(B+R)\dot{y}+\frac{d}{dt}(M\dot{x}+N\dot{y})=E. \tag{2}$$

Когда токи постоянны и все находится в состоянии покоя,

$$(K+R)\dot{x}-R\dot{y}=0. \tag{3}$$

Если теперь из-за удаления A_1 от A_2 коэффициент M внезапно становится равным нулю, то, интегрируя по t, получим

$$(K+R)x-Ry-M\dot{y}=0, \tag{4}$$

$$-Rx+(B+R)y-M\dot{x}=\int E\,dt=0, \tag{5}$$

откуда

$$x=M\frac{(B+R)\dot{y}+R\dot{x}}{(B+R)(K+R)-R^2}. \tag{6}$$

Подставляя значение $\dot{y}$, выраженное из (3) через $\dot{x}$, находим

$$\frac{x}{\dot{x}}=\frac{M}{R}\frac{(B+R)(K+R)+R^2}{(B+R)(K+R)-R^2} \tag{7}$$

$$=\frac{M}{R}\left\{1+\frac{2R^2}{(B+R)(K+R)}+\ldots\right\}. \tag{8}$$

Когда и B и K велики по сравнению с R, как это имеет место в опыте Кирхгоффа, то это уравнение сводится к следующему:

$$\frac{x}{\dot{x}}=\frac{M}{R}. \tag{9}$$

Одна из этих величин — x — находится по отбросу стрелки гальванометра, обусловленному индукционным током, см. п. 768. Постоянный ток $\dot{x}$ находится по стационарному отклонению, обусловленному этим током, см. п. 746. Величина M находится либо непосредственными расчетами, исходя из геометрических данных, либо путем сравнения с парой катушек, для которой такой расчет уже проделан, см. п. 755. Через эти три величины можно определить R в электромагнитной мере.

Эти методы требуют определения периода колебаний магнита гальванометра а также логарифмического декремента этих колебаний.

Веберовский метод переходных токов [2]

760. Катушка значительных размеров укрепляется на оси таким образом, чтобы она могла вращаться вокруг вертикального диаметра. Провод этой катушки соединен с проводом тангенс-гальванометра и образует с ним единый контур. Пусть сопротивление этого контура равно R и пусть большая катушка, ориентированная своим положительным торцом перпендикулярно магнитному меридиану, быстро повернулась на полоборота. Из-за наличия земной магнитной силы возникает индуцированный ток; полное количество электричества в этом токе, измеренное в электромагнитных единицах, будет равно

$$Q=2g_1H/R, \tag{1}$$

где g_1 — магнитный момент катушки, когда по ней протекает единичный ток, который в случае большой катушки можно определить непосредственно, измерив геометрические размеры катушки и подсчитав сумму площадей ее витков; H — горизонтальная составляющая земного магнетизма и R — сопротивление контура, образованного катушкой и гальванометром. Этот ток приводит в движение магнит гальванометра.

Если первоначально магнит покоился, а перемещение катушки произошло за время, составляющее малую долю периода колебаний магнита, то, пренебрегая сопротивлением движению магнита, согласно п. 748, имеем

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin(\vartheta/2), \tag{2}$$

где G — постоянная гальванометра, T — время одного колебания магнита (полупериод), ϑ — угол максимального наблюдаемого отклонения. Из этих уравнений получаем

$$R=\pi G g_1\frac{1}{T\sin(\vartheta/2)}. \tag{3}$$

Величина H не фигурирует в этом результате при условии, что она одинакова в месте расположения катушки и в месте расположения гальванометра. Не

[2] *Elekt. Maasb.*; or Pogg. Ann., LXXXII, p. 337—369 (1851).

следует считать, что это всегда имеет место; в этом следует убедиться, сравнивая периоды колебаний одного и того же магнита сначала в одном месте, а затем — в другом.

761. Чтобы выполнить серию наблюдений, Вебер вначале устанавливал катушку параллельно магнитному меридиану. Затем поворачивал ее положительным торцом к северу и наблюдал первую элонгацию магнита, обусловленную отрицательным током. После этого он наблюдал вторую элонгацию свободно колеблющегося магнита, а когда магнит на пути назад проходил точку равновесия, поворачивал катушку положительным торцом к югу. Это отбрасывало магнит в направлении положительного торца. Серия измерений продолжалась, как и в п. 750, и ее результат давал поправку к значению сопротивления. Таким способом устанавливалась величина сопротивления составного контура, образованного катушкой и гальванометром.

Во всех таких экспериментах для получения достаточно больших отклонений провод следует изготавливать из меди — металла, который, хотя и является наилучшим проводником, обладает тем недостатком, что его сопротивление существенно меняется при изменении температуры. Определение же температуры каждой из частей прибора также весьма затруднительно. Поэтому, чтобы обеспечить постоянство результатов, получаемых в этом опыте, сопротивление контура следует сравнивать с сопротивлением тщательно изготовленной резистивной катушки как до, так и после каждого опыта.

Веберовский метод, состоящий в наблюдении декремента колебаний магнита

762. Магнит, обладающий значительным магнитным моментом, подвешивается в центре катушки гальванометра. Измеряются период и логарифмический декремент колебаний вначале при разомкнутом, а затем при замкнутом контуре гальванометра; проводимость катушки гальванометра выводится из того сопротивления, которое токи, индуцируемые в ней движением магнита, оказывают этому движению.

Если T — наблюдаемое время одного колебания, а λ — неперовский логарифмический декремент каждого отдельного колебания, то, записав

$$\omega=\pi/T \tag{1}$$

и

$$\alpha=\lambda/T, \tag{2}$$

получим уравнение движения магнита в виде

$$\varphi=Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t+\beta). \tag{3}$$

Это выражает установленный из наблюдений характер движения. Мы должны сравнить его с динамическими уравнениями движения.

Пусть M — коэффициент индукции между катушкой гальванометра и подвешенным магнитом. Его можно представить в виде

$$M=G_1g_1P_1(\vartheta)+G_2g_2P_2(\vartheta)+\ldots, \tag{4}$$

где коэффициенты G_1, G_2, ... относятся к катушке, g_1, g_2, ... — к магниту, а $P_1(\vartheta)$, $P_2(\vartheta)$, ... — зональные гармоники, зависящие от угла между осями катушки и магнита, см. п. 700. Располагая определенным образом катушки

гальванометра и составляя подвешенный магнит из нескольких магнитов, расположенных рядом друг с другом и на соответствующих расстояниях друг от друга, можно сделать так, что в выражении для M все члены после первого будут пренебрежимо малы по сравнению с ним. Если мы положим также $\varphi = (\pi/2) - \vartheta$, то сможем написать

$$M = Gm\sin\varphi, \tag{5}$$

где G — главный коэффициент гальванометра, m — магнитный момент магнита, φ — угол между осью магнита и плоскостью катушки, который в этом опыте всегда является малым.

Если L — коэффициент самоиндукции катушки, R — ее сопротивление, а γ — ток в катушке, то

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M) + R\gamma = 0, \tag{6}$$

или

$$L\frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{7}$$

Момент силы, с которым ток γ действует на магнит, равен $\gamma\,(dM/d\varphi)$, или $Gm\gamma\cos\varphi$. В этом опыте угол φ настолько мал, что мы можем положить $\cos\varphi = 1$.

Предположим, что уравнение движения при разомкнутом контуре

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = 0, \tag{8}$$

где A — момент инерции подвешенной аппаратуры; $B\,(d\varphi/dt)$ выражает сопротивление, возникающее из-за вязкости воздуха, нити подвеса и т. п., а $C\varphi$ выражает момент силы, возникающий из-за действия земного магнетизма, кручения устройства подвеса и т. п., который стремится возвратить магнит в положение равновесия.

Уравнение движения при учете действия тока будет

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = Gm\gamma. \tag{9}$$

Чтобы найти движение магнита, мы должны это уравнение скомбинировать с (7) и исключить γ. В результате получим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\left(L\frac{d}{dt} + R\right)\left(A\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C\right)\varphi + G^2m^2\frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{10}$$

Нам, однако, не придется решать это уравнение, поскольку параметрами задачи являются наблюдаемые элементы движения магнита и именно из них мы должны определить величину R.

Пусть значения α и ω в уравнении (3) равны α_0 и ω_0, когда контур разомкнут. В этом случае сопротивление R бесконечно, и уравнение (10) сводится к (8). Таким образом, мы находим

$$B = 2A\alpha_0, \qquad C = A(\alpha_0^2 + \omega_0^2). \tag{11}$$

Разрешая уравнение (10) относительно R и записывая

$$\frac{d}{dt} = -(\alpha + i\omega), \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{12}$$

мы находим

$$R = \frac{G^2m^2}{A}\frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 + \omega_0^2} + L(\alpha + i\omega). \tag{13}$$

Так как величина ω обычно много больше величины α, то наилучшее значение для R можно получить, приравняв нулю члены, стоящие перед $i\omega$:

$$R = \frac{G^2m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{1}{2}L\left(3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0}\right). \tag{14}$$

Мы можем также получить значение R путем приравнивания нулю членов, не содержащих i, но поскольку эти члены малы, то такое уравнение полезно только как средство проверки точности наблюдений. Из этих уравнений мы находим следующее проверочное уравнение:

$$G^2m^2\{\alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2\}$$
$$= LA\{(\alpha - \alpha_0)^4 + 2(\alpha - \alpha_0)^2(\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2\}. \tag{15}$$

Поскольку член $LA\omega^2$ очень мал по сравнению с G^2m^2, это уравнение дает

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \alpha_0^2 - \alpha^2 \tag{16}$$

и уравнение (14) можно записать так:

$$R = \frac{G^2m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + 2L\alpha. \tag{17}$$

В этом выражении G можно определить либо в результате измерения линейных размеров катушки гальванометра, либо лучше, путем сравнения с эталонной катушкой в соответствии с методом п. 753. A является моментом инерции магнита и подвешенной вместе с ним аппаратуры; его следует находить соответствующим динамическим методом; величины ω, ω_0, α и α_0 устанавливаются из наблюдений.

Определение величины m — магнитного момента подвешенного магнита — является наиболее трудной частью исследования, так как он подвержен влиянию температуры, земной магнитной силы, механических воздействий; поэтому необходимо проявлять особую внимательность, чтобы при измерении этой величины магнит находился точно в таких же условиях, в которых он находится во время колебаний.

Второй член в выражении для R — член, содержащий L,— менее важен, поскольку обычно он мал по сравнению с первым членом. Величину L можно определить либо расчетным путем для катушки, форма которой известна, либо из эксперимента с избыточным током индукции, см. п. 756.

Томсоновский метод вращающейся катушки

763. Этот метод был предложен Томсоном Комитету Британской Ассоциации Электрических Стандартов; эксперимент был выполнен Бэлфором Стьюартом (Balfour Stewart), Флемингом Дженкином (Fleeming Jenkin) и автором в 1863 г.[3]

Круглая катушка приводится во вращение с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси. В центре катушки на шелковой нити подвешивается небольшой магнит. Электрический ток в катушке индуцируется земным магнетизмом, а также подвешенным магнитом. Ток этот является периодическим; в различные интервалы времени каждого оборота он протекает через провод катушки в противоположных направлениях, но действие тока на подвешенный магнит создает постоянное отклонение от магнитного меридиана в направлении вращения катушки.

764. Пусть H — горизонтальная составляющая земного магнетизма.

Пусть γ — сила тока в катушке,

g — общая площадь, охватываемая всеми витками провода;

G — магнитная сила в центре катушки, создаваемая единичным током;

L — коэффициент самоиндукции катушки;

M — магнитный момент подвешенного магнита;

ϑ — угол между плоскостью катушки и магнитным меридианом;

φ — угол между осью подвешенного магнита и магнитным меридианом;

A — момент инерции подвешенного магнита;

$MH\tau$ — коэффициент кручения нити подвеса;

α — азимут магнита в отсутствии кручения;

R — сопротивление катушки.

Кинетическая энергия системы равна

$$T=\frac{1}{2}L\gamma^2-Hg\gamma\sin\vartheta-MG\gamma\sin(\vartheta-\varphi)+MH\cos\varphi+\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Первый член, равный $L\gamma^2/2$, выражает энергию тока, зависящую только от самой катушки. Второй член определяется взаимодействием тока и земного магнетизма, третий — взаимодействием тока и магнетизма подвешенного магнита, четвертый — взаимодействием магнетизма подвешенного магнита и земного магнетизма, последний член выражает кинетическую энергию вещества, образующего магнит и движущуюся вместе с ним подвешенную аппаратуру.

Потенциальная энергия подвешенной аппаратуры, возникающая из-за кручения нити, равна

$$V=\frac{MH}{2}\tau(\varphi^2-2\varphi\alpha). \quad (2)$$

Электромагнитный импульс тока равен

$$p=\frac{dT}{d\gamma}=L\gamma-Hg\sin\vartheta-MG\sin(\vartheta-\varphi), \quad (3)$$

и если R — сопротивление катушки, то уравнение для тока имеет вид

$$R\gamma+\frac{d^2T}{dt\,d\gamma}=0, \quad (4)$$

[3] См. *Report of the British Association for* 1863, p. 111—176.

или, поскольку $\vartheta=\omega t$, (5)

$$\left(R+L\frac{d}{dt}\right)\gamma=Hg\omega\cos\vartheta+MG(\omega-\dot{\varphi})\cos(\vartheta-\varphi). \qquad (6)$$

765. И из теории, и из наблюдений одинаково следует, что азимут магнита φ подвержен двум видам периодических изменений. Одно из них — свободные колебания, период которых зависит от интенсивности земного магнетизма и равен, согласно эксперименту, нескольким секундам. Другое — вынужденные колебания с периодом, равным половине периода вращения катушки и, как мы увидим далее, с необнаружимо малой амплитудой. Следовательно, при определении γ мы можем считать угол φ практически постоянным.

Таким образом, мы находим

$$\gamma=\frac{Hg\omega}{R^2+L^2\omega^2}(R\cos\vartheta+L\omega\sin\vartheta)+ \qquad (7)$$

$$+\frac{MG\omega}{R^2+L^2\omega^2}\{R\cos(\vartheta-\varphi)+L\omega\sin(\vartheta-\varphi)\}+ \qquad (8)$$

$$+Ce^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (9)$$

Когда вращение происходит с постоянной скоростью, последний член в этом выражении довольно быстро исчезает.

Движение подвешенного магнита определяется уравнением

$$\frac{d^2T}{dt\,d\dot{\varphi}}-\frac{dT}{d\varphi}+\frac{dV}{d\varphi}=0, \qquad (10)$$

откуда

$$A\ddot{\varphi}-MG\gamma\cos(\vartheta-\varphi)+MH(\sin\varphi+\tau(\varphi-\alpha))=0. \qquad (11)$$

Подставим значение γ и расположим члены в соответствии с кратностью аргумента ϑ, кроме того, из наблюдений мы знаем, что

$$\varphi=\varphi_0+be^{-lt}\cos nt+c\cos 2(\vartheta-\beta), \qquad (12)$$

где φ_0 — среднее значение φ, второй член выражает постепенно затухающие свободные колебания, а третий — вынужденные колебания, возникающие из-за изменения отклоняющего тока.

Начиная с тех членов в (11), которые не содержат ϑ и должны в совокупности быть равными нулю, мы приближенно находим

$$\frac{MG\omega}{R^2+L^2\omega^2}\{Hg(R\cos\varphi_0+L\omega\sin\varphi_0)+GMR\}=2MH(\sin\varphi_0+\tau(\varphi_0-\alpha)). \qquad (13)$$

Поскольку член $L\,\mathrm{tg}\,\varphi_0$ обычно мал по сравнению с Gg, решение квадратного уравнения (13) приближенно дает

$$R=\frac{Gg\omega}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi_0\left(1+\tau\frac{\varphi_0-\alpha}{\sin\varphi_0}\right)}\left\{1+\frac{GM}{gH}\sec\varphi_0-\frac{2L}{Gg}\left(\frac{2L}{Gg}-1\right)\mathrm{tg}^2\varphi_0-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2L}{Gg}\right)^2\left(\frac{2L}{Gg}-1\right)^2\mathrm{tg}^4\varphi_0\right\}. \qquad (14)$$

Если мы учтем основной член этого выражения в уравнениях (7), (8) и (11), то найдем, что значение n в уравнении (12) равно $\sqrt{\frac{HM}{A}}\sec\varphi_0$. Величина амплитуды вынужденных колебаний равна $\frac{1}{4}\frac{n^2}{\omega^2}\sin\varphi_0$. Следовательно, когда катушка совершает много оборотов за время одного свободного колебания магнита, амплитуда вынужденных колебаний магнита очень мала, и мы можем пренебречь в (11) членами, содержащими c.

766. Таким образом, сопротивление определено в электромагнитных единицах через скорость ω и отклонение φ. Величину горизонтальной составляющей земного магнетизма H нет необходимости определять при условии, что она остается постоянной во время опыта.

Чтобы найти M/H, мы должны использовать подвешенный магнит для отклонения магнита магнитометра, как описано в п. 454. В этом эксперименте значение M должно быть малым, тогда эта поправка имеет второстепенное значение.

Относительно других поправок, учет которых необходим в этом эксперименте, см. *Report of the British Association* за 1863 г., стр. 168.

Калориметрический метод Джоуля

767. Тепло, выделяемое при прохождении тока γ через проводник с сопротивлением R, согласно закону Джоуля (п. 242), равно

$$h=\frac{1}{J}\int R\gamma^2\,dt, \tag{1}$$

где J — эквивалент использованной единицы тепла в динамическом измерении.

Следовательно, если за время опыта сопротивление R постоянно, то его значение равно

$$R=Jh/\int\gamma^2\,dt. \tag{2}$$

Этот метод определения R включает в себя нахождение количества тепла h, производимого током в течение заданного промежутка времени, а также квадрата силы тока γ^2.

В опытах Джоуля [4] величина h определялась по увеличению температуры воды в сосуде, куда был помещен проводящий провод. Поправки на излучение и т. п. находились путем проведения дополнительных опытов, при которых ток по проводу не пропускался.

Сила тока измерялась тангенс-гальванометром. Этот метод включает в себя измерение напряженности земного магнетизма, которое производилось по способу, описанному в п. 457. Эти измерения проверялись также при помощи токовых весов, описанных в п. 726, которые измеряют непосредственно γ^2. Наиболее прямой способ измерения $\int\gamma^2 dt$ состоит в пропускании тока через самовоздействующий электродинамометр (п. 725), показания шкалы которого пропорциональны γ^2, и снятии показаний через равные промежутки времени. Это приближенно можно осуществить, если регистрировать показания при крайних положениях прибора в каждом колебании в продолжении всего эксперимента.

[4] *Report on Standarts of Electrical Resistance of the British Association for* 1867, p. 474—522.

ГЛАВА XIX
СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ

Определение числа электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице

768. Абсолютные значения электрических единиц в обеих системах зависят от принятых нами единиц длины, времени и массы; их зависимость от этих единиц различна в этих двух системах, поэтому отношение электрических единиц будет выражено различными числами в соответствии с различными единицами длины и времени.

Из таблицы размерностей п. 628 следует, что число электростатических единиц электричества, содержащихся в одной электромагнитной единице, меняется обратно пропорционально величине единицы длины и прямо пропорционально единице времени, которые мы приняли.

Следовательно, если мы определим скорость, которая численно представлена этим значением, то даже если мы примем новые единицы длины и времени, число, представляющее эту скорость, будет по-прежнему числом электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице согласно новой системе измерений.

Поэтому скорость, указывающая на связь между электростатическими и электромагнитными явлениями, представляет собой естественную величину с определенным значением; измерение этой величины является одним из наиболее важных исследований в области электричества.

Чтобы показать, что искомая величина действительно является скоростью, мы можем заметить, что в случае двух параллельных токов участок длиной a одного из них в соответствии с п. 686 испытывает притяжение $F=2CC'a/b$, где C, C' — численные значения токов в электромагнитных единицах, а b — расстояние между ними. Если мы положим $b=2a$, то $F=CC'$.

Количество электричества, переносимое током C за время t, равно Ct в электромагнитных единицах или nCt в электростатических единицах, если число электростатических единиц в одной электромагнитной единице равно n.

Пусть два небольших проводника заряжены количествами электричества, которые переносятся двумя токами за время t, и помещены на расстоянии r друг от друга. Отталкивание между ними будет равно $F'=\frac{CC'n^2t^2}{r^2}$.

Выберем расстояние r таким образом, чтобы это отталкивание равнялось притяжению токов; тогда $\frac{CC'n^2t^2}{r^2}=CC'$. Следовательно, $r=nt$, т. е. с течением времени t расстояние r должно увеличиваться со скоростью n. Следовательно, n является скоростью, абсолютная величина которой одна и та же, какие бы единицы мы ни приняли.

769. Чтобы получить физическое представление об этой скорости, вообразим себе плоскую поверхность, заряженную электричеством до поверхностной плотности σ и движущуюся в ее собственной плоскости со скоростью v. Эта движущаяся заряженная поверхность эквивалентна электрическому токовому листу; сила

тока, протекающего через единицу ширины поверхности, равна σv в электростатических единицах или $\sigma v/n$ в электромагнитных единицах, если n является числом электростатических единиц в одной электромагнитной единице. Если другая плоская поверхность, параллельная первой, заряжена до поверхностной плотности σ' и движется в том же направлении со скоростью v', она будет эквивалентна второму токовому листу.

Электростатическое отталкивание между двумя заряженными поверхностями в соответствии с п. 124 равно $2\pi\sigma\sigma'$ на каждую единичную площадь противостоящих поверхностей.

Электромагнитное притяжение двух токовых листов в соответствии с п. 653 равно $2\pi uu'$ на каждую единичную площадь, причем u и u' являются поверхностными плотностями токов в электромагнитных единицах.

Но $u=\sigma v/n$, а $u'=\sigma' v'/n$, так что притяжение равно $2\pi\sigma\sigma' vv'/n^2$.

Отношение притяжения к отталкиванию равно отношению vv' к n^2. Поскольку притяжение и отталкивание являются однотипными величинами, то величина n должна быть величиной того же рода, что и v, т. е. скоростью. Если теперь мы предположим, что скорость каждой из движущихся плоскостей *равна* n, притяжение будет равно отталкиванию и механического взаимодействия между плоскостями не будет. Следовательно, мы можем определить отношение электрических единиц как такую скорость, при которой две заряженные поверхности, движущиеся в одном направлении с этой скоростью, не испытывают взаимного действия. Поскольку эта скорость составляет около 300 000 километров в секунду, вышеописанный эксперимент выполнить невозможно.

770. Если удается поверхностную плотность электричества и скорость сделать настолько большими, чтобы магнитная сила являлась измеримой величиной, мы можем, по крайней мере, подтвердить наше предположение о том, что движущееся заряженное тело эквивалентно электрическому току.

Можно принять, что заряженная поверхность в воздухе начинает разряжаться через искрение, если электрическая сила $2\pi\sigma$ достигает значения 130. Магнитная сила, обусловленная токовым листом, равна $2\pi\sigma v/n$. Горизонтальная магнитная сила составляет в Британии около 0,175. Следовательно, поверхность, заряженная до максимального значения и движущаяся со скоростью 100 метров в секунду, будет действовать на магнит с силой, составляющей около одной четырехтысячной части земной горизонтальной силы — такую величину можно измерить. Заряженная поверхность может быть поверхностью непроводящего диска, вращающегося в плоскости магнитного меридиана, а магнит можно поместить вблизи восходящей или нисходящей части диска и защитить от его электростатического действия металлическим экраном. Я не уверен, что до сих пор кто-либо пытался выполнить такой эксперимент [1].

I. Сравнение единиц электричества

771. Поскольку отношение электромагнитной единицы электричества к электростатической представлено скоростью, мы в дальнейшем будем обозначать ее символом v. Первое определение численного значения этой скорости было выполнено Вебером и Кольраушем [2].

[1] Sir W. Thomson, *R. S. Proc.* or Reprint, Art. XIX, p. 247—259.

[2] *Elektrodynamische Maasbestimmungen* and Pogg. *Ann.*, XCIX (Aug., p. 10—25, 1856).

Их метод был основан на измерении одного и того же количества электричества сначала в электростатических и затем в электромагнитных единицах.

Измеряемым количеством электричества являлся заряд Лейденской банки. В электростатических единицах он измерялся как произведение емкости банки на разность потенциалов ее обкладок. Емкость банки определялась путем сравнения с емкостью сферы, подвешенной в свободном пространстве и удаленной от других тел. Емкость такой сферы в электростатических единицах выражается ее радиусом. Таким образом, можно найти емкость банки и выразить ее в виде некоторой длины, см. п. 227.

Разность потенциалов на обкладках банки измерялась при их подсоединении к электродам электрометра, постоянные которого были тщательно определены; таким образом, становилась известной разность потенциалов E в электростатических единицах.

При умножении этой величины на емкость банки c заряд банки выражался в электростатических единицах.

Для определения заряда банки в электромагнитных единицах банка разряжалась через катушку гальванометра. Действие переходного тока на магнит гальванометра сообщало магниту определенную угловую скорость. Затем магнит поворачивался до тех пор, пока его скорость полностью не погашалась из-за противодействия земного магнетизма.

Измеряя максимальное отклонение магнита, можно определить количество электричества в токе в электромагнитных единицах, как в п. 748, по формуле $Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{1}{2}\vartheta$, где Q — количество электричества в электромагнитных единицах. Мы должны, таким образом, определить следующие величины.

Напряженность горизонтальной компоненты земного магнетизма H, см. п. 456. Главную постоянную гальванометра G, см. п. 700. Время одного колебания магнита T и отклонение ϑ, обусловленное переходным током. Значение v, полученное М. М. Вебером и Кольраушем, равняется $v=31\ 074\ 0000$ метров в секунду.

Свойство твердых диэлектриков, которому дано наименование Электрическая Абсорбция, затрудняет правильную оценку емкости Лейденской банки. Кажущаяся емкость меняется в зависимости от времени, которое прошло от момента заряда или разряда банки до момента измерения потенциала; чем больше это время, тем большее значение получается для емкости банки.

Таким образом, поскольку время, необходимое для получения показания электрометра, велико по сравнению со временем, в течение которого происходит разряд через гальванометр, оценка разряда в электростатических единицах, по всей вероятности, является завышенной и полученное из нее значение v также завышено.

II. Величина v, выраженная через сопротивление

772. Два других метода определения скорости v приводят к выражению ее значения через сопротивление некоторого проводника, которое в электромагнитной системе также выражается как скорость. В эксперименте сэра Уильяма Томсона постоянный ток пропускается через провод с большим сопротивлением. Электродвижущая сила, обусловливающая ток в проводнике, измеряется электростатически путем соединения концов провода с электродами абсолютного элект-

рометра, см. п. 217, 218. Сила тока в проводе измеряется в электромагнитных единицах по отклонению подвешенной катушки электродинамометра, через которую ток проходит, см. п. 725. Сопротивление контура в электромагнитных единицах известно из его сравнения с сопротивлением эталонной катушки, т. е. с Омом. Умножая силу тока на это сопротивление, мы получаем электродвижущую силу в электромагнитных единицах, а значение v находится из сравнения этой величины с величиной электродвижущей силы в электростатических единицах.

Этот метод требует одновременного определения двух сил с помощью электрометра и электродинамометра соответственно, однако результат определяется лишь отношением этих сил.

773. Другой метод, в котором эти силы не измеряются по отдельности, а непосредственно противостоят друг другу, был использован автором этих строк. Концы катушки с большим сопротивлением соединяются с двумя параллельными дисками, один из которых является подвижным. Одна и та же разность потенциалов обусловливает ток через большое сопротивление и вызывает притяжение между двумя дисками. Одновременно через две катушки, прикрепленные одна к обратной стороне неподвижного диска, другая — к обратной стороне подвижного диска, пропускается электрический ток, который в реальном эксперименте был отличен от первичного тока. Этот ток течет через катушки в противоположных направлениях, так что они отталкивают друг друга. Путем подбора расстояния между двумя дисками притяжение точно компенсируется отталкиванием; одновременно другой наблюдатель при помощи дифференциального гальванометра с шунтами определяет отношение первичного тока ко вторичному.

В этом эксперименте единственным измерением, в котором следует использовать материальный эталон, является измерение большого сопротивления, которое должно быть определено по абсолютной величине путем сравнения с Омом. Другие измерения требуются только для определения отношений и, следовательно, могут быть выполнены в любых произвольных единицах.

Так, отношение двух сил является отношением типа равенства.

Отношение двух токов находится путем сравнения сопротивлений, при которых нет отклонения дифференциального гальванометра.

Сила притяжения зависит от квадрата отношения диаметра дисков к расстоянию между ними.

Сила отталкивания зависит от отношения диаметра катушек к расстоянию между ними.

Таким образом, значение v выражается непосредственно через сопротивления большой катушки, которое само сравнивается с Омом.

Значение v, найденное методом Томсона, равно 28,2 Ом[3], методом Максвелла — 28,8 Ом[4].

III. Электростатическая емкость в электромагнитной мере

774. Емкость конденсатора может быть установлена в электромагнитных единицах путем сравнения электродвижущей силы, которая обусловливает заряд, и количества электричества в токе разряда. С помощью гальванической батареи в

[3] *Report of British Association*, 1869, p. 434.
[4] *Phil. Trans.*, 1868, p. 643 and *Report of British Association*, 1869, p. 436.

контуре, содержащем катушку с большим сопротивлением, поддерживается ток. Конденсатор заряжается путем подключения его электродов к электродам катушки сопротивления. Ток через катушку измеряется по отклонению, которое он производит в гальванометре. Пусть это отклонение будет φ, тогда ток, согласно п. 742, равен $\gamma=(H/G)\operatorname{tg}\varphi$, где H — горизонтальная составляющая земного магнетизма, а G — главная постоянная гальванометра.

Если R — сопротивление катушки, по которой пропускается ток, то разность потенциалов на концах катушки равна $E=R\gamma$, а заряд электричества, произведенный в конденсаторе, емкость которого в электромагнитной мере равна C, будет $Q=EC$.

Отключим электроды конденсатора, а затем и гальванометра от контура, и пусть магнит гальванометра придет в состояние покоя в положении равновесия. Присоединим затем электроды конденсатора к электродам гальванометра. Через гальванометр потечет переходный ток, который вызовет отклонение магнита до крайнего положения ϑ. Тогда, согласно п. 748, если разряд равен заряду, то

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{1}{2}\vartheta.$$

Таким образом, мы получаем в качестве значения емкости конденсатора в электромагнитной мере

$$C=\frac{T}{\pi}\frac{1}{R}\frac{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Емкость конденсатора, таким образом, определена через следующие величины: T — время колебания магнита гальванометра от одного состояния покоя до другого; R — сопротивление катушки; ϑ — крайний предел отклонения, произведенного разрядом; φ — постоянное отклонение, обусловленное током через катушку R. Этот метод был использован профессором Флемингом Дженкином (Fleeming Jenkin) для определения емкости конденсаторов в электромагнитных единицах [5].

Если c — емкость того же самого конденсатора в электростатических единицах, определенная путем сравнения с конденсатором, емкость которого вычислена из его геометрических данных, то $c=v^2C$.

Отсюда $v^2=\pi R\frac{c}{T}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}$.

Следовательно, таким способом можно найти величину v. Она зависит от определения R в электромагнитных единицах, но, поскольку в нее входит лишь корень квадратный из R, ошибка в этом определении не так сильно влияет на величину v, как в способах, описанных в п. 772, 773.

Прерывистый ток

775. Если в цепи с батареей в произвольной точке разомкнуть провод и его концы соединить с электродами конденсатора, то в конденсатор потечет ток, сила которого уменьшается по мере возрастания разности потенциалов между

[5] *Report of British Association*, 1867, p. 483—488.

обкладками конденсатора, и, когда конденсатор приобретает полный заряд, соответствующий приложенной электродвижущей силе, ток полностью прекращается.

Если теперь электроды конденсатора отсоединить от концов провода и снова присоединить их в обратном порядке, конденсатор будет разряжаться через провод, а затем снова зарядится, но противоположным образом, так что через провод будет течь переходный ток, общее количество которого равно удвоенному заряду конденсатора.

С помощью простого механизма (обычно называемого Коммутатором, или качающимся коромыслом) операцию обращения соединений конденсатора можно повторять через регулярные промежутки времени, равные T. Если этот интервал достаточно длинный, чтобы произошел полный разряд конденсатора, количество электричества, переданное проводом за каждый интервал, будет равно $2EC$, где E — электродвижущая сила, а C — емкость конденсатора.

Если магнит, включенный в контур гальванометра, нагружен так, что он качается достаточно медленно и за время одного свободного колебания магнита происходит очень много разрядов конденсатора, тогда последовательность разрядов будет действовать на магнит подобно постоянному току, сила которого равна $2EC/T$.

Если теперь конденсатор убрать и вместо него поставить катушку сопротивления и добиться, чтобы постоянный ток через гальванометр производил такое же отклонение, как и последовательность разрядов, и если сопротивление всего контура в этом случае равно R, то

$$E/R=2EC/T, \tag{1}$$

или

$$R=T/2C. \tag{2}$$

Мы можем, таким образом, сравнить конденсатор с движущимся коммутатором с проводом определенного электрического сопротивления; для определения этого сопротивления мы можем использовать различные методы измерения сопротивлений, описанные в п. 345—357.

776. Для этой цели при использовании метода Дифференциального Гальванометра (см. п. 346) или мостика Уитстона (см. п. 347) мы можем вместо одного из проводов вставить конденсатор с его коммутатором. Предположим, что в каждом случае получено нулевое отклонение гальванометра — вначале с конденсатором и коммутатором, а затем с катушкой сопротивления R_1 вместо него. Тогда величина $T/2C$ будет измеряться сопротивлением контура, часть которого образует катушка R_1 и который полностью замыкается через оставшуюся часть проводящей системы, включая батарею. Следовательно, сопротивление R, которое мы должны вычислить, равно сопротивлению катушки R_1 вместе с сопротивлением R_2 оставшейся части системы (включая батарею), причем концы катушки сопротивления следует взять в качестве электродов системы.

В случаях дифференциального гальванометра и мостика Уитстона нет необходимости делать второй эксперимент, подставляя катушку сопротивления вместо конденсатора. Величина требуемого для этой цели сопротивления может быть найдена путем вычисления через остальные известные сопротивления системы.

Используя обозначения п. 347, предположим, что конденсатор и коммутатор вставлены вместо проводника AC в мостик Уитстона, а гальванометр, подклю-

ченный в OA, показывает нулевое отклонение. Мы знаем, что сопротивление катушки, которая, будучи помещенной в AC, дала бы нулевое отклонение, равно

$$b=c\gamma/\beta=R_1. \tag{3}$$

Другая часть сопротивления — R_2 — является сопротивлением системы проводников AO, OC, AB, BC и OB, причем точки A и C рассматриваются как электроды. Следовательно,

$$R_2=\frac{\beta(c+a)(\gamma+\alpha)+ca(\gamma+a)+\gamma\alpha(c+a)}{(c+\alpha)(\gamma+a)+\beta(c+a+\gamma+\alpha)}. \tag{4}$$

В этом выражении a обозначает внутреннее сопротивление батареи и ее соединений; эта величина не может быть определена точно, но если сделать ее малой по сравнению с другими сопротивлениями, эта неопределенность будет лишь слегка влиять на величину R_2.

Величина емкости конденсатора в электромагнитной мере равна

$$C=\frac{T}{2(R_1+R_2)}. \tag{5}$$

777. Если конденсатор обладает большой емкостью, а коммутатор очень быстродействующий, то конденсатор может полностью не разряжаться при каждом переключении. Уравнение для электрического тока во время разряда следующее:

$$Q+R_2C\frac{dQ}{dt}+EC=0, \tag{6}$$

где Q — заряд, C — емкость конденсатора, R_2 — сопротивление остальной части системы между электродами конденсатора, E — электродвижущая сила, обусловленная включением батареи.

Следовательно,

$$Q=(Q_0+EC)e^{-t/R_2C}-EC, \tag{7}$$

где Q_0 — начальное значение Q.

Если τ — продолжительность контакта при каждом разряде, то количество электричества в каждом разряде равно

$$Q=2EC\frac{1-e^{-\tau/R_2C}}{1+e^{-\tau/R_2C}}. \tag{8}$$

Положив величины c и γ в уравнении (4) большими по сравнению с β, a или α, можно сделать время, представляемое произведением R_2C, настолько малым по сравнению с τ, что при вычислении значения экспоненциального выражения мы можем использовать для C выражение (5). Таким образом, мы находим

$$\frac{\tau}{R_2C}=2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}, \tag{9}$$

где R_1 — сопротивление, которое надо поставить вместо конденсатора, чтобы произвести эквивалентный эффект; R_2 — сопротивление остальной части системы, T — интервал между началом двух последовательных разрядов, τ —продолжи-

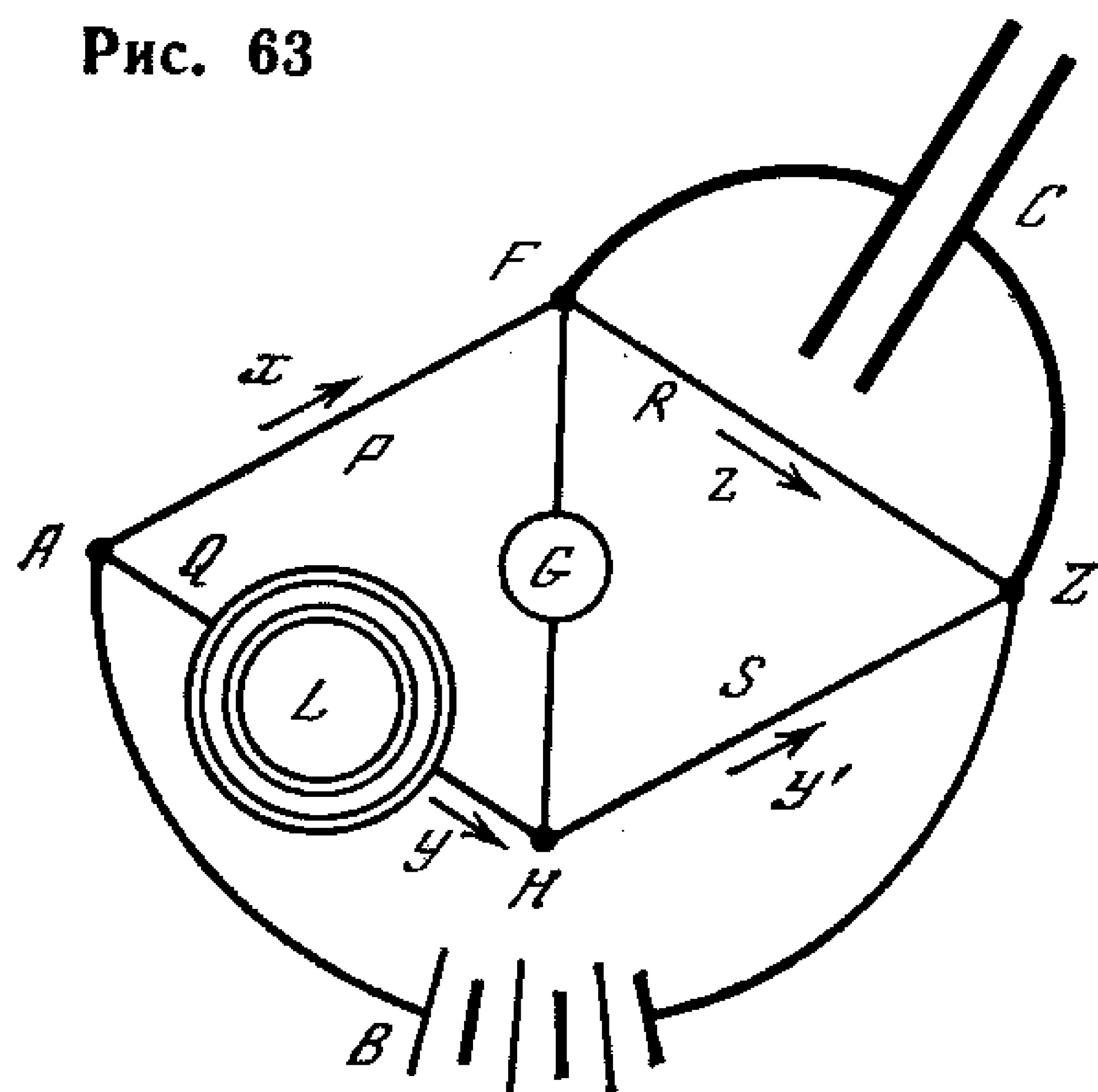
тельность контакта при каждом разряде. Таким образом, мы получаем уточненное значение для величины C в электромагнитной мере:

$$C=\frac{1}{2}\frac{T}{R_1+R_2}\frac{1+e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\cdot\frac{\tau}{T}}}{1-e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\cdot\frac{\tau}{T}}}. \tag{10}$$

IV. *Сравнение электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки*

778. Если две точки проводящего контура, сопротивление между которыми равно R, соединены с электродами конденсатора емкостью C, то при действии в контуре электродвижущей силы часть тока, вместо того чтобы проходить через сопротивление R, будет идти на заряд конденсатора. Следовательно, ток через R будет увеличиваться от нуля до своего конечного значения постепенно. Из математической теории следует, что нарастание тока через R от нуля до его конечного значения выражается формулой точно такого же вида, что и формула, определяющая величину тока, вызываемого постоянной электродвижущей силой в катушке электромагнита. Следовательно, мы можем поместить конденсатор и электромагнит в двух противоположных плечах мостика Уитстона таким образом, что ток через гальванометр всегда равен нулю, даже в момент замыкания или размыкания контура батареи.

Рис. 63



Пусть на рис. 63 P, Q, R, S будут соответственно сопротивления четырех элементов мостика Уитстона. Пусть катушка с коэффициентом самоиндукции L является частью элемента AH с сопротивлением Q, и пусть электроды конденсатора емкости C присоединены через проводники с малым сопротивлением к точкам F и Z. Для простоты мы будем предполагать, что в гальванометре, электроды которого присоединены к F и H, ток отсутствует. Мы должны, таким образом, определить условие, при котором потенциал в точке F равен потенциалу в точке H. И только если мы хотим оценить степень точности метода, мы должны вычислить ток через гальванометр, когда это условие не выполнено.

Пусть x будет полное количество электричества, которое прошло через элемент AF за время t, а z — количество электричества, прошедшее за то же время через FZ, тогда заряд конденсатора будет $x—z$. Электродвижущая сила, действующая между электродами конденсатора, по закону Ома равна $R(dz/dt)$, так что если емкость конденсатора равна C, то

$$x-z=RC\frac{dz}{dt} \tag{1}$$

Пусть y будет полное количество электричества, которое прошло через элемент AH; электродвижущая сила от A к H должна равняться электродвижущей силе от A к F, т. е.

$$Q\frac{dy}{dt}+L\frac{d^2y}{dt^2}=P\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Поскольку ток через гальванометр отсутствует, количество электричества, прошедшее через HZ, также должно равняться y, поэтому находим

$$S\frac{dy}{dt}=R\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

Подставляя в (2) значение x, найденное из (1), и сравнивая с (3), мы находим в качестве условия отсутствия тока через гальванометр

$$RQ\left(1+\frac{L}{Q}\frac{d}{dt}\right)z=SP\left(1+RC\frac{d}{dt}\right)z. \tag{4}$$

Условие отсутствия тока в установившемся режиме имеет обычный для мостика Уитстона вид

$$QR=SP. \tag{5}$$

Дополнительное условие отсутствия тока при размыкании и замыкании соединения с батареей следующее:

$$L/Q=RC. \tag{6}$$

Здесь L/Q и RC являются постоянными времени элементов Q и R соответственно. Поэтому, если, меняя Q или R, мы отрегулируем элементы мостика Уитстона так, чтобы ток в гальванометре отсутствовал как при размыкании и замыкании контакта, так и в установившемся режиме, мы будем знать, что постоянные времени катушки и конденсатора равны.

Коэффициент самоиндукции L можно определить в электромагнитной мере путем сравнения с коэффициентом взаимной индукции двух контуров с известными геометрическими параметрами (п. 756). Эта величина имеет размерность длины.

Емкость конденсатора может быть определена в электростатической мере путем сравнения с конденсатором, геометрические данные которого известны (п. 229). Эта величина c тоже является длиной. Емкость в электромагнитной мере равна

$$C=c/v^2. \tag{7}$$

Подставляя это значение в уравнение (6), мы получаем для величины v:

$$v^2=(c/L)QR, \tag{8}$$

где c — емкость конденсатора в электростатической мере, L — коэффициент самоиндукции катушки в электромагнитной мере, а Q и R — сопротивления в электромагнитной мере. Значение v, найденное таким методом, зависит от определения единицы сопротивления, так же как и во втором методе, п. 772, 773.

V. *Сопоставление электростатической емкости конденсатора с электромагнитной емкостью самоиндукции катушки*

779. Пусть C будет емкостью конденсатора, обкладки которого соединены проводом с сопротивлением R. Пусть в этот провод включены катушки L и L' и пусть L обозначает сумму их емкостей самоиндукции. Катушка L' подвешена на двухнитевом подвесе и состоит из двух параллельных витков, расположенных в вертикальной плоскости, между которыми проходит вертикальная ось, несущая магнит M, ось которого вращается в горизонтальной плоскости между катушками LL'. Катушка L, имеющая большой коэффициент самоиндукции, закреплена. Подвешенная катушка L' защищена от потоков воздуха, вызываемых вращением магнита, путем помещения вращающихся частей внутрь полой оболочки [рис. 64].

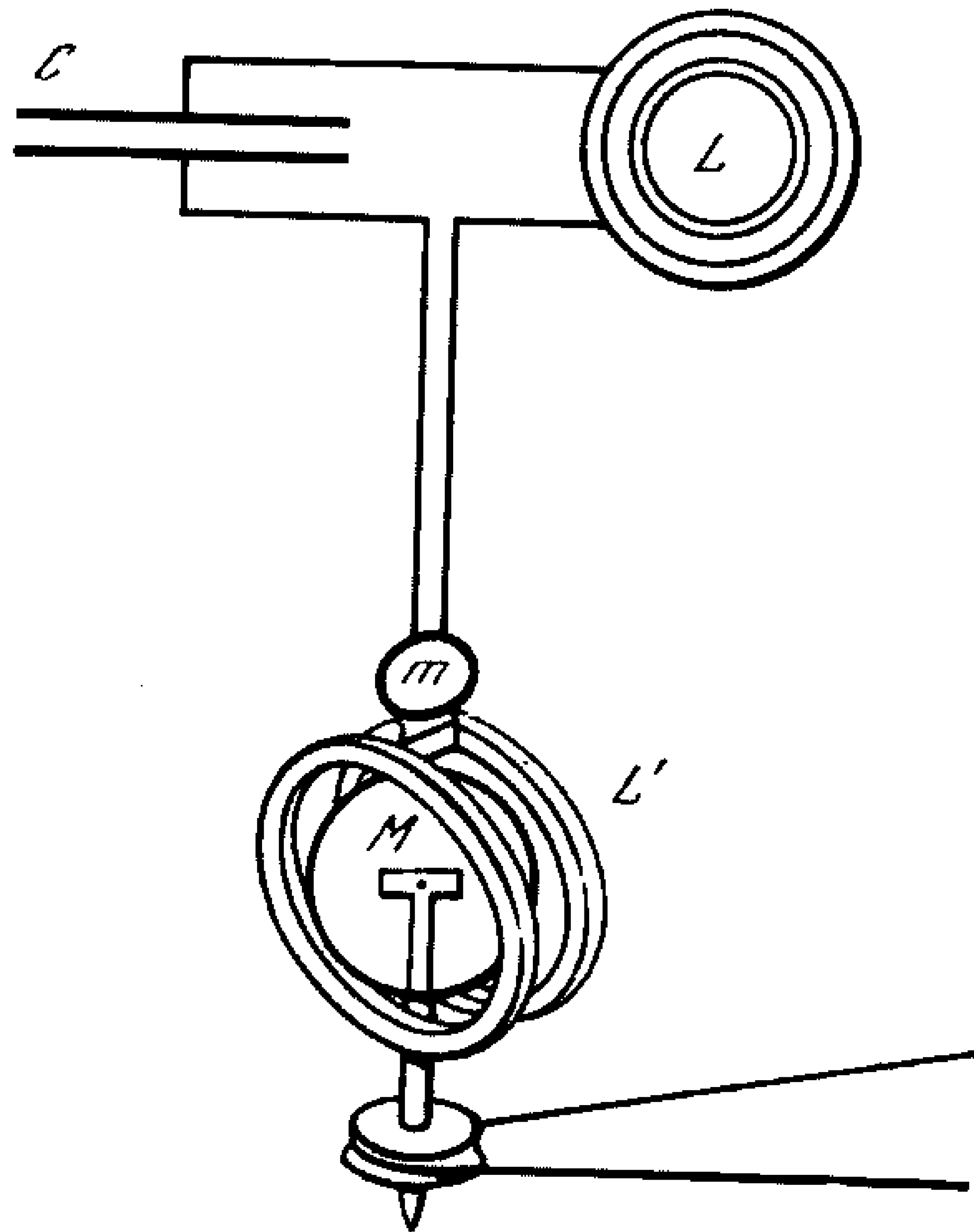


Рис. 64

Движение магнита вызывает в катушке токи индукции, которые подвергаются воздействию со стороны магнита, так что плоскость подвешенной катушки отклоняется в направлении вращения магнита. Определим силу индуцированных токов и величину отклонения подвешенной катушки.

Пусть x будет заряд электричества на верхней обкладке конденсатора C, тогда, если E есть электродвижущая сила, которая произвела этот заряд, из теории конденсаторов имеем

$$x=CE. \tag{1}$$

Из теории электрических токов мы имеем также

$$R\dot{x}+\frac{d}{dt}(L\dot{x}+M\cos\vartheta)+E=0, \tag{2}$$

где M — электромагнитный импульс контура L', когда ось магнита перпендикулярна плоскости катушки, а ϑ — угол между осью магнита и нормалью к этой плоскости.

Уравнение для определения x, таким образом, следующее:

$$CL\frac{d^2x}{dt^2}+CR\frac{dx}{dt}+x=CM\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}. \tag{3}$$

Если катушка находится в положении равновесия и если магнит вращается с постоянной угловой скоростью n, то

$$\vartheta=nt. \tag{4}$$

Выражение для тока состоит из двух частей, одна из которых не зависит от правой части уравнения и убывает со временем по экспоненте. Другая часть,

которую можно назвать вынужденным током, целиком определяется членом, содержащим ϑ, и может быть записана в виде

$$x=A\sin\vartheta+B\cos\vartheta. \tag{5}$$

Находя значения A и B подстановкой в уравнение (3), мы получаем

$$x=-MCn\frac{RCn\cos\vartheta-(1-CLn^2)\sin\vartheta}{R^2C^2n^2+(1-CLn^2)^2}. \tag{6}$$

Момент силы, действующий со стороны магнита на катушку L', по которой протекает ток $\dot{x}$, противоположен моменту, который действовал бы на магнит, если бы катушка была неподвижна, и равен

$$\Theta=\dot{x}\frac{d}{d\vartheta}(M\cos\vartheta)=M\sin\vartheta\frac{dx}{dt}. \tag{7}$$

Проинтегрировав это выражение по t в течение одного оборота и разделив на время, мы получаем для среднего значения

$$\overline{\Theta}=\frac{1}{2}\frac{M^2RC^2n^3}{R^2C^2n^2+(1-CLn^2)^2}. \tag{8}$$

Если катушка обладает значительным моментом инерции, ее вынужденные колебания будут очень малы, а ее среднее отклонение будет пропорционально $\overline{\Theta}$.

Пусть наблюдаемые отклонения D_1, D_2, D_3 соответствуют угловым скоростям магнита n_1, n_2, n_3; тогда в общем случае

$$P\frac{n}{D}=\left(\frac{1}{n}-CLn\right)^2+R^2C^2, \tag{9}$$

где величина P — постоянна.

Исключая P и R из трех уравнений такого вида, мы находим

$$C^2L^2=\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}\,\frac{\frac{n_1^3}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2^3}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3^3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}{\frac{n_1}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}. \tag{10}$$

Если n_2 таково, что $CLn_2^2=1$, для этого значения n величина n/D будет минимальной. Остальные значения n следует брать одно больше, а другое меньше чем n_2.

Величина CL, определенная из уравнения (10), имеет размерность квадрата времени. Назовем ее τ^2.

Если C_s является электростатической мерой емкости конденсатора, а L_m — электромагнитной мерой самоиндукции катушки, то и C_s и L_m являются длинами и произведение C_sL_m равно

$$C_sL_m=v^2C_sL_s=v^2C_mL_m=v^2\tau^2, \tag{11}$$

а

$$v^2=C_sL_m/\tau^2, \tag{12}$$

где τ^2 равняется значению C^2L^2, найденному из этого эксперимента. Эксперимент, предложенный здесь в качестве метода определения v, имеет ту же сущность, что

и эксперимент, описанный сэром У. Р. Гроувом (Sir W. R. Grove, *Phil. Mag.*, March 1868, p. 184). См. также замечания автора настоящего трактата по поводу этого эксперимента в майском номере за 1868 г., стр. 360—363.

VI. *Электростатическое измерение сопротивления* (см. п. 355)

780. Пусть конденсатор емкостью C разряжается через проводник с сопротивлением R, тогда, если x — заряд в произвольный момент времени,

$$\frac{x}{C}+R\,\frac{dx}{dt}=0. \tag{1}$$

Следовательно,

$$x=x_0e^{-t/(RC)}. \tag{2}$$

Если каким-либо способом мы можем осуществлять контакт на короткий промежуток времени, длительность которого точно известна, так, чтобы позволить току течь через проводник в течение времени t, и если E_0 и E_1 — показания электрометра, соединенного с конденсатором до и после этой операции, то

$$RC(\ln E_0-\ln E_1)=t. \tag{3}$$

Если емкость C известна в электростатической мере как величина, имеющая размерность длины, то сопротивление R может быть найдено из этого уравнения в электростатической мере как величина, обратная скорости.

Если численное значение сопротивления, определенного таким образом, равно R_s, а численное значение сопротивления в электромагнитной мере равно R_m, то

$$v^2=R_m/R_s. \tag{4}$$

Поскольку в этом эксперименте необходимо, чтобы сопротивление R было очень большим, а в электромагнитных экспериментах п. 763 и др. R должно быть малым, эксперименты следует производить на разных проводниках, а затем сопротивление этих проводников сравнивать обычными методами.

ГЛАВА XX
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

781. В некоторых частях этого трактата предпринята попытка объяснить электромагнитные явления с помощью механического действия, передаваемого от одного тела к другому через посредство среды, находящейся в пространстве между телами. Наличие среды предполагается также и в волновой теории света. Нам следует теперь показать, что свойства электромагнитной среды идентичны свойствам светоносной среды.

Заполнять все пространство некоей новой средой всякий раз, когда возникает какое-то новое явление, требующее объяснения,— это, несомненно, заниматься философией. Однако если при изучении двух различных разделов науки идея среды вводится независимо и если свойства, которые следует приписать среде для

рассмотрения электромагнитных явлений, подобны свойствам, которые мы приписываем светоносной среде для рассмотрения световых явлений, то доводы в пользу физического существования такой среды становятся гораздо более весомыми.

Свойства тел допускают количественное измерение. Например, мы получаем численное значение некоторого свойства среды, такого, как скорость распространения возмущений в ней, которую можно вычислить на основании электромагнитных экспериментов, а также непосредственно измерить в случае света. Если выяснится, что скорость распространения электромагнитных возмущений совпадает со скоростью света, причем не только в воздухе, но и в других прозрачных средах, у нас будут веские основания считать, что свет является электромагнитным явлением; сочетание же оптических и электрических данных даст уверенность в реальности среды, подобно тому как мы обретаем уверенность в реальности других видов материи из совокупности данных различных органов чувств.

782. При излучении света светящееся тело расходует определенное количество энергии и, если свет поглощается другим телом, это тело нагревается, показывая, что оно получило энергию извне. В течение промежутка времени после того, как свет покинул первое тело, но еще не достиг второго, она должна существовать в виде энергии в промежуточном пространстве. Согласно теории излучения, передача энергии сопровождается реальным переносом от светящегося тела к освещаемому световых корпускул, несущих с собой кинетическую энергию вместе с другими видами энергии, вместилищем которых они могут служить.

Согласно волновой теории существует материальная среда, заполняющая пространство между двумя телами; благодаря взаимодействию прилегающих друг к другу частей этой среды, энергия переходит от одной ее части к другой, пока не достигнет освещаемого тела.

Таким образом, светоносная среда при прохождении света через нее служит вместилищем энергии. В волновой теории, развитой Гюйгенсом, Френелем, Юнгом, Грином и др., эта энергия считается частично потенциальной и частично кинетической. Потенциальная энергия считается обусловленной деформацией элементарных объемов среды, и, значит, мы должны рассматривать среду как упругую. Кинетическая энергия считается обусловленной колебательным движением среды, поэтому мы должны считать, что среда имеет конечную плотность.

В теории электричества и магнетизма, принятой в настоящем трактате, признается существование двух видой энергии — электростатической и электрокинетической (см. п. 630 и 636), и предполагается, что они локализованы не только в наэлектризованных или намагниченных телах, но и в каждой части окружающего пространства, где обнаруживается действие электрической или магнитной силы. Следовательно, наша теория согласуется с волновой теорией в том, что обе они предполагают существование среды, способной стать вместилищем двух видов энергии [1].

---

[1] «Я, со своей стороны, изучая отношение вакуума к магнитной силе и общий характер магнитных явлений, происходящих вне магнита, больше склоняюсь к мысли, что передача силы представляет собой именно такое явление, происходящее вне магнита; я считаю невероятным, что эти явления представляют собой простое притяжение и отталкивание на расстоянии. Такое действие можно считать функцией эфира, ибо вряд ли можно считать вероятным, что эфир, если он существует, нужен только для того, чтобы передавать излучение». — Фарадей, «Экспериментальные исследования», 3075.

783. Определим теперь условия распространения электромагнитных возмущений через однородную среду, которую мы будем считать покоящейся, т. е. не имеющей никакого движения, кроме того, которое может быть включено в электромагнитные возмущения.

Пусть C будет удельная проводимость среды, K — ее удельная емкость для электростатической индукции и μ — ее магнитная «проницаемость».

Чтобы получить общие уравнения для электромагнитного возмущения, мы должны выразить истинный ток $\mathfrak{C}$ через вектор-потенциал $\mathfrak{A}$ и электрический потенциал Ψ.

Истинный ток $\mathfrak{C}$ состоит из тока проводимости $\mathfrak{K}$ и изменения электрического смещения $\mathfrak{D}$; поскольку оба они зависят от электродвижущей напряженности $\mathfrak{E}$, мы находим, как в п. 611,

$$\mathfrak{C}=\left(C+\frac{1}{4\pi}K\frac{d}{dt}\right)\mathfrak{E}. \tag{1}$$

Поскольку движение среды отсутствует, мы можем выразить электродвижущую напряженность, как в п. 599:

$$\mathfrak{E}=-\dot{\mathfrak{A}}-\nabla\Psi. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{C}=-\left(C+\frac{1}{4\pi}K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}+\nabla\Psi\right). \tag{3}$$

Но мы можем определить связь между $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}$ другим способом, как показано в п. 616, приведенные там уравнения (4) можно записать в виде

$$4\pi\mu\mathfrak{C}=\nabla^2\mathfrak{A}+\nabla J, \tag{4}$$

где

$$J=\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}. \tag{5}$$

Объединяя уравнение (3) и (4), мы получаем

$$\mu\left(4\pi C+K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}+\nabla\Psi\right)+\nabla^2\mathfrak{A}+\nabla J=0, \tag{6}$$

что можно выразить в виде следующих трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\left(4\pi C+K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dF}{dt}+\frac{d\Psi}{dx}\right)+\nabla^2F+\frac{dJ}{dx}=0,\\
&\mu\left(4\pi C+K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dt}+\frac{d\Psi}{dy}\right)+\nabla^2G+\frac{dJ}{dy}=0,\\
&\mu\left(4\pi C+K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dt}+\frac{d\Psi}{dz}\right)+\nabla^2H+\frac{dJ}{dz}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Это общие уравнения для электромагнитных возмущений.

Если мы продифференцируем эти уравнения по x, y и z соответственно и сложим, то получим

$$\mu\left(4\pi C+K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dJ}{dt}-\nabla^2\Psi\right)=0. \tag{8}$$

Если среда непроводящая, то $C=0$, а член $\nabla^2\Psi$, пропорциональный объемной плотности свободного электричества, не зависит от t. Следовательно, величина J должна быть либо линейной функцией t, либо постоянной, либо нулем; поэтому при рассмотрении периодических возмущений мы можем не учитывать J и Ψ.

Распространение волн в непроводящей среде

784. В этом случае $C=0$, и уравнения принимают вид

$$K\mu\frac{d^2F}{dt^2}+\nabla^2F=0,$$
$$K\mu\frac{d^2G}{dt^2}+\nabla^2G=0, \qquad (9)$$
$$K\mu\frac{d^2H}{dt^2}+\nabla^2H=0.$$

В этом виде уравнения сходны с уравнениями движения несжимаемого упругого твердого тела, и при заданных начальных условиях их решение можно выразить в форме, данной Пуассоном [2] и примененной Стоксом [3] к теории дифракции.

Запишем $V=1/\sqrt{K\mu}$. (10)

Если значения F, G, H и dF/dt, dG/dt, aH/dt заданы в каждой точке прос тран ства в момент ($t=0$), то мы можем определить их значения в любой последующий момент времени следующим образом.

Пусть O будет точка, в которой мы желаем определить F в момент времени t. Опишем сферу с центром в точке O и радиусом Vt. Найдем начальное значение F в каждой точке сферической поверхности и возьмем *среднее* от всех этих значений $\overline{F}$. Найдем также начальные значения dF/dt в каждой точке сферической поверхности, и пусть среднее от всех этих значений будет $d\overline{F}/dt$.

Тогда значение F в точке O в момент времени t будет равно:

$$\left.\begin{aligned} F&=\frac{d}{dt}(\overline{F}t)+t\frac{d\overline{F}}{dt}. \\ \text{Аналогично}\quad G&=\frac{d}{dt}(\overline{G}t)+t\frac{d\overline{G}}{dt}, \\ H&=\frac{d}{dt}(\overline{H}t)+t\frac{d\overline{H}}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

785. Таким образом, оказывается, что картина в точке O в произвольный момент времени зависит от той картины, которая имела место на расстоянии Vt в момент времени, предшествующий рассматриваемому и отделенному от него интервалом t, т. е. любое возмущение распространяется через среду со скоростью V.

---

[2] *Mém. de l'Acad.*, t.III, p. 130, et seq.
[3] *Cambridge Transactions*, vol. IX, p. 1—62 (1849).

Предположим, что, когда t равно нулю, величины $\mathfrak{A}$ и $\dot{\mathfrak{A}}$ равны нулю везде, за исключением некоторого объема S. Тогда их значения в точке O в момент времени t будут равны нулю, если только сферическая поверхность с центром в точке O и радиусом Vt не лежит целиком или частично внутри объема S. Если O находится вне объема S, возмущений в точке O не будет до тех пор, пока Vt не станет равным кратчайшему расстоянию от O до объема S. Тогда в точке O возникнет возмущение и будет продолжаться до тех пор, пока Vt не станет равным максимальному расстоянию от O до произвольной части S. В этот момент возмущение в O прекратится навсегда.

786. Величина V в п. 784, выражающая скорость распространения электромагнитных возмущений в непроводящей среде, в соответствии с уравнением (10) равна $1/\sqrt{K\mu}$.

Если средой является воздух и мы примем электростатическую систему измерений, то $K=1$, а $\mu=1/v^2$, так что $V=v$, т. е. скорость распространения численно равна числу электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице. Если мы примем электромагнитную систему, то $K=1/v^2$, а $\mu=1$, так что уравнение $V=v$ по-прежнему остается верным.

По теории, согласно которой свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся в той же самой среде, через которую передаются и другие электромагнитные действия, величина V должна быть скоростью света, т. е. величиной, значения которой оценивались несколькими способами. С другой стороны, v является числом электростатических единиц электричества в одной электромагнитной единице; методы определения этой величины описаны в последней главе. Они совершенно независимы от методов отыскания скорости света. Следовательно, совпадение или расхождение значений V и v обеспечивает проверку правильности электромагнитной теории света.

787. В приведенной таблице основные результаты непосредственного измерения скорости света (как в воздухе, так и в межпланетном пространстве) сопоставляются с основными результатами сравнения электрических единиц:

Скорость света (в метрах в секунду)		Отношение электрических единиц (в метрах в секунду)	
Физо	314 000 000	Вебер	310 740 000
Аберация и т. д., параллакс Солнца	308 000 000	Максвелл	288 000 000
Фуко	298 360 000	Томсон	282 000 000

Очевидно, что скорость света и отношение единиц являются величинами одного и того же порядка. Ни про одну из них нельзя сказать, что она определена с такой степенью точности, которая позволила бы нам утверждать, что одна из них больше или меньше, чем другая. Следует надеяться, что в будущих экспериментах соотношение между значениями этих двух величин может быть определено более точно.

Пока же сравнение имеющихся сейчас результатов не противоречит нашей теории, которая утверждает, что эти две величины равны, и приводит физическое обоснование этого равенства.

788. В среде, отличной от воздуха, скорость V обратно пропорциональна квадратному корню из произведения диэлектрической и магнитной индуктивной

способностей. Согласно волновой теории скорость света в различных средах обратно пропорциональна их показателям преломления.

Не существует таких прозрачных сред, для которых магнитная способность отличалась бы от магнитной способности воздуха более чем на очень малую ее долю. Следовательно, главное различие между этими средами должно зависеть от их диэлектрических способностей. Таким образом, согласно нашей теории диэлектрическая способность прозрачной среды должна равняться квадрату ее показателя преломления.

Однако значение показателя преломления различается для разных видов света: оно больше для света с более быстрыми колебаниями. Поэтому мы должны выбрать показатель преломления, который соответствует волнам с самым большим периодом, так как это единственные волны, чье движение можно сравнивать с медленными процессами, с помощью которых мы определяем способность диэлектрика.

789. Единственным диэлектриком, способность которого к настоящему времени определена с достаточной точностью, является парафин, для которого в твердом виде М. М. Гибсон (M. M. Gibson) и Барклай (Barclay) нашли [4]

$$K=1{,}975. \qquad (12)$$

Д-р Гладстоун (Gladstone) нашел следующие значения показателя преломления расплавленного парафина (с удельным весом 0,779) для линий A, D и H:

Температура	A	D	H
54 °C	1,4306	1,4357	1,4499
57 °C	1,4294	1,4343	1,4493;

откуда я нахожу, что показатель преломления бесконечно длинных волн будет около 1,422. Корень квадратный из K равен 1,405. Разница между этими значениями больше, чем можно ожидать из-за ошибок измерений; это показывает, что наши теории о строении тел должны быть улучшены, прежде чем мы сможем выводить их оптические свойства из электрических. В то же время, я думаю, что совпадение этих чисел таково, что если для достаточно большого числа веществ не будет получено большее расхождение значений, найденных из оптических и электрических свойств, то мы сможем уверенно заключить, что корень квадратный из K, хотя он, может быть, и не является полным выражением для показателя преломления, является по крайней мере наиболее важным членом в нем.

Плоские волны

790. Ограничим теперь наше внимание рассмотрением плоских волн, фронт которых мы будем предполагать нормальным оси z. Все величины, изменение которых и образует такие волны, являются функциями только z и t и не зависят от x и y.

Следовательно, уравнения магнитной индукции (А) п. 591 сводятся к следующим:

$$a=-dG/dz, \qquad b=dF/dz, \qquad c=0, \qquad (13)$$

[4] *Phil. Trans.*, 1871, p. 573.

т. е. магнитное возмущение лежит в плоскости волны. Это согласуется с тем, что мы знаем о возмущении, образующем свет.

После подстановки $\mu\alpha$, $\mu\beta$ и $\mu\gamma$ вместо a, b и c соответственно уравнения для электрических токов п. 607 становятся такими:

$$4\pi\mu u = -\frac{db}{dz} = -\frac{d^2F}{dz^2}, \quad 4\pi\mu v = \frac{da}{dz} = -\frac{d^2G}{dz^2}, \quad 4\pi\mu w = 0. \tag{14}$$

Следовательно, электрическсе возмущение также находится в плоскости волны и, если магнитное возмущение ограничено одним направлением, скажем направлением x, электрическое возмущение ограничено перпендикулярным направлением, т. е. направлением y.

Но мы можем вычислить электрическое возмущение и другим путем, ибо если f, g и h являются составляющими электрического смещения в непроводящей среде, то

$$u = df/dt, \quad v = dg/dt, \quad w = dh/dt. \tag{15}$$

Если P, Q, R являются составляющими электродвижущей напряженности, то

$$f = (K/4\pi)P, \quad g = (K/4\pi)Q, \quad h = (K/4\pi)R; \tag{16}$$

и, поскольку движение среды отсутствует, уравнения (B) п. 598 становятся такими:

$$P = -dF/dt, \quad Q = -dG/dt, \quad R = -dH/dt. \tag{17}$$

Следовательно,

$$u = \frac{K}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2}, \quad v = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2G}{dt^2}, \quad w = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2H}{dt^2}. \tag{18}$$

Сравнивая эти величины с величинами в уравнении (14), мы находим

$$\frac{d^2F}{dz^2} = K\mu\frac{d^2F}{dt^2}, \quad \frac{d^2G}{dz^2} = K\mu\frac{d^2G}{dt^2}, \quad 0 = K\mu\frac{d^2H}{dt^2}. \tag{19}$$

Первое и вторoе из этих уравнений являются уравнениями распространения плоской волны, их решение имеет хорошо известный вид

$$F = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \quad G = f_3(z - Vt) + f_4(z + Vt). \tag{20}$$

Решение третьего уравнения:

$$H = A + Bt, \tag{21}$$

где A и B являются функциями z. Следовательно, величина H либо постоянна либо меняется линейно со временем. В любом случае она не может участвовать в распространении волн.

791. Отсюда видно, что направления как магнитного, так и электрического возмущений лежат в плоскости волны. Следовательно, математическая форма возмущения, будучи поперечным к направлению распространения согласуется, с формой возмущения, составляющего свет.

Если мы предположим, что $G = 0$, возмущение будет соответствовать плоскополяризованному лучу света.

Магнитная сила в этом случае параллельна оси y и равна $(1/\mu)(dF/dz)$, а электрическая сила параллельна оси x и равна $-(dF/dt)$. Магнитная сила, следовательно, лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости, содержащей электродвижущую напряженность.

Значения магнитной силы и электродвижущей напряженности в данный момент в различных точках луча представлены на рис. 65 для случая простого гармонического возмущения в одной плоскости. Это соответствует лучу плоскополяризованного света, однако нам еще остается выяснить, соответствует ли плоскость поляризации плоскости магнитного возмущения или плоскости электрического возмущения, см. п. 797.

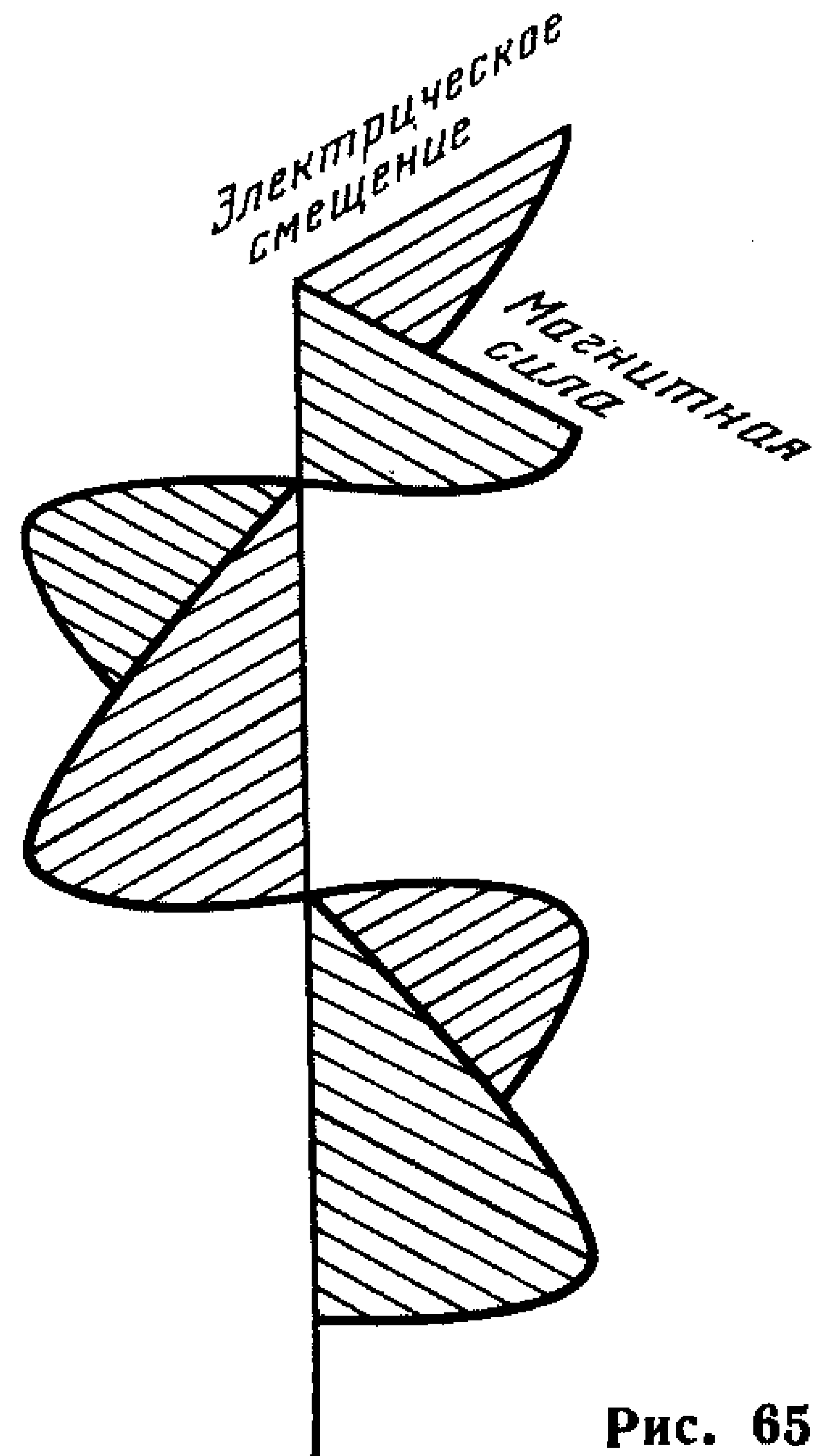


Рис. 65

Энергия и напряжение излучения

792. Электростатическая энергия на единицу объема в произвольной точке волны в непроводящей среде равна

$$\frac{1}{2}fP = \frac{K}{8\pi}P^2 = \frac{K}{8\pi}\left(\frac{dF}{dt}\right)^2. \tag{22}$$

Электрокинетическая энергия в той же точке равна

$$\frac{1}{8\pi}b\beta = \frac{1}{8\pi\mu}b^2 = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{dF}{dz}\right)^2. \tag{23}$$

В силу уравнения (20) эти два выражения равны между собой, так что в каждой точке синусоидальной волны внутренняя энергия среды является наполовину электростатической и наполовину электрокинетической.

Пусть p будет значением любой из этих величин, т. е. либо электростатической, либо электрокинетической энергии на единицу объема; тогда из-за электростатического состояния среды имеется натяжение величины p в направлении, параллельном x, объединенное с давлением, также равным p, но параллельным y и z, см. п. 107.

Из-за электрокинетического состояния среды имеется натяжение, равное p, в направлении, параллельном y, объединенное с давлением, равным p, в направлениях, параллельных x и z, см. п. 643.

Следовательно, совместное действие электростатического и электрокинетического напряжений есть *давление*, равное $2p$, в направлении распространения волны. Но величина $2p$ выражает также и полную энергию в единице объема.

Следовательно, в среде, в которой распространяются волны, имеется давление в направлении, нормальном этим волнам, и численно равное энергии в единице объема.

793. Итак, если в сильном солнечном свете энергия света, падающего на один квадратный фут, равна 83,4 футо-фунтам в секунду, средняя энергия в одном кубическом футе солнечного света составляет около 0,000 000 088 2 футо-фунта, а среднее давление на квадратный фут равно 0,000 000 088 2 фунта веса. Плоское тело, выставленное на солнечный свет, будет испытывать это давление только на освещенной стороне и, следовательно, будет отталкиваться с той стороны, откуда падает свет. По-видимому, гораздо большую энергию излучения можно получить с помощью сконцентрированных лучей электрической лампы. Такие лучи, падающие на тонкий металлический диск, искусно подвешенный в вакууме, возможно, смогут произвести механический эффект, поддающийся наблюдению. Когда возмущение какого-либо вида состоит из членов, включающих синусы или косинусы углов, меняющихся во времени, то максимальная энергия равна удвоенной средней энергии. Следовательно, если P является той максимальной электродвижущей напряженностью, а β — той максимальной магнитной силой, которые вовлечены в процесс распространения света, то

$$\frac{K}{8\pi}P^2=\frac{\mu}{8\pi}\beta^2=\text{средней энергии в единице объема.} \qquad (24)$$

Согласно данным Пуйе (Pouillet), на которые ссылается Томсон (*Trans. R. S. E.*, 1854), для энергии солнечного света, выраженной в электромагнитных единицах, это дает: $P=60\,000\,000$, или около 600 ячеек Даниэля на метр; $\beta=0{,}193$, т. е. заметно больше, чем одна десятая горизонтальной магнитной силы в Англии.

Распространение плоских волн в кристаллической среде

794. При расчете (основанном на данных обычных электромагнитных экспериментов) электрических явлений, возникающих в результате периодических возмущений и происходящих миллионы миллионов раз в секунду, мы уже подвергли нашу теорию очень серьезной проверке, даже в предположении, что средой является воздух или вакуум. Но если мы попытаемся расширить нашу теорию на случай плотных сред, то будем вовлечены не только во все обычные трудности молекулярной теории, но и в более глубокую тайну связи свойств молекул со свойствами электромагнитной среды.

Во избежание этих трудностей мы будем предполагать, что в некоторых средах удельная способность для электростатической индукции различна в разных направлениях, или, другими словами, электростатическая индукция, вместо того чтобы быть пропорциональной электродвижущей напряженности и направленной в ту же сторону, связана с ней системой линейных уравнений, аналогичных тем, которые даны в п. 297. Можно показать, как и в п. 436, что система коэффициентов должна быть симметричной, так что при соответствующем выборе осей, уравнения принимают вид

$$f=\frac{1}{4\pi}K_1P, \qquad g=\frac{1}{4\pi}K_2Q, \qquad h=\frac{1}{4\pi}K_3R, \qquad (1)$$

где K_1, K_2 и K_3 — главные индуктивные способности среды. Поэтому уравнения распространения возмущений следующие:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}-\frac{d^2G}{dx\,dy}-\frac{d^2H}{dz\,dx}&=K_1\mu\left(\frac{d^2F}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dx\,dt}\right),\\ \frac{d^2G}{dz^2}+\frac{d^2G}{dx^2}-\frac{d^2H}{dy\,dz}-\frac{d^2F}{dx\,dy}&=K_2\mu\left(\frac{d^2G}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dy\,dt}\right),\\ \frac{d^2H}{dx^2}+\frac{d^2H}{dy^2}-\frac{d^2F}{dz\,dx}-\frac{d^2G}{dy\,dz}&=K_3\mu\left(\frac{d^2H}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dz\,dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

795. Если l, m, n — направляющие косинусы нормали к волновому фронту, а V — скорость волны, причем

$$lx+my+nz-Vt=w, \tag{3}$$

и если мы обозначим через F'', G'', H'', Ψ'' вторые производные по w от F, G, H, Ψ соответственно и положим

$$K_1\mu=\frac{1}{a^2},\qquad K_2\mu=\frac{1}{b^2},\qquad K_3\mu=\frac{1}{c^2}, \tag{4}$$

где a, b, c — три главные скорости распространения, то уравнения становятся следующими:

$$\left.\begin{aligned} \left(m^2+n^2-\frac{V^2}{a^2}\right)F''-lmG''-nlH''+V\Psi''\frac{l}{a^2}&=0,\\ -lmF''+\left(n^2+l^2-\frac{V^2}{b^2}\right)G''-mnH''+V\Psi''\frac{m}{b^2}&=0,\\ -nlF''-mnG''+\left(l^2+m^2-\frac{V^2}{c^2}\right)H''+V\Psi''\frac{n}{c^2}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

796. Если мы обозначим

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=U, \tag{6}$$

то из этих уравнений получим

$$VU(VF''-l\Psi'')=0,\quad VU(VG''-m\Psi'')=0,\quad VU(VH''-n\Psi'')=0. \tag{7}$$

Отсюда либо $V=0$ — в этом случае волна вообще не распространяется, либо $U=0$, что приводит для V к уравнению, данному Френелем, либо величины, стоящие в скобках, обращаются в нуль, и в этом случае вектор с компонентами F'', G'', H'' нормален к волновому фронту и пропорционален объемной плотности электричества. Поскольку среда является непроводником, плотность электричества в любой данной точке постоянна и, следовательно, возмущения, определяемые этими уравнениями, являются непериодическими и не могут образовать волну. Мы можем поэтому при исследовании волны положить $\Psi''=0$.

797. Скорость распространения волны, таким образом, полностью определяется уравнением $U=0$, или

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=0. \tag{8}$$

Имеются два, и только два, значения V^2, соответствующих данному направлению волнового фронта.

Если λ, μ, ν являются направляющими косинусами электрического тока с составляющими u, v, w, то

$$\lambda:\mu:\nu::\frac{1}{a^2}F'':\frac{1}{b^2}G'':\frac{1}{c^2}H''. \qquad (9)$$

Тогда

$$l\lambda+m\mu+n\nu=0, \qquad (10)$$

т. е. ток лежит в плоскости волнового фронта и его направление в волновом фронте определяется уравнением

$$\frac{l}{\lambda}(b^2-c^2)+\frac{m}{\mu}(c^2-a^2)+\frac{n}{\nu}(a^2-b^2)=0. \qquad (11)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями, данными Френелем, если мы определим плоскость поляризации как плоскость, проходящую через луч перпендикулярно плоскости электрического возмущения.

Согласно этой электромагнитной теории двойного преломления волна продольного возмущения, которая представляет одну из основных трудностей обычной теории, не существует и не требуется никакого нового предположения для того, чтобы учесть тот факт, что луч, поляризованный в главной плоскости кристалла, преломляется обычным образом [5].

Связь между электрической проводимостью и непрозрачностью

798. Если среда вместо того, чтобы быть идеальным изолятором, является проводником, проводимость которого на единицу объема равна C, возмущение будет состоять не только из электрических смещений, но и из токов проводимости, в которых энергия преобразуется в тепло, так что волновое движение поглощается средой.

Если возмущение выражается периодической функцией, мы можем записать

$$F=e^{-pz}\cos(nt-qz), \qquad (1)$$

так как это удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2F}{dz^2}=\mu K\frac{d^2F}{dt^2}+4\pi\mu C\frac{dF}{dt} \qquad (2)$$

при условии, что $$q^2-p^2=\mu Kn^2 \qquad (3)$$

и $$2pq=4\pi\mu Cn. \qquad (4)$$

Скорость распространения равна

$$V=n/q, \qquad (5)$$

а коэффициент поглощения равен

$$p=2\pi\mu CV. \qquad (6)$$

---

[5] Стокс. «Доклад о двойном преломлении»; *Brit. Assoc. Report*, 1862, p. 253.

Пусть R будет в электромагнитной мере сопротивлением пластинки длиной l' шириной b и толщиной z:

$$R=l/(bzC). \tag{7}$$

Доля падающего света, пропускаемая этой пластинкой, равна

$$e^{-2pz}=e^{-4\pi\mu\frac{l}{b}\frac{V}{R}}. \tag{8}$$

799. Наиболее прозрачные твердые тела являются хорошими изоляторами, а все хорошие проводники весьма непрозрачны. Имеется, однако, много исключений из правила, гласящего, что чем больше непрозрачность тела, тем больше его проводимость.

Электролиты проводят электрический ток, и все же многие из них прозрачны. Мы можем, однако, предположить, что в случае быстропеременных сил, которые имеют место при распространении света, электрическая сила действует в одну сторону в течение столь короткого промежутка времени, что она не способна произвести полное разделение соединенных молекул. Когда во время второй половины колебания электрическая сила действует в противоположном направлении, она просто обращает все то, что было сделано в течение первой половины. Таким образом, здесь нет истинного прохождения тока, нет потерь электрической энергии и, следовательно, нет поглощения света.

800. Золото, серебро и платина являются хорошими проводниками и все-таки, будучи прокатаны в очень тонкие пластинки, они пропускают через себя свет. Из экспериментов, проведенных мною с кусочком золотого листа, сопротивление которого определил м-р Хокин (Hockin), следует, что прозрачность листа гораздо больше, чем это совместимо с нашей теорией, если только не предположить, что потери энергии меньше, когда электрические силы меняют знак каждую половину светового колебания, чем в случае, когда они действуют в течение заметных промежутков времени, как это имеет место в наших обычных экспериментах.

801. Рассмотрим далее среду, в которой проводимость велика по сравнению с индуктивной способностью.

В этом случае мы можем опустить члены, содержащие K в уравнениях п. 783, и эти уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2F+4\pi\mu C\frac{dF}{dt}&=0,\\ \nabla^2G+4\pi\mu C\frac{dG}{dt}&=0,\\ \nabla^2H+4\pi\mu C\frac{dH}{dt}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Каждое из этих уравнений имеет ту же форму, что и уравнение диффузии тепла, данное в «*Трактате о Теплоте*» Фурье.

802. Например, из первого уравнения следует, что F-составляющая вектор-потенциала будет меняться во времени и пространстве так же, как меняется во времени и пространстве температура однородного твердого тела при условии, что начальные и граничные условия для этих двух случаев приведены в соответ-

ствие друг с другом, а величина $4\pi\mu C$ численно равна обратной термометрической проводимости вещества, иначе говоря, *количеству единиц объема вещества, которое было бы нагрето на один градус теплом, проходящим через единичный куб вещества в единицу времени, у которого температура двух противоположных граней отличается на градус, в то время как остальные грани для тепла непроницаемы* [6].

Различные задачи теплопроводности, решения которых дал Фурье, могут быть преобразованы в задачи диффузии электромагнитных величин, однако следует помнить, что F, G, H являются составляющими вектора, тогда как температура в задаче Фурье является величиной скалярной.

Возьмем один из случаев, для которого Фурье дал полное решение [7], это случай бесконечной среды, начальное состояние которой задано.

Состояние в произвольной точке среды в момент времени t находится путем взятия среднего от состояния каждой части среды, причем вес, приписываемый каждой части при взятии среднего, равен $e^{-(\pi\mu C r^2)/t}$, где r — расстояние от этой части до рассматриваемой точки. В случае векторных величин это среднее наиболее удобно брать, рассматривая каждую составляющую вектора отдельно.

803. Прежде всего мы должны заметить, что в этой задаче теплопроводность среды Фурье следует брать обратно пропорциональной электропроводности нашей среды, таким образом, время, требуемое для достижения заданной стадии в процессе диффузии, тем больше, чем выше электропроводность. Это утверждение не будет казаться парадоксальным, если мы вспомним результат п. 655, состоящий в том, что среда с бесконечной проводимостью образует непреодолимый барьер для процесса диффузии магнитной силы.

Далее, время, необходимое для достижения заданного состояния в процессе диффузии, пропорционально квадрату линейных размеров системы.

Здесь нет определенной скорости, которую можно было бы определить, как скорость диффузии. Если мы попытаемся измерить эту скорость, установив время, необходимое для образования возмущения заданной величины на заданном расстоянии от источника возмущения, мы получим, что чем меньше выбранное значение возмущения, тем большей будет оказываться скорость, поскольку, как бы велико ни было расстояние и как бы мало ни было время, величина возмущения будет математически отличаться от нуля.

Эта особенность диффузии отличает ее от распространения волн, которое происходит с определенной скоростью. Никаких возмущений в данной точке не возникает до тех пор, пока волна не достигнет этой точки, а когда волна пройдет через нее, возмущение прекращается навсегда.

---

[6] См. Maxwell's *Theory of Heat*, p. 235 first edition, p. 255 fourth edition.

[7] *Traité de la Chaleur*, Art. 384.

Уравнение, определяющее температуру v в точке (x, y, z) спустя время t как функцию начальной температуры $f(\alpha, \beta, \gamma)$ в точке (α, β, γ), следующее:

$$v = \iiint \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{2^3 \sqrt{k^3 \pi^3 t^3}}\, e^{-\left(\frac{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}{4kt}\right)} f(\alpha, \beta, \gamma),$$

где k — термометрическая проводимость.

804. Исследуем теперь процесс, который имеет место, когда электрический ток возникает и продолжает течь по прямому проводу, а окружающая его среда обладает конечной электрической проводимостью (сравните с п. 660).

Когда ток начинается, его первое действие состоит в том, чтобы создать ток индукции в областях среды, близких к проводу. Направление этого тока противоположно направлению первоначального тока и в первый момент его общая величина равна величине первоначального тока, так что электромагнитное действие на более удаленные участки среды вначале равно нулю; оно возрастает до своего конечного значения по мере затухания тока индукции из-за электрического сопротивления среды.

Но по мере затухания тока индукции вблизи провода дальше в среде возникает новый индукционный ток, так что пространство, занятое индукционным током, непрерывно расширяется, а интенсивность тока непрерывно уменьшается.

Это явление диффузии и затухания тока индукции в точности аналогично диффузии тепла от участка среды, вначале более горячего или более холодного, чем остальные. Однако, поскольку ток является векторной величиной и в противоположных точках контура имеет противоположные направления, мы должны помнить, что при вычислении любой данной составляющей тока индукции нужно сравнивать эту задачу с такой задачей, в которой равные количества тепла и холода диффундируют из соседних мест; в этом случае действие на отдаленные точки будет иметь меньший порядок величины.

805. Если в прямом проводе поддерживается постоянный ток, то токи индукции, которые зависят от начального изменения состояния, будут постепенно диффундировать и угасать, оставив среду в неизменном состоянии, которое аналогично неизменному состоянию потока тепла. В этом состоянии мы имеем

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0 \qquad (2)$$

во всей среде, кроме части, занятой проводом, в которой

$$\nabla^2 F = 4\pi u, \qquad \nabla^2 G = 4\pi v, \qquad \nabla^2 H = 4\pi w. \qquad (3)$$

Этих уравнений достаточно, чтобы определить значения F, G, H во всей среде. Они показывают, что нет других токов, кроме тока в контуре, и что магнитные силы просто обусловлены токами в контуре согласно обычной теории. Скорость, с которой устанавливается это неизменное состояние, настолько велика, что не может быть измерена нашими экспериментальными методами, кроме, возможно, случая очень большого количества высокопроводящей среды, такой, как, например, медь.

З а м е ч а н и е. В своей работе, опубликованной в «Анналах» Поггендорфа (Pogg. *Ann.*, July, 1867), Лоренц вывел из уравнений Кирхгофа для электрических токов (Pogg. *Ann.*, CII, 1856) путем добавления некоторых членов, не влияющих ни на какие экспериментальные результаты, новую систему уравнений, показывающую, что распределение силы в электромагнитном поле может быть представлено как возникающее из взаимодействия прилегающих друг к другу элементов и что волны, образованные поперечными электрическими токами, могут распространяться со скоростью, сравнимой со скоростью света в непроводящей среде. Поэтому он рассматривает возмущения, составляющие свет, как идентич-

ные с возмущениями электрических токов и показывает, что проводящая среда должна быть непрозрачной для таких излучений.

Эти выводы сходны с выводами настоящей главы, хотя они получены совсем другим методом. Приведенная в этой главе теория впервые была опубликована в *Phil. Trans.* за 1865 г., стр. 459—512.

ГЛАВА XXI
МАГНИТНОЕ ДЕЙСТВИЕ НА СВЕТ

806. Наиболее важным шагом в установлении связи между явлениями электрическими и магнитными и явлениями световыми должно быть открытие какого-либо примера, в котором одна совокупность явлений влияла бы на другую. В поисках таких явлений мы должны руководствоваться любым знанием из числа уже полученных нами и относящихся к математической или геометрической форме величин, которые мы желаем сравнивать. Так, если мы будем пытаться, как пыталась миссис Сомервилль (Somerville), намагнитить стрелку с помощью света, мы должны помнить, что различие между магнитным севером и югом — это просто вопрос о направлении, а направление тотчас же сменится на противоположное, когда мы сделаем противоположными некоторые соглашения относительно использования математических знаков. В магнетизме нет ничего аналогичного тем явлениям электролиза, которые позволяют нам отличать положительное электричество от отрицательного, замечая, что кислород появляется на одном полюсе элемента, а водород — на другом.

Поэтому, заставив свет падать на один из концов стрелки, мы не должны ожидать, что этот конец станет полюсом определенного направления, поскольку два полюса не различаются между собой, как отличается свет от темноты.

Мы можем ожидать лучшего результата, заставив падать на стрелку циркулярно поляризованный свет: правополяризованный — на один конец и левополяризованный — на другой, ибо в некотором смысле про эти два вида света можно сказать, что они относятся друг к другу как полюса магнита. Однако даже здесь эта аналогия несовершенна, поскольку при объединении два луча не нейтрализуют друг друга, а дают плоскополяризованный луч.

Фарадей, который был знаком с методом изучения напряжений, производимых поляризованным светом в прозрачных твердых телах, проделал много экспериментов в надежде обнаружить какое-либо воздействие на поляризованный свет при его прохождении через среду, где существует электролитическая проводимость или диэлектрическая индукция [1]. Однако он не смог обнаружить никаких воздействий такого рода, хотя эксперименты производились в оптимальных — для обнаружения эффектов натяжения — условиях, а именно: электрическая сила или ток образовывали с направлением луча прямой угол, а с плоскостью

---

[1] *Experimental Researches*, 951—954 and 2216—2220.

поляризации — угол сорок пять градусов. Фарадей, варьируя эти эксперименты многочисленными способами, так и не открыл никакого воздействия на свет, обусловленного электролитическими токами или статической электрической индукцией.

Однако он преуспел в установлении связи между светом и магнетизмом; эксперименты, в которых он это сделал, описаны в девятнадцатой серии его «*Экспериментальных исследований*». Это открытие Фарадея будет взято нами в качестве отправной точки для дальнейшего углубления в природу магнетизма, и поэтому мы опишем явление, которое он наблюдал.

807. Луч плоскополяризованного света пропускается через прозрачную диамагнитную среду, а плоскость его поляризации на выходе из среды устанавливается путем наблюдения положения анализатора, при котором луч отсекается. Затем прикладывается магнитная сила, которая действует таким образом, что направление магнитной силы внутри прозрачной среды совпадает с направлением луча. Свет тотчас же появляется вновь, но при повороте анализатора на определенный угол свет опять отсекается. Это показывает, что действие магнитной силы состоит в повороте плоскости поляризации вокруг луча, взятого в качестве оси, на определенный угол, измеряемый углом, на который надо повернуть анализатор, чтобы отсечь свет.

808. Угол, на который поворачивается плоскость поляризации, пропорционален: (1). Расстоянию, которое луч проходит внутри среды. Следовательно, плоскость поляризации меняется непрерывно от ее положения на входе до ее положения на выходе. (2). Величине составляющей магнитной силы в направлении луча. (3). Степень вращения зависит от природы среды. До сих пор не наблюдалось никакого вращения, когда средой являлся воздух или любой другой газ.

Эти три утверждения объединяются в одно, более общее, которое гласит, что угловое вращение численно равно величине, на которую возрастает магнитный потенциал от точки, где луч входит в среду, до точки, где он выходит из нее, умноженной на коэффициент, который для диамагнитных сред обычно положителен.

809. В диамагнитных веществах вращение плоскости поляризации происходит в направлении, в котором должен циркулировать ток, создающий магнитную силу, направленную так же, как и действительно существующая в среде магнитная сила.

Вердье (Verdet), однако, обнаружил, что в некоторых ферромагнитных средах (например, сильный раствор перхлорида железа в древесном спирте или в эфире) вращение происходит в направлении, противоположном току, который создавал бы магнитную силу.

Это показывает, что различие между ферромагнитными и диамагнитными веществами не возникает просто из «магнитной проницаемости», которая в одном случае больше, а в другом меньше, чем у воздуха; свойства этих двух классов тел действительно противоположны.

Способность, приобретаемая веществом под действием магнитного поля поворачивать плоскость поляризации света, не точно пропорциональна его диамагнитной или ферромагнитной намагниченности. В действительности есть исключения из того правила, что вращение положительно для диамагнитных и отрицательно для ферромагнитных веществ, поскольку нейтральный хромат соды является диамагнитным, но производит отрицательное вращение.

810. Существуют другие вещества, которые независимо от приложения магнитной силы заставляют поворачиваться плоскость поляризации вправо или влево при прохождении луча через вещество. В некоторых из них это свойство относится к оси, как в случае кварца. В других это свойство не зависит от направления луча в пределах среды, как в скипидаре, растворе сахара и т. п. Во всех этих веществах, однако, если плоскость поляризации какого-то луча скручена, подобно правостороннему винту, она по-прежнему будет скручена в виде правостороннего винта, если луч пропускается через среду в противоположном направлении. Направление, в котором наблюдатель должен повернуть свой анализатор, чтобы погасить луч при введении среды на пути луча, одинаково относительно наблюдателя независимо от того, приходит ли к нему луч с севера или с юга. Направление в,ращения в пространстве, конечно, меняется на противоположное при обращении направления луча. Но когда это вращение производится магнитным действием, его направление одно и то же, независимо то того, идет ли луч на север или на юг. Вращение всегда происходит в направлении тока, который создает (или создал бы) действительное магнитное состояние поля, если среда принадлежит к средам положительного класса, и в противоположном направлении, если среда принадлежит к средам отрицательного класса.

Из этого следует, что если луч света после прохождения через среду с севера на юг отражается зеркалом и возвращается через среду с юга на север, вращение будет удваиваться, если оно является результатом магнитного действия. Когда же вращение зависит только от природы среды, как в скипидаре и др., отраженный луч при прохождении обратно через среду выходит в той же плоскости, в какой он вошел в нее,— вращение во время первого прохождения через среду точно обращается на противоположное во время второго прохождения.

811. Физическое объяснение этого явления представляет значительные трудности, про которые едва ли можно сказать, что они преодолены к настоящему времени как для магнитного вращения, так и для вращения, которое некоторые среды производят сами по себе. Мы можем, однако, подготовить путь для такого объяснения на основе анализа наблюдаемых фактов.

В кинематике существует хорошо известная теорема, что два однородных круговых колебания одинаковой амплитуды, имеющие один и тот же период и лежащие в одной и той же плоскости, но вращающиеся в противоположных направлениях, будучи соединены вместе, эквивалентны прямолинейному колебанию. Период этого колебания равен периоду круговых колебаний, его амплитуда удвоена, а его направление находится на линии, соединяющей точки, в которых встречаются две частицы, совершающие круговые колебания в противоположных направлениях по одному и тому же кругу. Следовательно, если фаза одного из круговых колебаний ускоряется, направление прямолинейных колебаний будет поворачиваться в сторону, соответствующую направлению этого кругового колебания, но на угол, равный половине угла ускорения фазы.

Можно также доказать при помощи непосредственного оптического эксперимента, что два луча света, имеющих равные интенсивности и циркулярно поляризованные в противоположных направлениях, после их соединения превращаются в один плоскополяризованный луч и что если любыми способами ускорить фазу одного из циркулярно поляризованных лучей, то плоскость поляризации результирующего луча поворачивается на половину угла опережения фазы.

812. Мы можем, следовательно, выразить явление вращения плоскости поляризации следующим образом. Плоскополяризованный луч падает на среду. Это эквивалентно двум циркулярно поляризованным лучам: одному — правостороннему, другому — левостороннему (по отношению к наблюдателю). После прохождения через среду луч по-прежнему плоскополяризован, но плоскость поляризации повернута, скажем, вправо (по отношению к наблюдателю). Следовательно, из двух циркулярно поляризованных лучей тот, который является правосторонним, при прохождении через среду должен иметь фазу, ускоренную по отношению к другому лучу.

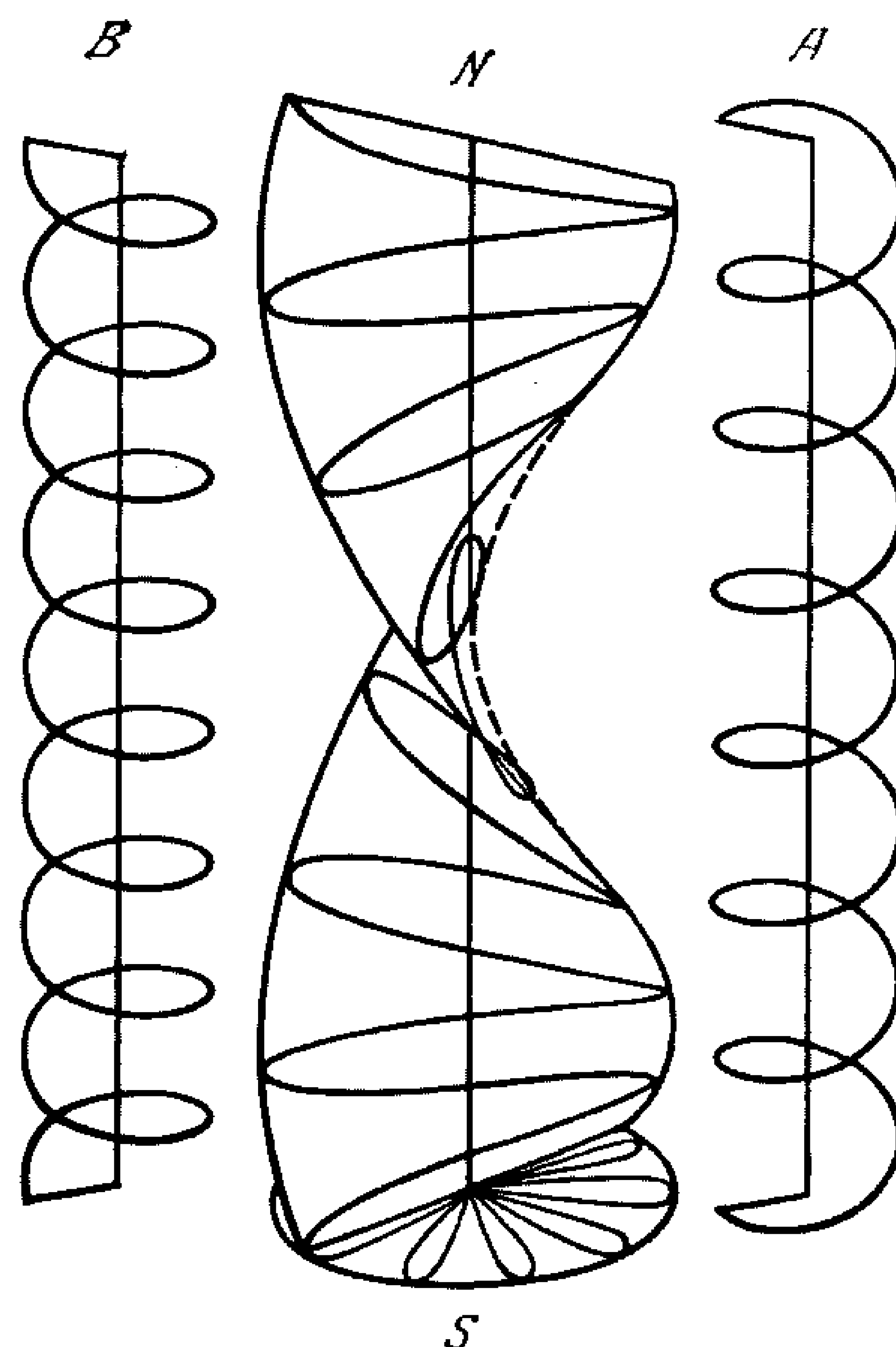


Рис. 66

Другими словами, правополяризованный луч совершает большее число колебаний и, следовательно, имеет меньшую длину волны в среде, чем левополяризованный луч, имеющий тот же самый период.

Этот способ констатации того, что имеет место, совершенно не зависит от любой теории света, ибо хотя мы и используем такие термины как длина волны, круговая поляризация и др., которые в наших умах могут ассоциироваться с частной формой волновой теории, само рассуждение не зависит от этих ассоциаций, а зависит только от фактов, доказанных экспериментом.

813. Рассмотрим далее конфигурацию одного из этих лучей в данный момент. Любое волновое движение, круговое в каждой точке, может быть представлено спиралью или винтом. Если винт поворачивать вокруг оси без продольного перемещения, каждая частица будет описывать окружность; в то же время распространение волнового движения будет представлено видимым продольным перемещением подобно расположенных частей резьбы винта. Легко увидеть, что если винт правосторонний, а наблюдатель помещен на том конце, по направлению к которому идет волновое возмущение, то ему движение винта будет казаться левосторонним, иначе говоря, противоположным направлению движения стрелок часов. Поэтому такой луч был назван вначале французскими авторами, а теперь и всем научным миром, левосторонним циркулярно поляризованным лучом.

Правосторонний циркулярно поляризованный луч аналогичным образом представляется левовинтовой спиралью. На рис. 66 правовинтовая спираль A на правой стороне рисунке представляет левосторонний луч, а левовинтовая спираль B слева представляет правосторонний луч.

814. Рассмотрим теперь два таких луча, которые имеют одну и ту же длину волны в среде. Они геометрически подобны во всех отношениях, но один из них является *перверсией* другого, т. е. он аналогичен своему изображению в зеркале. Пусть, однако, один из лучей, скажем A, имеет более короткий по сравнению с другим период вращения. Если движение целиком обусловлено силами,

вступающими в игру из-за смещения, то это будет свидетельствовать о том, что при одинаковом смещении для конфигурации вида A вовлечены большие силы, чем для конфигурации вида B. Следовательно, в этом случае левосторонний луч будет ускоряться по отношению к правостороннему лучу, причем это будет иметь место и когда лучи идут от N к S, и когда они идут от S к N.

Таким образом, это дает объяснение явления, производимого скипидаром и др. В таких средах смещение, вызываемое циркулярно поляризованным лучом, вовлекает большие восстанавливающие силы в случае конфигурации вида A, чем в случае конфигураций вида B. Силы, следовательно, зависят только от конфигурации, но не от направления движения.

Но в диамагнитной среде, на которую действует магнетизм в направлении SN, из двух винтов A и B всегда с большей скоростью вращается тот, движение которого, если смотреть от S к N, выглядит как движение по часовой стрелке. Следовательно, при направлении лучей от S к N правосторонний луч B будет двигаться быстрее, а при направлении лучей от N к S быстрее будет двигаться левосторонний луч A.

815. Если ограничить наше внимание лишь одним лучом, то спираль B имеет одну и ту же конфигурацию независимо от того, представляет ли она луч, идущий от S к N или от N к S. Но в первом случае луч движется быстрее, а следовательно, и спираль вращается быстрее. Таким образом, один из способов вращения спирали вовлекает большие силы, чем другой. Силы, следовательно, зависят не только от конфигурации луча, но также от направления движения его индивидуальных частей.

816. Возмущение, составляющее свет, независимо от того, какой может быть его физическая природа, является по своему характеру вектором, перпендикулярным направлению луча. Это доказано фактом интерференции двух лучей света, дающей при определенных условиях темноту, вместе с фактом отсутствия такой интерференции в случае двух лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Действительно, поскольку интерференция зависит от углового положения плоскостей поляризации, возмущение должно быть величиной направленной, т. е. вектором, а поскольку интерференция прекращается, когда плоскости поляризации расположены под прямым углом друг к другу, вектор, представляющий возмущение, должен быть перпендикулярен линии пересечения этих плоскостей, т. е. направлению луча.

817. Возмущение, будучи вектором, может быть разложено на составляющие, параллельные x и y, если ось z параллельна направлению луча. Пусть этими составляющими будут ξ и η, тогда в случае луча однородного циркулярно поляризованного света

$$\xi=r\cos\vartheta, \qquad \eta=r\sin\vartheta, \tag{1}$$

где

$$\vartheta=nt-qz+\alpha. \tag{2}$$

В этих выражениях r обозначает величину вектора, а ϑ — угол, который он образует с направлением оси x.

Период возмущения τ таков, что

$$n\tau=2\pi. \tag{3}$$

Длина волны возмущения λ такова, что

$$q\lambda = 2\pi. \tag{4}$$

Скорость распространения равна n/q.

Фаза возмущения равна α, когда и t и z обращаются в нуль.

Циркулярно поляризованный свет является правосторонним или левосторонним в соответствии с тем, является величина q отрицательной или положительной.

Его колебания происходят в положительном или отрицательном направлении вращения в плоскости (x, y) в соответствии с тем, является ли величина n положительной или отрицательной.

Свет распространяется в положительном или отрицательном направлении оси z в соответствии с тем, являются n и q величинами одного знака или противоположных знаков.

Во всех средах n меняется с изменением q, причем dn/dq всегда того же знака, что и n/q.

Следовательно, если для данного численного значения n величина n/q больше при положительных n, чем при отрицательных, то отсюда вытекает, что для значения q, заданного по величине и по знаку, положительное значение n будет больше, чем отрицательное.

Как раз это и наблюдается в диамагнитной среде, на которую действует магнитная сила γ в направлении z. Из двух циркулярно поляризованных лучей с данным периодом ускоряется тот, у которого направление вращения в плоскости (x, y) положительно. Следовательно, из двух левосторонних циркулярно поляризованных лучей, имеющих одинаковую длину волны в среде, более короткий период имеет тот луч, у которого направление вращения в плоскости xy положительно, т. е. луч, который распространяется в положительном направлении z от юга к северу. Таким образом, мы должны учитывать тот факт, что, когда в уравнениях системы заданы q и r, уравнениям будут удовлетворять два значения n, одно положительное, другое отрицательное, причем положительное значение больше по абсолютной величине, чем отрицательное.

818. Мы можем получить уравнения движения из рассмотрения потенциальной и кинетической энергий среды. Потенциальная энергия системы V зависит от конфигурации среды, т. е. от относительного положения ее частей. В том случае, когда она зависит от возмущения, обусловленного циркулярно поляризованным светом, она должна быть функцией только амплитуды r и коэффициента кручения q. Она может быть различной для отрицательных и положительных значений q, равных по абсолютной величине, и, вероятно, так оно и есть в случае сред, которые сами по себе вращают плоскость поляризации.

Кинетическая энергия системы T является однородной функцией вторых степеней скоростей системы, причем коэффициенты перед различными членами являются функциями координат.

819. Рассмотрим динамическое условие того, что луч может иметь постоянную интенсивность, т. е. величина r может оставаться постоянной.

Уравнение Лагранжа для силы по координате r становится таким:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{r}} - \frac{dT}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0. \tag{5}$$

Поскольку величина r постоянна, первый член исчезает. Мы, следовательно, имеем уравнение

$$-\frac{dT}{dr}+\frac{dV}{dr}=0, \tag{6}$$

в котором величина q предполагается заданной, и нам следует определить значение угловой скорости $\dot{\vartheta}$, которое мы можем обозначить через ее фактическое значение n.

Один член в кинетической энергии T содержит n^2, другие члены могут содержать произведения величины n на другие скорости, а остальные члены не зависят от n. Потенциальная энергия V вообще не зависит от n. Уравнение (6), следовательно, имеет вид

$$An^2+Bn+C=0. \tag{7}$$

Будучи квадратным, это уравнение дает два значения n. Из эксперимента следует, что оба значения являются действительными, одно из них положительно, а другое отрицательно, причем положительное значение по абсолютной величине больше отрицательного. Следовательно, если A положительно, то B и C отрицательны, поскольку если n_1 и n_2 являются корнями уравнения, то

$$A(n_1+n_2)+B=0. \tag{8}$$

Коэффициент B, таким образом, отличен от нуля, по крайней мере тогда, когда на среду действует магнитная сила. Поэтому мы должны рассмотреть выражение Bn, являющееся той частью кинетической энергии, которая содержит первую степень n — угловую скорость возмущения.

820. Каждый член в T является членом второго порядка относительно скорости. Следовательно, член, содержащий n, должен включать в себя еще какую-то скорость. Этой скоростью не может быть $\dot{r}$ или $\dot{q}$ поскольку в рассматриваемом нами случае r и q постоянны. Следовательно, это есть скорость, существующая в среде независимо от того движения, которое составляет свет. Она также должна быть скоростью по отношению к n в том смысле, чтобы при ее умножении на n получалась скалярная величина, поскольку только скалярные величины могут входить в T, значение которого само по себе является скаляром. Следовательно, эта скорость должна иметь то же направление, что и n, или противоположное направление, т. е. она должна быть *угловой скоростью* относительно оси z.

Опять-таки, эта скорость не может быть независимой от магнитной силы, ибо если бы она была отнесена к фиксированному относительно среды направлению, то поворот среды на 180° изменил бы явление, а это не имеет места.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что эта скорость неизменяемо сопутствует магнитной силе в тех средах, которые обнаруживают магнитное вращение плоскости поляризации.

821. До сих пор мы были вынуждены пользоваться языком, который, возможно, содержал слишком много намеков на обычную гипотезу движения в волновой теории. Легко, однако, сформулировать наш результат в свободной от этой гипотезы форме.

Что бы ни представлял собой свет, в каждой точке пространства что-то происходит — либо смещение, либо вращение, или нечто такое, что даже не поддает-

ся воображению, но что несомненно по своей природе является вектором, т. е. направленной величиной, ориентированной нормально к направлению луча. Это полностью доказано явлениями интерференции.

В случае циркулярно поляризованного света величина этого вектора остается всегда одной и той же, а его направление вращается вокруг направления луча, совершая один оборот за период волны. Существующая неопределенность относительно того, лежит ли этот вектор в плоскости поляризации или перпендикулярен к ней, не распространяется на наше представление о направлении его вращения в правостороннем и левостороннем циркулярно поляризованном свете соответственно. Направление вращения и угловая скорость этого вектора точно известны, хотя физическая природа вектора и его абсолютное направление в данный момент не определены.

Когда луч циркулярно поляризованного света падает на среду, находящуюся под действием магнитной силы, на его распространение в среде влияет отношение направления вращения света к направлению магнитной силы. Из этого мы заключаем (в соответствии с аргументацией п. 817), что в среде под действием магнитной силы происходит некоторое вращательное движение, ось которого лежит в направлении магнитных сил, и что скорость распространения циркулярно поляризованного света при совпадении направлений его колебательного вращения с магнитным вращением среды отлична от скорости распространения, когда эти направления противоположны.

Единственное сходство, которое мы можем проследить между средой, через которую распространяется циркулярно поляризованный свет, и средой, через которую проходят линии магнитной силы, состоит в том, что в обоих случаях имеется вращательное движение вокруг оси. Но здесь сходство кончается: вращение в оптическом явлении есть вращение вектора, представляющего собой некоторое возмущение. Этот вектор всегда перпендикулярен направлению луча и поворачивается вокруг него известное число раз в секунду. В магнитном явлении то, что вращается, не обладает свойствами, по которым можно различить его стороны; так что мы не можем определить, сколько поворотов совершается в секунду.

Следовательно, в магнитном явлении нет ничего, что соответствует длине волны и распространению волны в оптическом явлении. Среда, в которой действует постоянное магнитное поле, не заполнена благодаря наличию силы волнами, распространяющимися в одном направлении, как в случае, когда через эту среду распространяется свет. Единственное сходство между оптическим и магнитным явлениями состоит в том, что в каждой точке среды существует нечто такое, что имеет природу угловой скорости относительно оси, направленной вдоль магнитной силы.

О гипотезе молекулярных вихрей

822. Изучение действия магнетизма на поляризованный свет приводит, как мы уже видели, к выводу о том, что часть явления, происходящего в среде под действием магнитной силы, составляет нечто, относящееся к той же математической категории величин, что и угловая скорость, ось которой направлена вдоль магнитной силы.

Эта угловая скорость не может быть скоростью какой-либо части среды, имеющей заметные размеры и вращающейся как единое целое. Мы должны, следовательно, представлять его как вращение очень маленьких объемов среды, каждый из которых вращается вокруг своей собственной оси. Это и составляет гипотезу молекулярных вихрей.

Движение этих вихрей, хотя оно, как мы показали (п. 575), и не влияет заметно на видимые движения больших тел, может быть таким, чтобы воздействовать на то колебательное движение, от которого, согласно волновой теории, зависит распространение света. Смещения среды во время распространения света будут производить возмущение вихрей, а возмущенные таким образом вихри могут воздействовать на среду и этим влиять на характер распространения луча.

823. В том состоянии неведения относительно природы вихрей, в котором мы пребываем сейчас, невозможно установить закон, который связывает смещение среды с изменением вихрей. Поэтому мы будем предполагать, что изменение вихрей, вызванное смещением среды, подчинено тем же условиям, которые, как показал Гельмгольц в своем великом труде, посвященном Вихревому движению [2], регулируют изменение вихрей идеальной жидкости.

Правило Гельмгольца можно сформулировать следующим образом. Пусть P и Q будут две соседние частицы на оси вихря, тогда, если вследствие движения жидкости эти частицы окажутся в точках P',Q', линия $P'Q'$ будет представлять новое направление оси вихря, а его сила изменится в отношении $P'Q'$ к PQ.

Следовательно, если α, β, γ обозначают составляющие силы вихря, а ξ, η, ζ — смещение среды, значения α, β и γ станут равными

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \alpha\frac{d\xi}{dx} + \beta\frac{d\xi}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dz}, \\ \beta' &= \beta + \alpha\frac{d\eta}{dx} + \beta\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\eta}{dz}, \\ \gamma' &= \gamma + \alpha\frac{d\zeta}{dx} + \beta\frac{d\zeta}{dy} + \gamma\frac{d\zeta}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Теперь мы предположим, что то же самое условие выполнено при небольших смещениях среды, в которых α, β, γ представляют не составляющие силы обычного вихря, а составляющие магнитной силы.

824. Составляющие угловой скорости элемента среды равны

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Следующий шаг в нашей гипотезе состоит в предположении, что кинетическая энергия среды содержит член вида

$$2C(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3). \tag{3}$$

---

[2] *Crelle's Journal*, vol. IV (1858), p. 25—55. Перевод Тэта. *Phil. Mag.*, June, p. 485—151, 1867.

Это эквивалентно предположению, что угловая скорость, приобретаемая элементом среды при распространении света, есть величина, которая может входить в комбинации с тем движением, которым объясняются магнитные явления.

Для того чтобы получить уравнения движения среды, мы должны выразить ее кинетическую энергию через скорость ее частей, составляющими которой являются $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$. Таким образом, мы интегрируем по частям и находим

$$2C\iiint(\alpha\omega_1+\beta\omega_2+\gamma\omega_3)\,dx\,dy\,dz=C\iint(\gamma\dot\eta-\beta\dot\zeta)\,dy\,dz+C\iint(\alpha\dot\zeta-\gamma\dot\xi)\,dz\,dx+$$
$$+C\iint(\beta\dot\xi-\alpha\dot\eta)\,dx\,dy+C\iiint\left\{\dot\xi\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+\dot\eta\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+\dot\zeta\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}dx\,dy\,dz. \quad (4)$$

Двойные интегралы относятся к ограничивающей поверхности, которую можно предполагать расположенной на бесконечном расстоянии. Поэтому мы можем при исследовании того, что имеет место внутри среды, ограничиться рассмотрением тройного интеграла.

825. Часть кинетической энергии в единице объема, выражаемая этим тройным интегралом, может быть записана в виде

$$4\pi C(\dot\xi u+\dot\eta v+\dot\zeta w), \quad (5)$$

где u, v, w являются составляющими электрического тока в том виде, как они даны в уравнениях (E) п. 607.

Из этого следует, что наша гипотеза эквивалентна предположению о том, что скорость частицы среды с составляющими $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ является величиной, которая может входить в комбинации с электрическим током, составляющие которого u, v, w.

826. Если вернуться к выражению под знаком тройного интеграла в (4), подставив вместо значений α, β, γ значения α', β', γ', данные уравнениями (1), и записать

$$\frac{d}{dh}\ \text{вместо}\ \alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}, \quad (6)$$

то выражение под знаком интеграла станет таким:

$$C\left\{\dot\xi\frac{d}{dh}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right)+\dot\eta\frac{d}{dh}\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right)+\dot\zeta\frac{d}{dh}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right)\right\}. \quad (7)$$

В случае волн в плоскости, нормальной к оси z, смещения являются функциями только z и t, так что $d/dh=\gamma\, d/dz$, и это выражение сводится к следующему:

$$C\gamma\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot\eta-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot\xi\right). \quad (8)$$

Кинетическая энергия на единицу объема постольку, поскольку она зависит от скоростей смещения, может теперь быть записана в виде

$$T=\frac{1}{2}\rho(\dot\xi^2+\dot\eta^2+\dot\zeta^2)+C\gamma\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot\eta-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot\xi\right), \quad (9)$$

где ρ — плотность среды.

827. Составляющие X и Y приложенной силы, отнесенные к единице объема, могут быть выведены отсюда при помощи уравнений Лагранжа, п. 564. Заметим, что, опуская двойные интегралы по ограничивающей поверхности и дважды интегрируя по частям по z, можно показать, что

$$\iiint \frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}\,dx\,dy\,dz = \iiint \xi \frac{d^3\eta}{dz^2\,dt}\,dx\,dy\,dz.$$

Следовательно,

$$\frac{dT}{d\xi} = C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2\,dt}.$$

Таким образом, выражения для сил следующие:

$$X = \rho\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2C\gamma\frac{d^3\eta}{dz^2\,dt}, \tag{10}$$

$$Y = \rho\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2C\gamma\frac{d^3\xi}{dz^2\,dt}. \tag{11}$$

Эти силы возникают вследствие действия всей остальной среды на рассматриваемый элемент; в случае изотропной среды они должны иметь форму, указанную Коши:

$$X = A_0\frac{d^2\xi}{dz^2} + A_1\frac{d^4\xi}{dz^4} + \text{и т. д.}, \tag{12}$$

$$Y = A_0\frac{d^2\eta}{dz^2} + A_1\frac{d^4\eta}{dz^4} + \text{и т. д.} \tag{13}$$

828. Если мы теперь возьмем случай циркулярно поляризованного луча, для которого

$$\xi = r\cos(nt - qz), \qquad \eta = r\sin(nt - qz), \tag{14}$$

мы найдем для кинетической энергии в единице объема

$$T = \frac{1}{2}\rho r^2 n^2 - C\gamma r^2 q^2 n \tag{15}$$

и для потенциальной энергии в единице объема

$$V = \frac{1}{2}r^2(A_0 q^2 - A_1 q^4 + \ldots) = \frac{1}{2}r^2 Q, \tag{16}$$

где Q является функцией q^2.

Условие свободного распространения луча, данное уравнением (6) в п. 819, следующее:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dV}{dr}, \tag{17}$$

что дает

$$\rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = Q, \tag{18}$$

откуда можно найти величину n как функцию q.

Но в случае луча с заданным волновым периодом, на который действует магнитная сила, мы должны определить величину $dq/d\gamma$ при постоянном n, выражен-

ную через dq/dn при постоянном γ. Дифференцируем (18):

$$(2\rho n - 2C\gamma q^2)\,dn - \left(\frac{dQ}{dq} + 4C\gamma qn\right)dq - 2Cq^2 n\,d\gamma = 0. \tag{19}$$

Таким образом, находим

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{Cq^2 n}{\rho n - C\gamma q^2}\frac{dq}{dn}. \tag{20}$$

829. Если λ — длина волны в воздухе, v — скорость распространения в воздухе, а i — соответствующий показатель преломления в среде, то

$$q\lambda = 2\pi i, \qquad n\lambda = 2\pi v. \tag{21}$$

Изменение значения q, обусловленное магнитным действием, в каждом случае составляет чрезвычайно малую часть от его собственного значения, так что мы можем записать

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma}\gamma, \tag{22}$$

где q_0 — значение q при равной нулю магнитной силе. Угол ϑ, на который поворачивается плоскость поляризации при прохождении слоя среды толщиной c, равен полусумме положительного и отрицательного значений qc, причем знак результата меняется, поскольку в уравнениях (14) знак q отрицательный. Таким образом, мы получаем

$$\vartheta = -c\gamma\frac{dq}{d\gamma}, \tag{23}$$

$$= \frac{4\pi^2 C}{v\rho}c\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right)\frac{1}{1 - 2\pi C\gamma\dfrac{i^2}{v\rho\lambda}}. \tag{24}$$

Второй член в знаменателе этой дроби примерно равен углу поворота плоскости поляризации при прохождении через слой среды с толщиной, равной половине длины волны, деленной на π. Следовательно, во всех реальных случаях это величина, которой мы можем пренебречь по сравнению с единицей.

Записав

$$4\pi^2 C/(v\rho) = m, \tag{25}$$

мы можем назвать m коэффициентом магнитного вращения среды, величина которого должна быть определена из наблюдения. Обнаружено, что он положителен для большинства диамагнитных и отрицателен для некоторых парамагнитных сред. Мы имеем, таким образом, в качестве конечного результата нашей теории

$$\vartheta = mc\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right), \tag{26}$$

где ϑ — угол поворота плоскости поляризации, m — константа, определяемая наблюдением среды, γ — интенсивность составляющей магнитной силы в направлении луча, c — длина луча в пределах среды, λ — длина волны света в воздухе, i — показатель преломления среды.

830. Единственная проверка, которой к настоящему времени подвергнута эта теория, состоит в сравнении значений ϑ для различных типов света, проходящих

через одну и ту же среду и находящихся под действием одной и той же магнитной силы.

Это было проделано для значительного числа сред М. Вердье [3] (M. Verdet), который пришел к следующим результатам.

(1) Магнитное вращение плоскостей поляризации лучей различного цвета примерно следует закону обратного квадрата длины волны.

(2). Точный закон явления всегда таков, что произведение вращения на квадрат длины волны возрастает от наименее преломляемого к наиболее преломляемому концу спектра.

(3). Вещества, для которых это возрастание наиболее заметно, обладают также наибольшей относительной дисперсией.

Он также нашел, что в растворе винной кислоты, которая сама по себе производит вращение плоскости поляризации, магнитное вращение ни в коей мере не пропорционально естественному вращению.

В дополнении к этой же работе [4] Вердье дал результаты самых тщательных экспериментов с бисульфидом углерода и креозотом — двумя веществами, для которых отклонение от закона обратного квадрата длины волны весьма заметно. Он также сравнил эти результаты с числами, даваемыми трёмя различными формулами:

$$\text{(I)}\quad \vartheta = mc\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}\left(i-\lambda\frac{di}{d\lambda}\right),$$

$$\text{(II)}\quad \vartheta = mc\gamma\frac{1}{\lambda^2}\left(i-\lambda\frac{di}{d\lambda}\right),$$

$$\text{(III)}\quad \vartheta = mc\gamma\left(i-\lambda\frac{di}{d\lambda}\right).$$

Первая из этих формул (I) — это та, которую мы уже получили,— уравнение (26) п. 829. Вторая (II) — это та, которая получается при подстановке в уравнения движения (10), (11) п. 826 членов вида $d^3\eta/dt^3$ и $-d^3\xi/dt^3$ вместо $d^3\eta/dz^2dt$ и $-d^3\xi/dz^2dt$. Я не уверен, что эта форма уравнений была предложена какой-либо физической теорией. Третья формула (III) вытекает из физической теории Неймана [5], в которой уравнения движения содержат члены вида $d\eta/dt$ и $-d\xi/dt$ [6].

Очевидно, что значения ϑ, даваемые формулой (III), даже приближенно не пропорциональны обратному квадрату длины волны. Значения ϑ, даваемые фор-

---

[3] Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l'action du magnétisme, 4[me] partie. *Comptes Rendus*, t. LVI, p. 630 (6 April, 1863).

[4] *Comptes Rendus*, LVII, p. 670 (19 Oct., 1863).

[5] «Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur». *Halis Saxonum*, 1858.

[6] Эти три вида уравнений движения впервые были предложены сэром Дж. В. Эйри (Phil. Mag. June 1846, p. 477) в качестве средства для исследования явлений, только что открытых Фарадеем. Мак-Куллах (Mac Cullagh) перед этим предложил уравнения, содержащие члены вида d^3/dz^3, для того чтобы математически представить явления, происходящие в кварце. Эти уравнения были предложены Мак-Куллахом и Эйри «не как уравнения, дающие механическое объяснение явлений, а как уравнения, показывающие, что явления можно объяснить при помощи уравнений, которые выглядят так, как будто их можно вывести из некоторого разумного механического предположения, хотя никакого такого предположения не было сделано».

мулами (I) и (II), удовлетворяют этому условию и довольно хорошо согласуются с наблюдаемыми значениями для сред с умеренной относительной дисперсией. Однако для бисульфида углерода и креозота значения, даваемые (II), очень сильно отличаются от наблюдаемых. Значения, даваемые формулой (I), лучше согласуются с наблюдением, но, хотя это согласие несколько лучше для бисульфида углерода, значения для креозота все еще отличаются на величины, существенно превышающие те, которые можно было бы приписать любым ошибкам измерений.

Магнитное вращение плоскости поляризации (по Вердье)

БИСУЛЬФИД УГЛЕРОДА при 24, 9° C

Линии спектра	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Наблюдаемое вращение	592	768	1000	1234	1704
Вычисленное по I	589	760	1000	1234	1713
» » II	606	772	1000	1216	1640
» » III	943	967	1000	1034	1091

Вращение луча $E=25°28'$

КРЕОЗОТ ПРИ 24, 3° C

Линии спектра	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Наблюдаемое вращение	573	758	1000	1241	1723
Вычисленное по I	617	780	1000	1210	1603
» » II	623	789	1000	1200	1565
» » III	976	993	1000	1017	1041

Вращение луча $E=21°58'$

Мы так слабо знаем детали молекулярного строения тел, что маловероятно, чтобы можно было построить какую-либо удовлетворительную теорию, относящуюся к такому частному явлению, как магнитное воздействие на свет, до тех пор, пока с помощью индукции, опирающейся на набор различных случаев, где будет обнаружено, что наблюдаемые явления зависят от действий, в которых участвуют молекулы, мы не познаем нечто более определенное о тех свойствах, которые следует приписать молекуле для того, чтобы удовлетворить условиям наблюдаемых фактов.

Очевидно, что изложенная на предыдущих страницах теория является предварительной, покоящейся пока что на недоказанных гипотезах относительно природы молекулярных вихрей и способа воздействия на них смещения среды. Поэтому мы должны считать, что любое совпадение с наблюдаемыми фактами имеет гораздо меньшее научное значение в теории магнитного вращения плоскости поляризации, нежели в электромагнитной теории света, которая, хотя и включает гипотезы об электрических свойствах сред, но не опирается на предположения относительно строения их молекул.

831. Примечание. Все содержание этой главы можно рассматривать как развитие чрезвычайно важного замечания сэра Уильяма Томсона в «Трудах Королевского Общества» за июнь 1856 г.: «Магнитное влияние на свет, обнаруженное Фарадеем, зависит от направления движения движущихся частиц. Например, в среде, обладающей этой способностью, частицы, расположенные на прямой линии, параллельной линиям магнитной силы, будучи смещены спираль-

но относительно этой линии как оси и затем пущены тангенциально с такой скоростью, чтобы они вращались по окружностям, будут иметь разные скорости в соответствии с тем, происходит ли их движение в одном направлении (совпадающем с условным направлением гальванического тока в намагничивающей катушке) или в противоположном направлении. Но упругая реакция среды должна быть одинаковой при одинаковых смещениях, каковы бы ни были скорости и направления движения частиц, т. е. силы, которые уравновешиваются центробежной силой круговых движений, должны быть равны, в то время как световые движения не равны. Таким образом, абсолютные круговые движения либо равны друг другу, либо сообщают равные центробежные силы тем частицам, которые рассматривались нами первоначально. Из этого следует, что световые движения являются лишь компонентами полного движения и что меньшая световая составляющая в одном направлении, объединенная с движением, существующим в среде в отсутствие света, дает равный результат с большим световым движением в противоположном направлении, объединенным с тем же несветовым движением. Я думаю, что не только нельзя понять как-нибудь иначе (нежели с помощью этого динамического объяснения) тот факт, что циркулярно поляризованный свет с одним и тем же свойством (т. е. правовинтовой или левовинтовой) при прохождении через намагниченное стекло параллельно линиям магнитной силы распространяется с различными скоростями в соответствии с тем, совпадает ли его направление с направлением на северный магнитный полюс или противоположно ему, но я верю, что можно показать невозможность какого-либо другого объяснения этого факта. Отсюда следует, что оптическое открытие Фарадея является демонстрацией реальности объяснения Ампером первичной природы магнетизма и дает определение намагниченности в динамической теории тепла. Введение принципа сохранения момента количества движения («сохранения площадей») в механическое рассмотрение гипотезы Ранкина (Rankine) о «молекулярных вихрях», по-видимому, указывает на линию, перпендикулярную плоскости результирующего вращательного импульса («неизменная плоскость») тепловых движений, как на магнитную ось намагниченного тела и предлагает их результирующий момент количества движения в качестве определенной меры «магнитного момента». Объяснение всех явлений электромагнитного притяжения или отталкивания и электромагнитной индукции следует искать просто в инерции и давлении материи, движения которой образуют тепло. Является или не является эта материя электричеством, является или не является она непрерывной жидкостью, заполняющей промежуток между молекулярными ядрами, или это просто сгруппированы сами молекулы; или вся материя является непрерывной, и молекулярная неоднородность состоит в конечных вихревых или других относительных движениях близлежащих частей тела — все это невозможно решить и, по-видимому, напрасно делать какие-либо предположения при настоящем состоянии науки».

Теория молекулярных вихрей, которую я в значительной степени разработал, опубликована в *Phil. Mag.* за март, апрель и май 1861 г. и январь и февраль 1862 г.

Я думаю, что у нас есть хорошие основания полагать, что какое-то явление вращения имеет место в магнитном поле; в этом вращении участвует большое число очень маленьких порций вещества, вращающихся каждая вокруг своей собственной оси, причем эта ось параллельна направлению магнитной силы, и вра-

щения этих вихрей зависят одно от другого, будучи связаны посредством некоторого механизма.

Попытку, которую я сделал, представив себе работающую модель такого механизма, не следует принимать за нечто большее, чем она является на самом деле, а именно демонстрацией того, что можно представить себе такой механизм, способный производить связь, механически эквивалентную связи частей электромагнитного поля. Задача определения механизма, необходимого для установления данных видов связи между движениями частей системы, всегда допускает бесконечное число решений. Некоторые из них могут быть более грубыми или более сложными, чем другие, но все они должны удовлетворять условиям механизма в целом.

Большую ценность, однако, представляют следующие результаты теории:

(1). Магнитное поле является результатом действия центробежной силы вихрей.

(2). Электромагнитная индукция токов является результатом действия сил, вступающих в игру при изменении скоростей вихрей.

(3). Электромагнитная сила возникает при напряжениях связывающего механизма.

(4). Электрическое смещение возникает при упругой реакции связывающего механизма.

ГЛАВА XXII

ОБЪЯСНЕНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА И ДИАМАГНЕТИЗМА МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ТОКАМИ

Об электромагнитных теориях магнетизма

832. Мы уже видели (п. 380), что действие магнитов друг на друга может быть точно представлено притяжениями и отталкиваниями воображаемого вещества, называемого магнитной материей. Мы привели доводы, почему не следует предполагать, что эта магнитная материя перемещается от одной части магнита к другой на заметное расстояние, как это кажется на первый взгляд, когда мы намагничиваем стержень. Мы пришли к гипотезе Пуассона о том, что магнитная материя сосредоточена строго в отдельных молекулах магнитного вещества, причем намагниченной является такая молекула, в которой противоположные виды магнитной материи более или менее разделены в направлении противоположных полюсов молекулы, но таким образом, что ни одна часть любого из видов магнитной материи фактически не может быть отделена от молекулы (п. 430).

Эти аргументы полностью устанавливают тот факт, что намагниченность есть явление, относящееся не к большим массам железа, а к молекулам, иначе говоря, к частям вещества настолько малым, что мы никаким механическим способом не можем разделить одну из них надвое, так чтобы получить северный полюс отдельно от южного полюса. Однако для установления природы магнитной молекулы несомненно требуются дополнительные исследования. Мы уже видели (п. 442),

что имеются сильные основания полагать, что акт намагничивания железа или стали не состоит в намагничивании молекул, из которых они образованы, но что эти молекулы уже являются магнитными даже в ненамагниченном железе, при этом их оси базразлично ориентированы во всех направлениях. Акт намагничивания состоит в повороте молекул таким образом, что их оси либо все становятся параллельными одному направлению, либо, по крайней мере, отклоняются к этому направлению.

833. Тем не менее мы все еще не пришли ни к какому объяснению природы магнитной молекулы, т. е. мы еще не нашли ее сходства с какой-либо другой более известной нам вещью. Поэтому нам следует рассмотреть гипотезу Ампера о том, что магнетизм молекулы обусловлен электрическим током, постоянно циркулирующим по некоторому замкнутому пути внутри молекулы.

Можно точно имитировать действие любого магнита в точках, внешних по отношению к нему, с помощью листа электрических токов, соответствующим образом распределенных по внешней поверхности магнита. Но действие магнита в точках внутри него совершенно отлично от действия электрических токов в соответствующих точках. Поэтому Ампер заключил, что если магнетизм следует объяснять при помощи электрических токов, эти токи должны циркулировать в пределах молекул магнита и не должны течь от одной молекулы к другой. Поскольку мы не можем экспериментально измерить магнитное действие в какой-либо точке внутри молекулы, эта гипотеза не может быть опровергнута таким же путем, как мы можем опровергнуть гипотезу о токах заметной протяженности внутри магнита.

Кроме того, мы знаем что электрический ток, проходя от одной части проводника к другой, испытывает сопротивление и порождает тепло, так что если бы токи обычного вида протекали вокруг частей магнита заметных размеров, то имелся бы постоянный расход энергии, необходимый для их поддержания, а магнит бы являлся постоянным источником тепла. Ограничивая контуры молекулами, о сопротивлении внутри которых ничего неизвестно, мы можем, не боясь впасть в противоречие, утверждать, что ток, циркулирующий внутри молекулы, не испытывает сопротивления.

Следовательно, по теории Ампера все явления магнетизма обусловлены электрическими токами, и если бы мы могли измерять магнитную силу внутри магнитной молекулы, мы обнаружили бы, что она подчиняется точно тем же законам, что и сила в области, окруженной любым другим электрическим контуром.

834. При рассмотрении силы внутри магнитов мы предполагали, что измерения выполняются в небольшой полости, образованной в веществе магнита (п. 395). Мы, таким образом, пришли к необходимости рассмотрения двух различных величин, магнитной силы и магнитной индукции, каждую из которых предполагается измерять в пространстве, из которого удалена магнитная материя. Мы не предполагали, что можем проникнуть внутрь магнитной молекулы и наблюдать силу внутри нее.

Если мы принимаем теорию Ампера и рассматриваем магнит не как непрерывное вещество, намагниченность которого меняется от точки к точке в соответствии с каким-то легко устанавливаемым законом, но как множество молекул, внутри каждой из которых циркулирует система электрических токов, создающих очень сложное распределение магнитной силы, то направление магнитной силы

внутри молекулы будет обычно противоположно направлению средней силы в ее окрестности, а магнитный потенциал, если он вообще существует, является функцией, степень кратности которой определяется числом молекул в магните.

835. Но мы обнаружим, что, несмотря на видимую сложность, которая вытекает просто из существования множества более простых частей, математическая теория магнетизма значительно упрощается, если принять теорию Ампера и распространить наши математические представления на внутренние части молекул.

Прежде всего два определения магнитной силы сводятся к одному — к определению магнитной силы для пространства вне магнита. Далее, составляющие магнитной силы везде удовлетворяют условию, которому подчиняются составляющие индукции, а именно

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0. \qquad (1)$$

Другими словами, распределение магнитной силы имеет ту же природу, что и распределение скорости несжимаемой жидкости, или, как мы это выразили в п. 25, магнитная сила не имеет конвергенции.

Наконец, три векторные функции — электромагнитный импульс, магнитная сила и электрический ток — более просто связаны друг с другом. Все они являются векторными функциями, не имеющими конвергенции, и получаются последовательно одна из другой при помощи одной и той же операции пространственного дифференцирования, которая была обозначена Гамильтоном символом ∇.

836. Но теперь мы рассматриваем магнетизм с физической точки зрения, поэтому мы должны исследовать физические свойства молекулярных токов. Мы предполагаем, что ток циркулирует в молекуле и что он не испытывает сопротивления. Если L — коэффициент самоиндукции молекулярного контура, а M — коэффициент взаимной индукции между этим контуром и каким-то другим, и если γ есть сила тока в молекуле, а γ' — сила тока в другом контуре, то уравнение для тока γ следующее:

$$\frac{d}{dt}(L\gamma+M\gamma')=-R\gamma; \qquad (2)$$

а так как, согласно предположению, сопротивление отсутствует, то $R=0$ и, интегрируя, мы получаем

$$L\gamma+M\gamma'=\text{constant}=L\gamma_0 \text{ (скажем)}. \qquad (3)$$

Предположим, что площадь проекции молекулярного контура на плоскость, перпендикулярную оси молекулы, равна A, причем эта ось определена как нормаль к плоскости, на которой проекция максимальна. Если действие других токов обусловливает магнитную силу X в направлении, наклон которого к оси молекулы равен ϑ, то величина $M\gamma'$ равняется $XA\cos\vartheta$, и в качестве уравнения тока мы имеем

$$L\gamma+XA\cos\vartheta=L\gamma_0, \qquad (4)$$

где γ_0 есть значение γ при $X=0$.

Таким образом, получается, что сила молекулярного тока полностью зависит от его первичного значения γ_0 и от интенсивности магнитной силы, обусловленной другими токами.

837. Если мы предположим, что первичный ток отсутствует и весь ток целиком обусловлен индукцией, тогда

$$\gamma = -(XA/L)\cos\vartheta. \tag{5}$$

Отрицательный знак показывает, что направление индуцированного тока противоположно направлению индуцирующего тока, а его магнитное действие таково, что внутри контура он действует против направления магнитной силы. Другими словами, молекулярный ток действует как небольшой магнит, полюса которого повернуты в сторону одноименных полюсов индуцирующего магнита.

Это действие противоположно действию молекул железа, находящихся под магнитным воздействием. Следовательно, молекулярные токи в железе не возбуждаются индукцией. Но в диамагнитных веществах действие такого рода наблюдается, и это действие является объяснением диамагнитной полярности, которое впервые было дано Вебером.

Веберовская теория диамагнетизма

838. Согласно теории Вебера в молекулах диамагнитных веществ существуют некоторые каналы, по которым электрический ток может циркулировать без сопротивления. Очевидно, что если мы предположим, что эти каналы пересекают молекулу во всех направлениях, это эквивалентно тому, что молекула считается идеальным проводником.

Если начать с предположения о линейном контуре внутри молекулы, то сила тока задается уравнением (5).

Магнитный момент тока равен произведению его силы на площадь контура, т. е. γA, а составляющая его в направлении намагничивающей силы равна $\gamma A\cos\vartheta$, или, согласно (5),

$$-(XA^2/L)\cos^2\vartheta. \tag{6}$$

Если в единице объема имеется n таких молекул, а их оси распределены безразлично по всем направлениям, тогда среднее значение $\cos^2\vartheta$ будет равно 1/3, а интенсивность намагниченности вещества будет

$$-\frac{1}{3}\frac{nXA^2}{L}. \tag{7}$$

Следовательно, неймановский коэффициент намагниченности равен

$$\varkappa = -\frac{1}{3}\frac{nA^2}{L}. \tag{8}$$

Намагничивание вещества, таким образом, происходит в направлении, противоположном магнитной силе, или, другими словами, вещество является диамагнитным. Намагниченность точно так же пропорциональна намагничивающей силе и не стремится к конечному пределу, как в случае обычной магнитной индукции (см. п. 442 и далее).

839. Если оси молекулярных каналов ориентированы не безразлично во всех направлениях, а с преобладанием в некоторых из них, то сумма $\sum(A^2/L)\cos^2\vartheta$, распространенная на все молекулы, будет иметь различные значения в зависимости от направления линии, от которой измеряется ϑ, распределение этих значений в

различных направлениях будет подобно распределению значений моментов инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку в различных направлениях.

Такое распределение сможет объяснить описанные Плюкером обусловленные наличием осей в теле магнитные явления, которые Фарадей назвал Магнитокристаллическими (см. п. 435).

840. Рассмотрим теперь, что будет, если вместо того, чтобы считать, что электрический ток в молекуле протекает внутри определенного канала, предположить, что вся молекула является идеальным проводником.

Начнем со случая тела, форма которого является ацикличной, иначе говоря, которое не имеет форму кольца или дырявого тела, и предположим, что это тело со всех сторон покрыто тонкой оболочкой идеально проводящей материи.

В п. 654 мы уже доказали, что замкнутый лист идеально проводящей материи произвольной формы, первоначально свободный от токов, становится под действием магнитной силы токовым листом, действие которого обеспечивает равенство нулю магнитной силы в каждой точке внутри объема, ограниченного листом.

Мы можем лучше понять этот случай, если учтем, что распределение магнитной силы в окрестности такого тела подобно распределению скорости несжимаемой жидкости в окрестности непроницаемого тела той же формы.

Очевидно, что если другие проводящие оболочки помещены внутри первой, то токи в них возбуждаться не будут, поскольку они не подвержены действию магнитной силы. Следовательно, в твердом идеально проводящем материале действие магнитной силы состоит в возбуждении системы токов, которые полностью сосредоточены на поверхности тела.

841. Если проводящее тело имеет форму сферы радиуса r, можно показать, что его магнитный момент равен $-r^3X/2$. Если в среде распределено некоторое количество таких сфер, так что в единице объема объем проводящего вещества равен k', тогда, полагая в уравнении (17) п. 314 $k_1=\infty$, $k_2=1$ и $p=k'$, мы находим коэффициент магнитной проницаемости, как величину соответствующую обратно сопротивлению в том параграфе, а именно

$$\mu=\frac{2-2k'}{2+2k'}, \tag{9}$$

откуда мы получаем для магнитного коэффициента Пуассона

$$k=-\frac{1}{2}k' \tag{10}$$

и для неймановского коэффициента намагниченности через индукцию

$$\varkappa=-\frac{3}{4\pi}\frac{k'}{2+k'}. \tag{11}$$

Поскольку математическая концепция идеально проводящих тел ведет к результатам, сильно отличающимся от всех явлений, которые мы можем наблюдать в обычных проводниках, продолжим исследование несколько дальше.

842. Возвращаясь к случаю проводящего канала в форме замкнутой кривой, ограничивающей площадь A, как в п. 836, мы имеем для момента электро-

магнитных сил, стремящихся увеличить угол ϑ:

$$\gamma\gamma' \frac{dM}{d\vartheta} = -\gamma XA \sin\vartheta. \qquad (12)$$

$$= \frac{X^2A^2}{L} \sin\vartheta\cos\vartheta. \qquad (13)$$

Эта сила положительна или отрицательна в зависимости от того, больше или меньше прямого угла угол ϑ. Следовательно, магнитная сила, действующая на идеально проводящий канал, стремится повернуть его ось перпендикулярно линии магнитной силы, т. е. так, чтобы плоскость канала стала параллельной линиям силы.

Действие подобного рода можно наблюдать, помещая медную монетку или колечко между полюсами электромагнита. В момент возбуждения магнита плоскость кольца поворачивается в аксиальном направлении, но эта сила исчезает по мере того, как затухают токи из-за сопротивления меди [1].

843. Пока мы рассмотрели лишь случай, в котором молекулярные токи полностью возбуждаются внешней магнитной силой. Изучим теперь отношение веберовской теории магнитоэлектрической индукции молекулярных токов к амперовой теории обычного магнетизма. Согласно Амперу и Веберу, молекулярные токи в магнитных веществах не возбуждаются внешней магнитной силой, но существуют там заранее, а сама молекула находится под воздействием магнитной силы и отклоняется из-за ее электромагнитного действия на проводящий контур, в котором течет ток. Когда Ампер разрабатывал эту гипотезу, индукция электрических токов еще не была известна, и он не делал никаких предположений относительно существования или определения силы молекулярных токов.

Мы, однако, теперь вынуждены применять к этим токам те же законы, которые применял Вебер к своим токам в диамагнитных молекулах. Мы должны лишь предположить, что первоначальное значение тока γ, когда нет воздействия магнитной силы, не равно нулю, а равно γ_0. Если магнитная сила X действует на молекулярный ток, обтекающий площадь A, ось которой наклонена под углом ϑ к линии магнитной силы, то сила тока равна

$$\gamma = \gamma_0 - (XA/L)\cos\vartheta, \qquad (14)$$

а момент пары сил, стремящихся повернуть молекулу так, чтобы увеличить угол ϑ, равен

$$-\gamma_0 XA \sin\vartheta + (X^2A^2/2L)\sin 2\vartheta. \qquad (15)$$

Следовательно, если в исследованиях п. 443 положить

$$A\gamma_0 = m, \quad (A/L\gamma_0) = B, \qquad (16)$$

то уравнение равновесия становится таким:

$$X\sin\vartheta - BX^2\sin\vartheta\cos\vartheta = D\sin(\alpha - \vartheta). \qquad (17)$$

---

[1] См. Faraday, *Exp. Res.*, 2310.

Составляющая магнитного момента тока в направлении X равна

$$\gamma A \cos\vartheta = \gamma_0 A \cos\vartheta - \frac{XA^2}{L}\cos^2\vartheta, \qquad (18)$$

$$= m\cos\vartheta\,(1 - BX\cos\vartheta). \qquad (19)$$

844. Эти условия отличаются от условий веберовской теории магнитной индукции членами, содержащими коэффициент B. Если произведение BX мало по сравнению с единицей, результаты будут приближаться к результатам веберовской теории магнетизма. Если произведение BX велико по сравнению с единицей, результаты будут приближаться к результатам веберовской теории диамагнетизма.

Далее, чем больше первоначальное значение молекулярного тока γ_0, тем меньше будет становиться B, а если L велико, это также будет уменьшать B. Если ток течет по кольцевому каналу, значение L зависит от $\ln(R/r)$, где R — радиус средней линии канала, а r — радиус его сечения. Следовательно, чем меньше сечение канала по сравнению с его площадью, тем больше будет коэффициент самоиндукции L и тем ближе будут согласовываться явления с первоначальной веберовской теорией. Здесь, однако, будет то отличие, что при увеличении намагничивающей силы X временный магнитный момент не только достигает максимума, но и уменьшается при дальнейшем увеличении X.

Если когда-нибудь экспериментально будет доказано, что временная (индуцированная) намагниченность какого-либо вещества вначале возрастает, а затем уменьшается по мере непрерывного увеличения намагничивающей силы, доказательство существования этих молекулярных токов будет, я думаю, почти несомненным.

845. Если молекулярные токи в диамагнитных веществах ограничены определенными каналами и если молекулы способны отклоняться, подобно молекулам магнитных веществ, тогда по мере увеличения намагничивающей силы диамагнитная полярность всегда будет возрастать, однако не так быстро, как намагничивающая сила, если последняя велика. Малая абсолютная величина диамагнитного коэффициента показывает, однако, что отклоняющая сила, действующая на каждую диамагнитную молекулу, должна быть малой по сравнению с силой, действующей на магнитную молекулу, так что любой результат, обусловленный этим отклонением, вряд ли будет заметен.

Если, с другой стороны, молекулярные токи в диамагнитных телах могут течь через все вещество молекул, то диамагнитная полярность будет строго пропорциональна намагничивающей силе; ее величина дает возможность определить весь объем, занятый идеально проводящими массами, а если мы знаем число молекул,— определить размер каждой из них.

ГЛАВА XXIII
ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИЯ НА РАССТОЯНИИ

Объяснение формулы Ампера, данное Гауссом и Вебером

846. По формуле Ампера притяжение между элементами ds и ds' двух контуров, несущих электрические токи i и i', равно

$$\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2\cos\varepsilon + 3\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right), \tag{1}$$

или

$$-\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2r\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right), \tag{2}$$

где силы токов даны в электромагнитных единицах (см. п. 526).

Теперь мы должны интерпретировать величины, фигурирующие в этих выражениях, т. е.

$$\cos\varepsilon,\quad \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\quad \text{и}\quad \frac{d^2r}{ds\,ds'},$$

причем наиболее очевидным фактом, к которому следует обратиться в поисках интерпретации, основанной на прямом соотношении между токами, является наличие относительной скорости электричества в этих двух элементах.

847. Рассмотрим в связи с этим относительное движение двух частиц, перемещающихся с постоянными скоростями v и v' вдоль элементов ds и ds' соответственно. Квадрат относительной скорости этих частиц равен

$$u^2 = v^2 - 2vv'\cos\varepsilon + v'^2, \tag{3}$$

и если обозначить расстояние между частицами через r, то

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{dr}{ds} + v'\frac{dr}{ds'}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = v^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2vv'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + v'^2\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2\frac{d^2r}{ds^2} + 2vv'\frac{d^2r}{ds\,ds'} + v'^2\frac{d^2r}{ds'^2}, \tag{6}$$

где символ ∂ указывает на то, что координаты частицы в дифференциальных величинах должны быть выражены как функции времени.

Оказывается, таким образом, что в уравнениях (3), (5) и (6) члены, включающие произведение vv', содержат величины, встречающиеся в (1) и (2), которые мы должны интерпретировать. Поэтому мы попытаемся выразить (1) и (2) через u^2, $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$ и $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$. Однако для того, чтобы проделать это, нам необходимо избавиться от первого и третьего членов каждого из этих выражений, поскольку они содержат величины, не фигурирующие в формуле Ампера. Следовательно, мы не в состоянии объяснить электрический ток как перенос электричества только в одном направлении, мы должны объединить два противоположных потока в каждом из токов так, чтобы объединенный эффект со стороны членов, содержащих v^2 и v'^2, мог быть равен нулю.

848. Для этого предположим, что в первом элементе ds мы имеем одну электрическую частицу e, движущуюся со скоростью v, и другую e_1, движущуюся со скоростью v_1, и аналогично в элементе ds' две частицы e' и e_1', движущиеся соответственно со скоростями v' и v_1'.

Член, содержащий v^2, при совместном действии этих частиц равен

$$\sum (v^2 ee') = (v_1^2 e + v_1^2 e)(e' + e_1'). \qquad (7)$$

Аналогично

$$\sum (v'^2 ee') = (v'^2 e' + v_1'^2 e_1')(e + e_1) \qquad (8)$$

и

$$\sum (vv' ee') = (ve + v_1 e_1)(v' e' + v_1' e_1'). \qquad (9)$$

Для того чтобы сумма $\sum (v^2 ee')$ могла обратиться в нуль, мы должны иметь либо

$$e' + e_1' = 0, \quad \text{либо} \quad v^2 e + v_1^2 e_1 = 0. \qquad (10)$$

В соответствии с гипотезой Фехнера (Fechner) электрический ток состоит из тока положительного электричества в положительном направлении в сочетании с током отрицательного электричества в отрицательном направлении, причем оба тока точно равны друг другу по абсолютной величине как в отношении количества электричества, так и в отношении скорости перемещения. Таким образом, гипотеза Фехнера удовлетворяет обоим условиям (10).

Для нашей цели, однако, достаточно предположить, что:

либо в каждом элементе количество положительного электричества численно равно количеству отрицательного электричества,

либо количества электричества этих двух видов обратно пропорциональны квадратам их скоростей.

Далее, мы знаем, что, заряжая второй проводящий провод в целом, мы можем сделать $e' + e_1'$ величиной положительной или отрицательной. Такой заряженный провод даже без тока, согласно этой формуле, оказывал бы действие на первый провод, несущий ток, в котором величина $v^2 e + v_1^2 e_1$ принимала бы отличное от нуля значение. Но такое действие никогда не наблюдалось.

Поскольку величина $e' + e_1'$, как это можно показать экспериментально, не всегда равна нулю, а величина $v^2 e + v_1^2 e_1$ экспериментального определения не допускает, то лучше в наших рассуждениях предположить, что именно эта последняя величина неизменно обращается в нуль.

849. Какую бы гипотезу мы ни приняли, нет никаких сомнений в том, что полный перенос электричества вдоль первого контура, исчисляемый алгебраически, представляется формулой

$$ve + v_1 e_1 = cids,$$

где c — количество единиц статического электричества, передаваемого единичным электрическим током в единицу времени; таким образом, уравнение (9) мы можем записать в виде

$$\sum (vv' ee') = c^2 ii' ds\, ds'. \qquad (11)$$

Следовательно, суммы четырех значений величин, определяемых уравнениями (3), (5) и (6), станут такими:

$$\Sigma (ee'u^2) = -2c^2ii'ds\,ds'\cos\varepsilon, \tag{12}$$

$$\Sigma\left(ee'\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right) = 2c^2ii'\,ds\,ds'\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}, \tag{13}$$

$$\Sigma\left(ee'r\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right) = 2c^2ii'\,ds\,ds'r\,\frac{d^2r}{ds\,ds'}, \tag{14}$$

и мы можем записать выражения (1) и (2) для силы притяжения между ds и ds' в виде

$$-\frac{1}{c^2}\Sigma\left[\frac{ee'}{r^2}\left(u^2-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right], \tag{15}$$

$$-\frac{1}{c^2}\Sigma\left[\frac{ee'}{r^2}\left(r\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right]. \tag{16}$$

850. Обычное в теории статического электричества выражение для силы отталкивания между двумя электрическими частицами e и e' есть ee'/r^2, и

$$\Sigma\left(\frac{ee'}{r^2}\right) = \frac{(e+e_1)(e'+e_1')}{r^2}, \tag{17}$$

что и дает электростатическое отталкивание между двумя элементами, если они в целом заряжены.

Следоватально, если допустить, что отталкивание двух частиц происходит согласно одному из двух модифицированных выражений

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(u^2-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right] \tag{18}$$

или

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(r\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right], \tag{19}$$

то мы сможем вывести из них и обычные электростатические силы, и силы, действующие между токами так, как они были определены Ампером.

851. Первое из этих выражений, (18), было открыто в июне 1835 г. Гауссом [1], он истолковал его как основной закон электрического действия, состоящий в том, что «два элемента электричества, находящиеся в состоянии относительного движения, притягивают или отталкивают друг друга, но не так, как если бы они находились в состоянии относительного покоя». Это открытие не было, насколько мне известно, опубликовано при жизни Гаусса, так что второе выражение, открытое независимо В. Вебером и опубликованное в первой части его знаменитого труда *Elektrodynamische Maasbestimmungen* [2], было первым такого рода результатом, сделавшимся известным научному миру.

852. Эти два выражения приводят к одному и тому же результату, будучи применены к определению механической силы между двумя электрическими токами, и этот результат совпадает с результатом Ампера. Однако, когда мы рас-

[1] *Werke* (Göttingen edition, 1867), vol. V, p. 616.
[2] *Abh. Leibnizens Ges.*, Leipzig (1846), p. 316.

сматриваем их как выражения физического закона взаимодействия двух заряженных частиц, мы обязаны спросить себя, согласуются ли они с другими известными фактами природы.

Оба эти выражения включают в себя относительные скорости частиц. Далее, при математическом обосновании хорошо известного принципа сохранения энергии обычно предполагается, что сила, действующая между двумя частицами, является функцией только расстояния между ними; принято считать, что если эта сила окажется функцией еще чего-нибудь, например времени или скорости частиц, то доказательство утрачивает смысл.

Поэтому иногда полагают, что закон электрического действия, содержащий скорость частиц, несовместим с принципом сохранения энергии.

853. Формула Гаусса не согласуется с этим принципом и поэтому должна быть отвергнута, так как она приводит к заключению, что энергию можно было бы неограниченно создавать в ограниченной системе с помощью физических средств. Это возражение неприменимо по отношению к формуле Вебера, ибо им было показано [3], что если принять в качестве потенциальной энергии системы, состоящей из двух электрических частиц, величину

$$\psi = \frac{ee'}{r}\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right], \qquad (20)$$

то отталкивание между частицами, которое находится путем дифференцирования этой величины по r и смены знака, дается формулой (19).

Таким образом, работа, совершаемая над движущейся частицей силой отталкивания со стороны неподвижной частицы, равна $\psi_0 - \psi_1$, где ψ_0 и ψ_1 — значения ψ в начале и в конце пути частицы. Теперь ψ зависит только от расстояния r и от проекции скорости на направление r. Поэтому, если частица описывает произвольный замкнутый путь, так что ее положение, скорость и направление движения в конце и в начале пути одинаковы, то величина ψ_1 равна ψ_0 и в целом за цикл работа не совершается.

Следовательно, частица, совершающая периодическое движение под действием силы, принятой Вебером, не может производить неограниченное количество работы.

854. Однако Гельмгольц в своей очень сильной работе «Уравнения движения электричества в покоящихся проводниках»[4], показав, что формула Вебера не противоречит принципу сохранения энергии, пока речь идет только о работе, совершаемой при полном цикле, указывает, что она ведет к заключению, что две электризованные частицы, движущиеся в соответствии с законом Вебера, могут иметь вначале конечные скорости, а затем, все еще находясь на конечном расстоянии друг от друга, могут приобрести бесконечную кинетическую энергию и совершить бесконечное количество работы.

На это Вебер отвечает [5], что начальные скорости частиц относительно друг друга в примере Гельмгольца, хотя и конечны, однако превышают скорость света, и что расстояние, на котором кинетическая энергия становится бесконечной,

---

[3] *Pogg. Ann.*, LXXIII, p. 229 (1848).
[4] *Crelle's Journal*, 72, p. 57—129 (1870).
[5] *Elektr. Maasb. inbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie.*

хотя и конечно, но меньше любой величины, какую мы можем различать, так что физически невозможно настолько сблизить две молекулы. Следовательно, этот пример не может быть проверен никаким экспериментальным методом.

Гельмгольц[6] поэтому отыскал такой случай, в котором расстояния не очень малы, а скорости не очень велики для экспериментального подтверждения. Неподвижная непроводящая сферическая поверхность радиуса a однородно заряжена электричеством с поверхностной плотностью σ. Частица с массой m, несущая электрический заряд e, двигается внутри сферы со скоростью v. Электродинамический потенциал, вычисленный по формуле (20), равен

$$4\pi a\sigma e\left(1-\frac{v^2}{6c^2}\right) \tag{21}$$

и не зависит от положения частицы внутри сферы. Добавляя сюда остальную потенциальную энергию V, обусловленную действием других сил, и величину $mv^2/2$, равную кинетической энергии частицы, в качестве уравнения энергии находим

$$\frac{1}{2}\left(m-\frac{4}{3}\frac{\pi a\sigma e}{c^2}\right)v^2+4\pi a\sigma e+V=\text{const}. \tag{22}$$

Поскольку второй член в коэффициенте при v^2 можно неограниченно увеличивать путем увеличения радиуса сферы a, оставляя постоянной поверхностную плотность σ, коэффициент при v^2 можно сделать отрицательным. Ускорение движения частицы тогда соответствовало бы уменьшению ее *vis viva* (живой силы) и тело, движущееся по замкнутому пути, под действием силы наподобие трения, всегда противоположной по направлению движения тела, непрерывно увеличивало бы свою скорость, причем неограниченно. Этот невозможный результат является необходимым следствием принятия любой формулы для потенциала, в которой вводятся отрицательные члены в коэффициент перед v^2.

855. Теперь, однако, мы должны рассмотреть приложение веберовской теории к тем явлениям, которые могут быть осуществлены. Мы видели уже, как она дает выражение Ампера для силы притяжения между двумя элементами электрических токов. Потенциал, создаваемый одним из этих элементов на другом элементе, находится путем суммирования значений потенциалов ψ для четырех комбинаций положительных и отрицательных токов в этих двух элементах. Согласно уравнению (20), суммирование четырех значений $(dr/dt)^2$ дает

$$-ii'\,ds\,ds'\,\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}, \tag{23}$$

а потенциал одного замкнутого тока на другом равен

$$-ii'\iint\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'=ii'M, \tag{24}$$

где

$$M=\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds', \tag{25}$$

[6] *Berlin Monatsbericht*, April 1872, p. 247—256; *Phil. Mag.*, Dec. 1872, *Supp.*, p. 530—537.

как в п. 423, 524. В случае замкнутых токов это выражение согласуется с выражением, полученным нами в п. 524[7].

Веберовская теория индукции электрических токов

856. После того как из формулы Ампера для взаимодействия между элементами токов Вебер вывел свою собственную формулу для взаимодействия между движущимися электрическими частицами, он перешел к применению этой формулы для объяснения возникновения электрических токов при магнитоэлектрической индукции. В этом он достиг выдающегося успеха, и мы укажем метод, с помощью которого законы индуцированных токов могут быть выведены из формулы Вебера. Но мы должны заметить, что то обстоятельство, что закон, выведенный из открытого Ампером явления, также может объяснить явление, открытое впоследствии Фарадеем, не слишком много добавляет к доказательству физической истинности закона, как можно было бы предположить вначале.

Действительно, Гельмгольцем и Томсоном было показано (см. п. 543), что если явления Ампера истинны и если принять принцип сохранения энергии, то явления индукции, открытые Фарадеем, следуют с необходимостью. Далее, веберовский закон вместе с различными предположениями относительно природы электрических токов, которые он в себя включает, в результате математических преобразований приводит к формуле Ампера. Закон Вебера также совместим с принципом сохранения энергии, если существует потенциал, а это все, что требуется для применимости принципа Гельмгольца и Томсона. Следовательно, мы можем утверждать, даже до того, как сделаны какие-то относящиеся к этому вычисления, что закон Вебера будет объяснять индукцию электрических токов. Таким образом, тот факт, что из вычислений найдено, что он объясняет индукцию электрических токов, не продвигает доказательства физической истинности закона.

С другой стороны, формула Гаусса, хотя она и объясняет явления притяжения токов, несовместима с принципом сохранения энергии и, следовательно, мы не можем утверждать, что она будет объяснять все явления индукции. В действительности так оно и есть, как мы увидим в п. 859.

857. Теперь мы должны рассмотреть электродвижущую силу, стремящуюся создать ток в элементе ds', обусловленную током в элементе ds, когда ds находится в движении и когда ток в нем переменный.

Согласно Веберу, действие на материал проводника, элементом которого является ds', есть *сумма* всех действий на электричество, которое он переносит. С другой стороны, электродвижущая сила, действующая на электричество в ds', является *разностью* электрических сил, действующих на положительное и отрицательное электричество в пределах этого элемента. Поскольку все эти силы действуют вдоль линии, соединяющей элементы, электродвижущая сила в ds' также находится на этой линии, и, для того чтобы получить электродвижущую силу в направлении ds', мы должны спроектировать силу на это направление. Чтобы применить формулу Вебера, мы должны вычислить различные входящие

[7] Во всем этом исследовании Вебер принял электродинамическую систему единиц. В настоящем трактате мы всюду используем электромагнитную систему. Электромагнитная единица тока относится к электродинамической единице как $\sqrt{2}$ к 1; п. 526.

в нее члены в предположении, что элемент ds находится в движении относительно ds' и что токи в обоих элементах меняются со временем. Найденные таким образом выражения будут содержать члены, включающие v^2, vv', v'^2, v, v', и члены, не включающие v или v', причем все они умножены на ee'. Рассматривая, как мы делали раньше, четыре значения каждого члена и обращаясь вначале к механической силе, которая возникает из суммы четырех значений, мы находим, что единственный член, который мы должны учитывать, это член, содержащий произведение $vv'ee'$.

Если затем мы рассмотрим силу, стремящуюся произвести ток во втором элементе, возникающую вследствие разницы действия первого элемента на отрицательное и положительное электричество второго элемента, мы найдем, что единственный член, который нам следует рассмотреть, это член, содержащий vee'. Мы можем записать четыре члена, входящие в $\sum(vee')$, таким способом:

$$e'(ve+v_1e_1) \quad \text{и} \quad e_1'(ve+\vartheta_1e_1).$$

Поскольку $e'+e_1'=0$, механическая сила, обусловленная этими членами, равна нулю, но электродвижущая сила, действующая на положительное электричество e', равна $(ve+v_1e_1)$, а сила, действующая на отрицательное электричество e_1', равна и противоположна ей.

858. Предположим теперь, что первый элемент ds движется относительно ds' со скоростью V в некотором направлении, и обозначим через $\widehat{Vds}$ и $\widehat{Vds'}$ углы между направлением V и направлениями ds и ds' соответственно; тогда квадрат относительной скорости u двух электрических частиц равен

$$u^2=v^2+v'^2+V-2vv'\cos\varepsilon+2Vv\cos\widehat{Vds}-2Vv'\cos\widehat{Vds'}. \tag{25}$$

Член с vv' — тот же самый, что и в уравнении (3). Член с v, от которого зависит электродвижущая сила, равен

$$2Vv\cos\widehat{Vds}.$$

Мы также имеем в этом случае для значения временной производной от r

$$\frac{\partial r}{\partial t}=v\frac{dr}{ds}+v'\frac{dr}{ds'}+\frac{dr}{dt}, \tag{26}$$

где $\partial r/\partial t$ относится к движению электрических частиц, а dr/dt — к движению материального проводника. Если мы образуем квадрат этой величины, то член, содержащий vv', от которого зависит механическая сила, будет тем же, что и прежде в уравнении (5), а член, содержащий v, от которого зависит электродвижущая сила, равен $2v\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{dt}$.

Дифференцируя (26) по t, мы находим

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=v^2\frac{d^2r}{ds^2}+2vv'\frac{d^2r}{ds\,ds'}+v'^2\frac{d^2r}{ds'^2}+\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds}+\frac{dv'}{dt}\frac{dr}{ds'}+$$
$$+v\frac{dv}{ds}\frac{dr}{ds}+v'\frac{dv'}{ds}\frac{dr}{ds'}+2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}+2v'\frac{d}{ds'}\frac{dr}{dt}+\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{27}$$

Мы находим, что член, включающий vv',— тот же самый, что и раньше в уравнении (6). Члены, которые меняют знак с изменением знака v, есть

$$\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} \text{ и } 2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}.$$

859. Если мы теперь вычислим по формуле Гаусса (уравнение (18)) результирующую электрическую силу в направлении второго элемента ds', возникающую из-за действия первого элемента ds, мы получим

$$\frac{1}{r^2}\,ds\,ds'iV\,(2\cos\widehat{V\,ds}-3\cos\widehat{Vr}\cos\widehat{r\,ds})\cos\widehat{r\,ds'}. \tag{28}$$

Поскольку в этом выражении нет члена, включающего скорость изменения тока i, и поскольку мы знаем, что изменение первичного тока производит индуцированное действие на вторичный контур, мы не можем принять формулу Гаусса в качестве правильного выражения для действия между электрическими частицами.

860. Если, однако, мы используем формулу Вебера (19), мы получим

$$\frac{1}{r^2}\,ds\,ds'\left(r\frac{dr}{ds}\frac{di}{dt}+2ir\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}-i\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}\right)\frac{dr}{ds'}, \tag{29}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)ds\,ds'+\frac{i}{r}\left(\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}-\frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)ds\,ds'. \tag{30}$$

Если мы проинтегрируем это выражение по s и по s', мы получим для электродвижущей силы во втором контуре

$$\frac{d}{dt}i\iint\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'+i\iint\frac{1}{r}\left(\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}-\frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)ds\,ds'. \tag{31}$$

Далее, если первый контур замкнут,

$$\int\frac{d^2r}{ds\,ds'}\,ds=0.$$

Следовательно,

$$\int\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds=\int\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}+\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)ds=-\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds. \tag{32}$$

Но

$$\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'=M \tag{33}$$

согласно п. 423, 524.

Поскольку второй член в уравнении (31) исчезает, когда оба контура замкнуты, мы можем записать для электродвижущей силы во втором контуре

$$-\frac{d}{dt}(iM), \tag{34}$$

что согласуется с тем, что мы уже установили экспериментально (п. 539).

О формуле Вебера, рассматриваемой как следствие передачи с постоянной скоростью действия от одной электрической частицы к другой

861. В очень интересном письме к В. Веберу [8] Гаусс ссылается на электродинамические рассуждения, которыми он занимался очень давно и которые опубликовал бы, если бы смог затем установить то, что он считал краеугольным камнем электродинамики, а именно вывод силы, действующей между движущимися электрическими частицами, рассматривая не мгновенное действие между ними, а считая, что оно распространяется во времени подобно свету. Ему не удалось сделать такой вывод, когда он оставил свои электродинамические исследования, но у него была личная убежденность, что в первую очередь было бы необходимо составить последовательное представление о том, каким способом происходит распространение.

Три выдающихся математика попытались заложить этот краеугольный камень электродинамики.

862. В мемуаре, представленном королевскому обществу Геттингена в 1858 г., но взятом обратно и опубликованном только после смерти автора в 1867 г. в «Поггендорфовых ученых записках» (Poggendorf's Annalen), Бернард Риман выводит явления индукции электрических токов из модифицированной формы уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2V}{dt^2},$$

где V есть электростатический потенциал, α — скорость.

Это уравнение имеет ту же самую форму, что и уравнения, выражающие распространение волн и других возмущений в упругих средах. Однако автор, по-видимому, избегает явного упоминания о среде, через которую происходит распространение.

Математическое исследование Римана было проверено Клаузиусом [9], который не соглашается с его математическими выкладками и показывает, что гипотеза о распространении потенциала подобно свету не ведет ни к формуле Вебера, ни к другим известным законам электродинамики.

863. Клаузиус также проверил и гораздо глубже разработанные исследования К. Неймана в «Принципах электродинамики»[10]. Нейман, однако, указал [11], что его теория передачи потенциала от одной электрической частицы к другой совершенно отлична от теории, предложенной Гауссом, принятой Риманом и подвергшейся критике со стороны Клаузиуса, в которой распространение подобно распространению света. Напротив, по Нейману имеется максимально возможное различие между передачей потенциала и распространением света.

Светящееся тело посылает свет во всех направлениях, причем интенсивность света зависит только от светящегося тела и не зависит от присутствия тела, которое им освещается.

[8] March 19, 1845, *Werke*, Bd. V, 629.
[9] Pogg., Bd. CXXXV, p. 612.
[10] Tübingen, 1868.
[11] *Mathematische Annalen*, I, 317.

С другой стороны, электрическая частица посылает потенциал, величина которого ee'/r зависит не только от заряда e излучающей частицы, но также от заряда e' принимающей частицы и от расстояния r между частицами в *момент испускания*.

В случае света интенсивность уменьшается по мере распространения света все дальше от излучающего тела; испущенный потенциал течет к телу, на которое он действует, без малейшего изменения своего первоначального значения.

Свет, принятый освещенным телом, как правило, составляет лишь часть падающего на него света; потенциал, полученный притягиваемым телом, идентичен или равен потенциалу, который к нему прибывает.

Кроме того, скорость передачи потенциала не является постоянной относительно эфира или пространства, подобно скорости света, а более похожа на скорость снаряда, постоянную относительно скорости излучающей частицы в момент излучения.

Отсюда следует, что для того, чтобы понять теорию Неймана, мы должны образовать представление о процессе передачи потенциала, весьма отличное от того, к которому мы привыкли при рассмотрении распространения света. Не могу сказать, может ли эта теория когда-либо быть принятой в качестве «конструктивного представления» процесса передачи, которое казалось необходимым Гауссу, но сам я оказался не в состоянии построить для себя последовательное представление о теории Неймана.

864. Профессор Бетти из Пизы[12] рассмотрел этот вопрос другим путем. Он предполагает, что замкнутые контуры, в которых текут электрические токи, состоят из элементов, каждый из которых поляризуется периодически, т. е. через эквидистантные промежутки времени. Эти поляризованные элементы действуют друг на друга так, как если бы они были маленькими магнитами, оси которых ориентированы в направлении, касательном к контурам. Период этой поляризации одинаков во всех электрических контурах. Бетти предполагает, что действие одного поляризованного элемента на другой, находящийся на некотором расстоянии, происходит не мгновенно, а через промежуток времени, пропорциональный расстоянию между элементами. Таким способом он получает выражения для действия одного электрического контура на другой, совпадающие с теми, которые нам известны как правильные. Однако Клаузиус и в этом случае также подверг критике некоторые части математических вычислений, но в это мы здесь вдаваться не будем.

865. По-видимому, в умах этих выдающихся людей существует некоторое предубеждение, или *априорное* возражение, против гипотезы среды, в которой имеют место явления излучения света и тепла, а также электрические действия на расстоянии. Правда, одно время все те, кто размышляли о причинах физических явлений, имели обычай объяснять каждый вид действия на расстоянии при помощи специальной эфирной жидкости, функцией и свойством которой было производить эти действия. Они заполняли все пространство трижды и четырежды различными видами эфиров, свойства которых были изобретены просто для того, чтобы «соблюсти приличия», так что более рационалистические исследователи готовы были скорее принять не только конкретный закон притяжения на расстоя-

[12] *Nuovo Cimento*, XXVII (1868).

нии Ньютона, но даже постулат Котса (Cotes)[13] о том, что действие на расстоянии является одним из первичных свойств материи и что никакое объяснение не может быть более понятным, чем этот факт. Поэтому волновая теория света встретила такое большое сопротивление, направленное не против ее неспособности объяснить явления, но против ее предположения о существовании среды, в которой распространяется свет.

866. Мы видели, что математические выражения для электродинамического действия привели Гаусса к убеждению, что теория распространения электрического действия во времени могла бы оказаться краеугольным камнем электродинамики. В настоящее время мы не можем понять распространение во времени иначе, чем либо как полет материальной субстанции через пространство, либо как распространение состояния движения или напряжения в среде, уже существующей в пространстве. В теории Неймана предполагается, что некоторое математическое понятие, названное потенциалом, который мы не можем рассматривать как материальную субстанцию, переносится от одной частицы к другой способом, совершенно независимым от среды, который, как указывал сам Нейман, сильно отличается от способа распространения света. В теориях Римана и Бетти, видимо, предполагается, что действие распространяется способом, несколько более похожим на распространение света.

Но во всех этих теориях естественно встает вопрос: если нечто передается от одной частицы к другой на расстоянии, то каково его состояние после того, как оно покинуло одну частицу, но еще не достигло другой? Если это нечто есть потенциальная энергия двух частиц, как в теории Неймана, то как мы можем понять существование этой энергии в точке пространства, не совпадающей ни с той, ни с другой частицей? Действительно, как бы энергия ни передавалась от одного тела к другому во времени, должна существовать среда или вещество, в которой находится энергия, после того как она покинула одно тело, но еще не достигла другого, ибо энергия, как отмечал Торичелли [14], «есть квинтэссенция такой тонкой природы, что она не может содержаться в каком-либо сосуде, кроме как в самой сокровенной субстанции материальных вещей». Следовательно, все эти теории ведут к понятию среды, в которой имеет место распространение, и если мы примем эту среду как гипотезу, я думаю, она должна занять выдающееся место в наших исследованиях и следует попытаться построить мысленное представление ее действия во всех подробностях; это и являлось моей постоянной целью в настоящем трактате.

[13] Предисловие к ньютоновским «Началам», 2-е изд.
[14] *Lezioni Accademiche* (Firenze, 1715), p. 25.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*

Абсорбция
— электрическая, 53, 227, 329
— света, 798
Ампер Андре Мари (Ampère André Marie), 482, 502—528, 638, 687, 833, 846
Анион, 237
Анод, 237
Апериодический гальванометр, 741
Араго (Arago) диск, 668, 669
Астатические весы, 504
Атмосферное электричество, 221
Ациклические области, 19, 113

Барклей и Гибсон (Barclay and Gibson), 229, 789
Батарея вольтова, 232
Бафф, Генрих (Buff Heinrich), 271, 368
Бетти (Betti E.), 173, 864
Битц (Beetz W.), 255, 265, 442
Бифилярный (двухнитевой) подвес, 459
Борда (Borda J. C.), 3
Браун Джон Аллан (Broun John Allan), 462
Брайт, Сэр К. и Кларк (Bright, Sir C. and Clarc), 354, 367
Броди, Сэр Б. К. (Brodie, Sir B. C.), 359

Вариации магнитных элементов, 472
Варлей (Varley C. F.), 210, 271, 332, 369
Вебер (Weber W.), 231, 338, 346
Вебера
— электродинамическая формула, 846—861
— электродинамометр, 725
— индуцированный магнетизм, 442—448
— единица сопротивления, 760—762
Вектор, 10
Вектор-потенциал, 405, 422, 590, 617, 657
Величина физическая, выражение для нее, 1
Величины электромагнитные, классификация, 620—629
Вердье (Verdet M. E.) 809, 830
Вертхайм (Wertheim W.), 447
Ветер электрический, 55
Взаимные свойства
— электростатические, 86
— электрокинетические, 281, 348
— кинетические, 565
— магнитные, 421, 423
Видеманн (Wiedemann W.), 236, 370, 446, 447
Висмут, 425
Вихри молекулярные, 822—831
Вихрь, 25
Воды сопротивление, 365
Волны распространение, 784, 785
Вольт, 629
Вольта (Volta A.), 246
Вольтметр, 237
Воображаемая магнитная материя, 380
Вращение плоскости поляризации, 806
Вращение, явление в магнетизме, 821
Временное намагничение, 444

Газы
— сопротивление, 369
— электрический разряд, 55—57, 370
Гальванометр, 240, 707
— дифференциальный, 346
— чувствительный, 717
— стандартный, 708
— наблюдения с помощью, 742—751
Гамильтон, Сэр У. Роуан (Hamilton, Sir W. Rowan), 10, 561
Гассио (Gassiot J. P.), 57
Гаусс (Gauss C. F.) 18, 70, 131, 140, 144, 409, 421, 454, 470, 706, 733, 744, 851
Гельмгольц (Helmholtz H.), 202, 421, 543, 713, 823, 854
Геометрия положений (топология), 421
Геометрическое среднее расстояние, 691—693
Гетеростатические электрометры, 218
Гибсон и Барклей (Gibson and Barclay), 789
Гидравлический домкрат, 547
Главные оси, 299, 302
Гладстоун (Gladstone, Dr. J. H.), 789
Гипосинус (Hyposine), синус гиперболический, 151
Гогейн (Gaugain J. M.), 366, 712
Грассман (Grassmann H.), 526, 687
Грин (Green George), 70, 84, 318, 439
Грина
— функция, 98
— теорема, 96
Гроув, Сэр У. Р. (Grove, Sir W. R.), 272, 779
Гуттаперча, 51, 367
Гюйгенс (Huegens Christian), 782

Деламбр (Delambre J. B.), 3
Даниэля элемент (Daniell's cell), 232, 272
Движения уравнения, 553—565
Движущиеся
— оси, 600

* В указателе Д. К. Максвелл ссылается на параграфы (пункты), нумерация которых сплошная по I и II томам.— *Примеч. ред.*

— проводники, 602
— изображения, 662
Декремент логарифмический, 736
Деллман (Dellmann F.), 221
Демпфер, 730
Действие на расстоянии, 103, 641—646, 846—866
Дженкин (Jenkin Fleeming), 763, 774
Дженкинс (Jenkins, William), 546
Джоуль (Joule J. P.), 242, 262, 448, 457, 463, 726, 767
Диамагнетизм, 429, 440, 838
Дигограмма, 441
Диполярный, 173, 381
Директриса, 517
Диск, 177
— Араго, 668, 669
Диффузия магнитной силы, 801
Диэлектрик, 52, 109, 111, 229, 325—334, 366—370, 784
Доказательство закона обратных квадратов, 74

Единицы
— физических величин, 2
— три основные, 3
— производные, 6
— электростатические, 41, 625
— магнитные, 374, 625,
— электродинамические, 526
— электромагнитные, 526, 620
— классификация, 620—629
— практические, 629
— сопротивления, 758—767
— соотношения двух систем, 768—780
Емкость
— электростатическая, 50, 226
— конденсатора, 50, 87, 102, 196, 227—229, 771, 774—780
— расчет, 102, 196
— измерения, 227—229
— в электромагнитных единицах, 774, 775

Железо, 424
Жидкость
— электрическая, 36, 37
— несжимаемая, 61, 111, 295, 329, 334
— магнитная, 380

Задачи
— электростатические, 155—205
— электрокинематические, 306—333
— магнитные, 431—441
— электромагнитные, 647—706
Заряд электрический, 31
Затухающие колебания, 732—742, 762
Защитное кольцо, 201, 217, 228
Зеебек (Seebeck T. J.), 250
Земной магнетизм, 465—474
Зональные гармоники, 138

Идиостатические электрометры, 218
Излучение; сила, связанная с ним, 792
Измерения
— теория, 1
— электрической силы, 38
— электростатической емкости, 226—229
— электродвижущей силы или потенциала, 216, 358
— сопротивления, 335—357
— постоянных токов, 746
— переходных токов, 748
— катушек, 708, 752—757
— магнитные, 449—464
Изображения
— электрические, 119, 155—181, 189
— магнитные, 318
— движущиеся, 662
Изоляторы, 29
Импульс, 6
— электрокинетический, 578, 585
Инверсия электрическая, 162—181, 188, 316
Индуктивность электромагнитная катушки, 706, 756, 778, 779
Индукция
— электростатическая, 28, 75, 76, 111
— магнитная, 400
Индуцированная намагниченность, 424—448
Индуцированные (наведенные) токи, 528—552
— в плоских листах, 656—669
— теория Вебера, 856
Инерция электрическая, 550
Инерции моменты и произведения, 565
Интеграл по времени, 541, 558
Ион, 237, 255
Иохман (Jochmann E.), 669
Ирншоу (Earnshaw S.), 116
Искра, 57, 370

Кавендиш Генри (Cavendish Henry), 3, 74
Калибровочный электрометр, 218
Каминг Джеймс, 252 (Cumming James), 252
Канавка, электрический эффект, 199
Катион, 237
Катод, 237
Катушки, измерение их, 708
Катушки, сравнение их, 752—757
Катушки сопротивления, 335—344
Катушки электромагнитные, 694—706
Квадрантный электрометр, 219
Квадратичные поверхности, 147—154
Кватернионы, 11, 303, 490, 522, 618
Квинке (Quincke G.), 316*п*.
Кейли А. (Cayley A.), 553
Кинетика, 553—565
Кирхгоф Густав (Kirchhoff, Gustav), 282, 316, 439, 758
Кларк Лэтимер (Clark Latimer), 358, 629, 725

Классификация электрических величин, **620—629**
Клаузиус Р. (Clausius R.), **70**, **256**, **863**
Колебания период, **456**, **738**
Кольрауш Рудольф (Kohlrausch Rudolph), **265**, **365**, **723**, **771**
Коммутатор, **775**
Конвекция, **55**, **238**, **248**
Конвергенция, **25**
Конденсатора емкость, **50**, **87**, **90**, **102**, **196**, **227—299**, **771**, **774—780**
Контактное электричество, **246**
Контур электрический, **578—584**
Конфокальные поверхности второго порядка, **147—154**, **192**
Концентрация (лапласиан) **26**, **77**
Коутс Роджер (Cotes Roger), **865**
Коши О. Л. (Cauchy A. L.), **827**
Коэрцитивная сила, **424**, **444**
Коэффициенты индуцированной намагниченности, **426**
Коэффициенты
— потенциала, **87**, **90**
— самоиндукции, **756**, **757**
— сопротивления и проводимости, **297**, **298**
— электростатической емкости и индукции, **87**, **90**, **102**
— электромагнитной индукции, **755**
«Краеугольный камень электродинамики», **861**
Кристалл
— магнитные свойства, **435**, **436**, **438**
— проводимость, **297**
— распространение света, **794—797**
Круговые токи, **694—706**
— телесный угол, опирающийся на них, **695**
Крутильные весы, **38**, **215**, **373**, **726**
Кулон Ш. А. (Coulomb C. A.), **38**, **74**, **215**, **223**, **373**
Кулона закон, **79**, **80**

Ламеллярный (слоистый) магнит, **412**
Линейный интеграл, **16—20**
Линии
— равновесия, **112**
— электрической индукции, **82**, **117—123**
— магнитной индукции, **404**, **489**, **529**, **541**, **597**, **702**
— потока, **22**, **293**
— электрической силы, **69**, **622**
— магнитной силы, **401**, **481**, **498**, **499**, **590**, **606**, **607**, **622**
Линней (Linnaeus C.), **23**
Листинг (Listing J. B.), **18**, **23**, **421**
Лиувилль (Liouville J.), **173**, **176**
Лагранжа уравнения динамики (Lagrange's), **533—565**
Ламе (Lame G.), **17**, **147**
Лаплас (Laplace P. S.), **70**
Лапласа
— коэффициенты, **128—146**
— разложение, **135**
— уравнение, **26**, **77**, **301**
Лежандра (Legendre's) коэффициенты, **139**
Лейбниц (Leibnitz G. W.) **18**, **424**
Ленц (Lenz E.), **265**, **530**, **542**
Ложные магнитные полюса, **468**
Лоренц (Lorenz L.), **805**
Лошмидт (Loschmidt J.), **5**
Линейная плотность, **64**, **81**
Луч электромагнитного возмущения, **791**

Магнетизм
— корабельный, **441**
— земной, **465—474**
Магнит
— магнитный момент, **384**, **390**
— направление осей, **372—390**
— потенциальная энергия, **389**
— свойства, **371**
— центр и главные оси, **392**
Магнитное действие света, **806**
Магнитной силы
— закон, **374**
— интенсивность, **453**
— направление, **372**, **452**
— определение через полюса, **398**
Магнитная «материя», **380**
Магнитная индукция, **400**
Магнитные
— вариации, **472**
— возмущения, **473**
— измерения, **449—464**
— полюса, **468**
Магнитокристаллические явления, **425**, **435**, **839**
Магнуса (Magnus) закон, **251**
Манса (Mance's Genry) метод, **357**
Маттиссен (Matthiessen Aug.), **352**, **360**
Медь, **51**, **360**, **362**, **761**
Металлы
— сопротивление, **363**
Мичелл (Michell John), **38**
Миллер (Miller W. H.), **23**
Многозначные функции, **9**
Молекулы
— размер, **5**
— электрические, **260**
— магнитные, **430**, **832—845**
Молекулярные
— токи, **833**
— эталоны, **5**
— вихри, **822**
Молекулярный электрический заряд, **259**
Момент
— магнитный, **384**
— инерции, **565**
Моссотти (Mossotti O. F.), **62**

Мост Уитстона *) (Wheatstone's), **347**, **756**, **775**, **778**
— электростатический, **353**
Мыльный пузырь, **125**

Накопители (конденсаторы), **50**, **226—228**
Накопитель с защитным кольцом, **229**
Наклонение магнитное, **461**
Намагничение
— индуцированное, **424—430**
— составляющие, **384**
— теория Ампера, **638**, **833**
— теория Вебера, **442**, **838**
— теория Пуассона, **420**
Направленные величины (векторы), **10**
Напряжение
— электрокинетическое, **641**, **645**, **646**
— электростатическое, **105—111**
Натяжение
— электромагнитное, **645**, **646**
— электростатическое, **48**, **59**, **107**, **108**
Непрерывность во времени и в пространстве, **7**
Непрерывности уравнение, **35**, **295**
Несовместимые кривые, **20**, **421**
Нейман (Neumann C. G.), **190**, **830**, **863**
Неймана (Neumann's F. E.)
— коэффициенты намагничения, **430**
— намагничение эллипсоида, **439**
— теория индуцированных токов, **542**
Никель, **425**
Никольсона (Nichilson's) вращающийся удвоитель, **209**
Нулевой метод считывания показаний, **735**
Нуль-методы, **214**, **346**, **503**

Оболочка магнитная, **409**, **484**, **485**, **606**, **652**, **670**, **694**, **696**
Ом (Ohm G. S.), **241**, **333**
Ом (единица), **338**, **340**, **629**
Ома закон, **241**
Отклонение, **453**, **743**
Особые (сингулярные) точки, **129**
Остаточное намагничение, **444**
Остаточный заряд, **327—334**

Паальцов (Paalzow A.), **364**
Параболоиды конфокальные, **154**
Параллельно (многократно) соединенные проводники, **276**, **344**
Парамагнетик (то же, что и ферромагнетик) **425**, **429**, **844**
Пелтье (Peltier A.), **249**
Первое отклонение, **745**
Переключения катушек метод, **750**
Переходные токи, **232**, **530**, **536**, **537**, **582**, **748**, **758**, **760**, **771**, **776**
Период (время) колебания, **456**, **738**
Периодические функции, **9**
Перифрактическая область, **22**, **113**
План трактата, **59**
Планетарный эллипсоид, **151**
Плоские токовые листы, **656—669**
Плотность
— измерение, **223**
— тока, **285**
— электрическая, **64**
Плюкер Юлиус (Plücker Julius), **839**
Поверхностная плотность, **64**, **78**, **223**
Поверхностный интеграл, **15**, **21**, **75**, **402**
Поверхность
— эквипотенциальная, **46**
— заряженная, **78**
Поглощение света, **798**
Подвес Джоуля (Joule's), **463**
Подвес бифилярный (двухнитевой), **459**
Подвес однонитевой, **449**
Подвес Томсона (Thomson's) **721**
Подвешенная катушка, **721—729**
Поле
— однородной силы, **672**
— электрическое, **44**
— электромагнитное, **585—619**
Положительные и отрицательные величины, договоренность относительно их, **23**, **27**, **36**, **37**, **63**, **68—81**, **231**, **374**, **394**, **417**, **489**, **498**
Полюса
— магнита, **373**
— магнитные Земли, **468**
Поляризация магнитная, **381**
Поляризация
— света, **381**, **791**
— круговая, **813**
— электролитическая **257**, **264—272**
— электростатическая, **59**, **111**
Полярность, **381**
Пополнитель, **210**
Постоянные (основные) катушки, **700**, **753**, **754**
Потенциал векторный, **405**, **422**, **590**, **617**, **657**
Потенциал, **16**
— двух колец, **698**

* Сэр Чарльз Уитстон в своей работе «Новые инструменты и процессы» (Phil. Trans., 1843) представил это устройство на ознакомление широкой публике и вместе с этим выразил признательность первоначальному изобретателю г-ну С. Хантеру Кристи (S. Hunter Christie), описавшему этот прибор в своей заметке «Наведенные токи» (Phil. Trans., 1833). Там он был назван разностным устройством. См. заметку г-на Лэтимера Кларка в Society of Telegraph Engineers за май, 8, 1872.

— двух контуров, 423
— магнитный, 383, 391
— намагничения, 412
— электрический, 45, 70, 220
Поток, 12
Правая и левая системы осей координат, 23, 498, 501
Правило определения направления магнитной силы, 477, 494, 496
Право- и лево-циркулярно поляризованные лучи, 813
Притяжение
— электрическое, 221
— объясняемое натяжением в среде, 105
Пробная плоскость, 223
Проводимость и прозрачность, 798
Проводимости уравнение, 298, 609
Проводник, 29, 80, 86
Проводников заряженных система, 84—94
Прозрачность, 708
Проницаемость магнитная, 428, 614
Пространственная вариация, 17, 71, 835
Проводимость
— в диэлектриках, 325—334
— вдоль линии, 273—284
— объемная, 285—334
— поверхностная, 294
— электролитическая, 255—265
Пуассон (Poisson S. D.), 155, 431, 437, 647
Пуассона
— теория магнетизма, 427, 429, 431, 441, 832
— теория распространения волн, 784
— уравнение, 77, 148

Работа, 6
Равновесия точки, 112—117
Размерности, 2, 42, 88, 278, 620—629
Разрывность, 8
Разряд, 5
Результирующая электрическая сила в точке, 68
Решетки электрический эффект, 203
Риман Бернард (Riemann Bernhard), 421, 862
Риттера (Ritter's J. W.) вторичная батарея, 271
Ритчи (Ritchie W.), 542
Ртути сопротивление, 361
Рэнкин (Rankine W. J. M.), 115, 831
Рюльман (Rühlmann R.), 370

Самоиндукция, 7
— измерение 756, 778, 779
— катушка с наибольшей самоиндукцией, 706
Свет
— электромагнитная теория, 781—805
— и магнетизм, 806—831
Свечение электрическое, 55
Секторная гармоника, 132, 138
Селен, 51, 362
Серии наблюдений, 746, 750
Сила
— измерение, 6
— действующая на расстоянии, 103
— механическая, 69, 93, 103—111, 174, 580, 602
— электродвижущая, 49, 111, 233, 241, 246—254, 358, 579, 595, 598
— электромагнитная, 475, 580, 583
Силовые линии, 82, 117—123, 404
Сименс (Siemens C. W.), 336, 361
Синусов метод, 455, 710
Скаляр, 11
Скорость, представленная как отношение электрических единиц, 768—780
Скорость, соответствующая единице сопротивления, 338, 628, 758
Скорость
— света, 787
— электрического тока, 569
— электромагнитного возмущения, 784
Слоистые проводники, 319
Смещение электрическое, 60, 75, 76, 111, 328—334, 608, 783, 791
Сми (Smee A.), 272
Смит Арчибальд (Smith Archibald), 441
Смит (Smith W. R.), 123, 316
Соленоид магнитный, 407
— электромагнитный, 676—681, 727
Соленоидальные возмущения, 21, 82, 407
Сопротивление проводников, 51, 275
Сопротивления
— таблицы, 362—365
— уравнения, 297
— единица, 758—767
— электростатическая мера, 355, 780
Сопряженные
— гармоники, 136,
— проводники, 282, 347
— контура, 147—154, 192
— функции, 182—206
Сохранение энергии, 93, 242, 262, 543
Спираль, 813
— логарифмическая, 731
Сравнение
— емкостей, 229
— катушек, 752—757
— сопротивлений, 345—358
— электродвижущих сил, 358
Среда
— люминофорная, 806
— электромагнитная, 866
Стокс (Stokes G. G.), 24, 115, 784
Стоуни (Stoney G. J.), 5
Стрэтт (Strutt Hon. J. W.), 102, 306
Сфера, 125
Сферические гармоники, 128—146, 391, 431
Сферические проводники, 145, 146

Таблицы
— для намагничения цилиндра, 439
— временного и остаточного намагничения, 445
— коэффициентов катушки, 700
— магнитного вращения, 830
— скорости света и электромагнитного возмущения, 787
— сопротивления, 363—365
— электродвижущей силы, 358
— размерностей, 621—629
Тален Тобиас Роберт (Thalen Tobias Robert), 430
Тангенсов метод, 454, 710
Тангенсный гальванометр, 710
Твердое железо, 424—444
Телеграфный кабель, 332, 689
Телесный угол, 409, 417—422, 485, 695
Теорема
— Кулона, 80
— Ирншоу, 116
— Гаусса, 409
— Грина, 96
— Томсона, 100
Теория действия на расстоянии, 103, 641—646, 846—866
Теория молекулярных вихрей, 822
Теория
— одножидкостная, 37
— двухжидкостная, 36
— магнитной материи, 380
— магнитных молекул, 430, 832—845
— молекулярных токов, 833
Тепло, выделяемое током, 242, 283, 299
Теплопроводность, 801
Термоэлектричество, 253
Термоэлектрические токи, 249—254
Тодхантер (Todhunter), 128, 140
Ток
— индуцированный, 582
— наилучший способ подключения, 744
— переходный, 232, 530, 536, 537, 582, 748, 758, 760, 771, 776
— постоянный, 232
— термоэлектрический, 249—254
— электрический, 230
Тока функция, 294
Токовый лист, 647—681
Токовые весы, 726
Толщина проволоки в гальванометре, 716, 719
Томсона и Тэта монография «Натуральная философия», 128, 139, 140, 162, 303, 553, 676
Томсон, Сэр Уильям (Thomson, Sir William)
— приборы, 127, 201, 210, 211, 216—222, 272, 722, 724
— магнетизм, 318, 398, 400, 407—416, 428
— сопротивление, 338, 351, 356, 763
— опыты, 51, 57, 248, 369, 772
— электрические изображения, 43, 121, 155—181, 173
— вихревое движение, 20, 487, 702
— теория электричества, 27, 37, 543, 831, 856
— термоэлектричество, 207, 242, 249, 252, 253
— теоремы, 100, 263, 299, 304, 652
Торричелли Эвангелиста (Torricelli Evangelista), 866
Точки равновесия, 112
Тэт (Tait P. G.), 25, 254, 387, 522, 687, 731

Удельная индуктивная способность, 52, 58, 94, 111, 229, 325, 334, 627, 788
Удельная проводимость, 278, 627
Удельная теплоемкость, обусловленная электричеством, 253
Удельное сопротивление, 277, 627
Уивелл (Whewell W.), 237
Уитстона (Wheatstone's) мостик, 347
— электростатический, 353, 756, 7 5, 778
Умножения метод, 747, 751
Уравнение
— Лапласа, 77
— магнитной индукции, 591
— намагничения, 400, 605
— непрерывности, 35
— полных токов, 610
— проводимости (прохождения тока), 298, 609
— Пуассона, 77
— сопротивления, 297
— электрических токов, 607
— электродвижущей силы, 508
— электромагнитной силы, 603

Фарада, 629
Фарадей М. (Faraday M.)
— методы, 37, 82, 122, 493, 528, 529, 541, 592, 594, 604
— открытия, 52, 55, 236, 255, 530, 531, 534, 546, ›68, 806
— рассуждения, 54, 60, 83, 107, 109, 245, 429, 502, 540, 547, 569, 645, 782
— эксперименты, 28, 429, 530, 668
Феличи Р. (Felici R.), 536—539, 669
Ферререс (Ferrers), 128, 140
Ферромагнетик, 425, 429, 844
Фехнер (Fechner G. T.), 231, 274, 848
Физо (Fizeau H. L.), 787
Фуко (Foucault L.), 787
Фурье (Fourier J. B. J.), 2, 243, 332, 333, 801—805

Хайне (Heine), 128, 140
Харрис, Сэр У. Сноу (Harris Sir W. Snow), 38, 216

Хокин Чарльз (Hockin Charles), 352, 360, 800
Хольтца (Holtz W.) электрическая машина, 212
Хорнштейн Карл (Hornstein Carl), 471

Центробарическое распределение, 98
Циклическая область, 18, 113, 481
Цилиндр
— заряженный, 189
— намагниченный, 436, 438, 439
— токи в цилиндре, 682—690
Цилиндрическая катушка, 676—681

Чувствительный гальванометр, 717

Шкала для зеркальных наблюдений, 450

Щетка, 56

Электрическая
— искра, 57
— конвекция, 211, 238, 248, 255, 259
— машина, 207
— проводимость, 26
— энергия, 84
— щетка, 56
Электрический
— ветер, 55
— заряд, 31
— потенциал, 70
— разряд, 55—57
— ток, 230
Электрическое
— натяжение, 48, 59, 107, 108, 111
— смещение, 60, 75, 76, 111, 328—334, 608, 783, 791
Электрод, 237
Электродвижущая сила, 49, 69, 111, 241, 246—254, 358, 569, 579
Электродинамическая система измерений 526
Электродинамометр, 725
Электролиз, 236, 255—272
Электролит, 237, 255
Электролитическая поляризация, 257, 264—272
Электролитическая проводимость, 255—272, 363, 799
Электромагнетизма динамическая теория, 568—577
Электромагнитная сила, 475, 580, 583
Электромагнитное вращение, 491
Электромагнитные
— измерения, 495
— наблюдения, 730—780
Электромагнитный импульс, 585
Электромагнитных и электростатических единиц связь, 768—780
Электрометры, 214—220
Электроскоп, 33, 214
Электростатическая
— поляризация, 59, 111
— система единиц, 620
Электростатические измерения, 214—229
Электростатическое притяжение, 103—111
Электротоническое состояние, 540
Электрофор, 208
Эллипсоид, 150, 302, 437, 439
Эллиптические интегралы, 149, 437, 701
Элонгация (отклонение), 734
Энергия, 6, 85, 630—638, 782, 792
Эрстед Г. Х. (Örsted H. C.), 239, 475
Эталонный
— гальванометр, 708
— электрометр, 217
Эйри, Сэр Дж. Б. (Airy, Sir G. B.), 454, 830
Эфир, 782

Яйцеобразный эллипсоид, 152
Якоби (Jacobi M. H.), 336

ИЛЛЮСТРАЦИИ

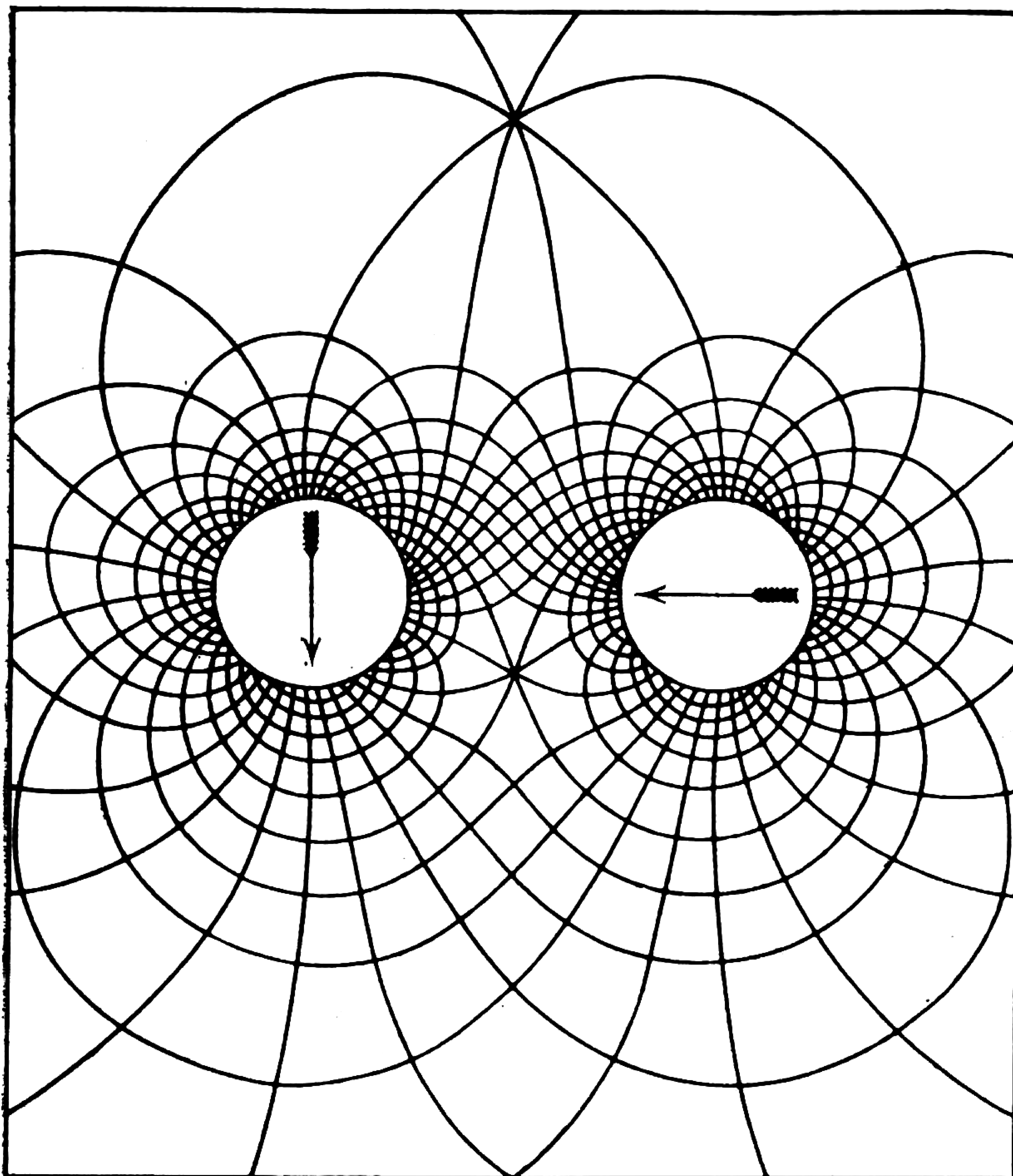
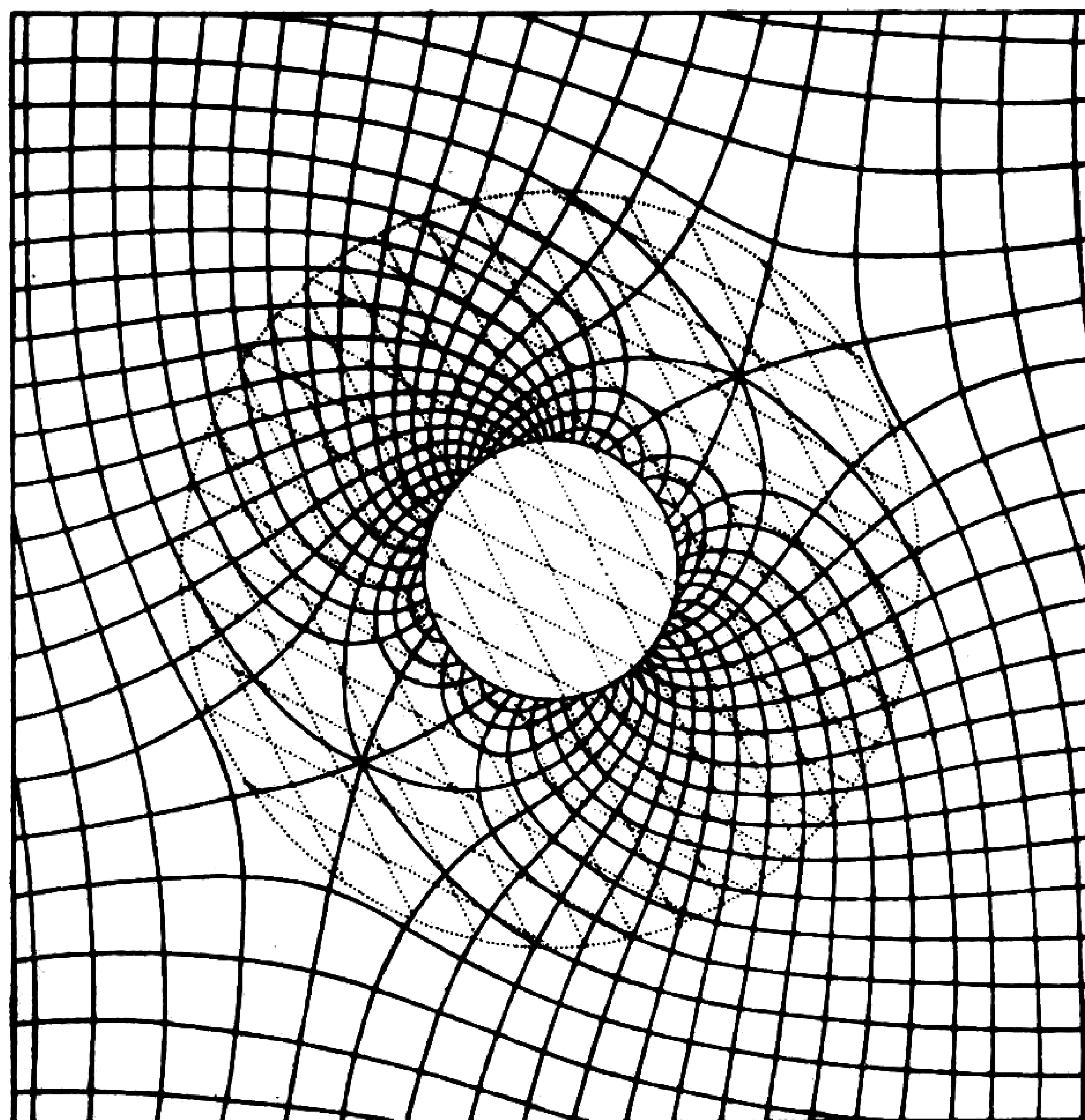
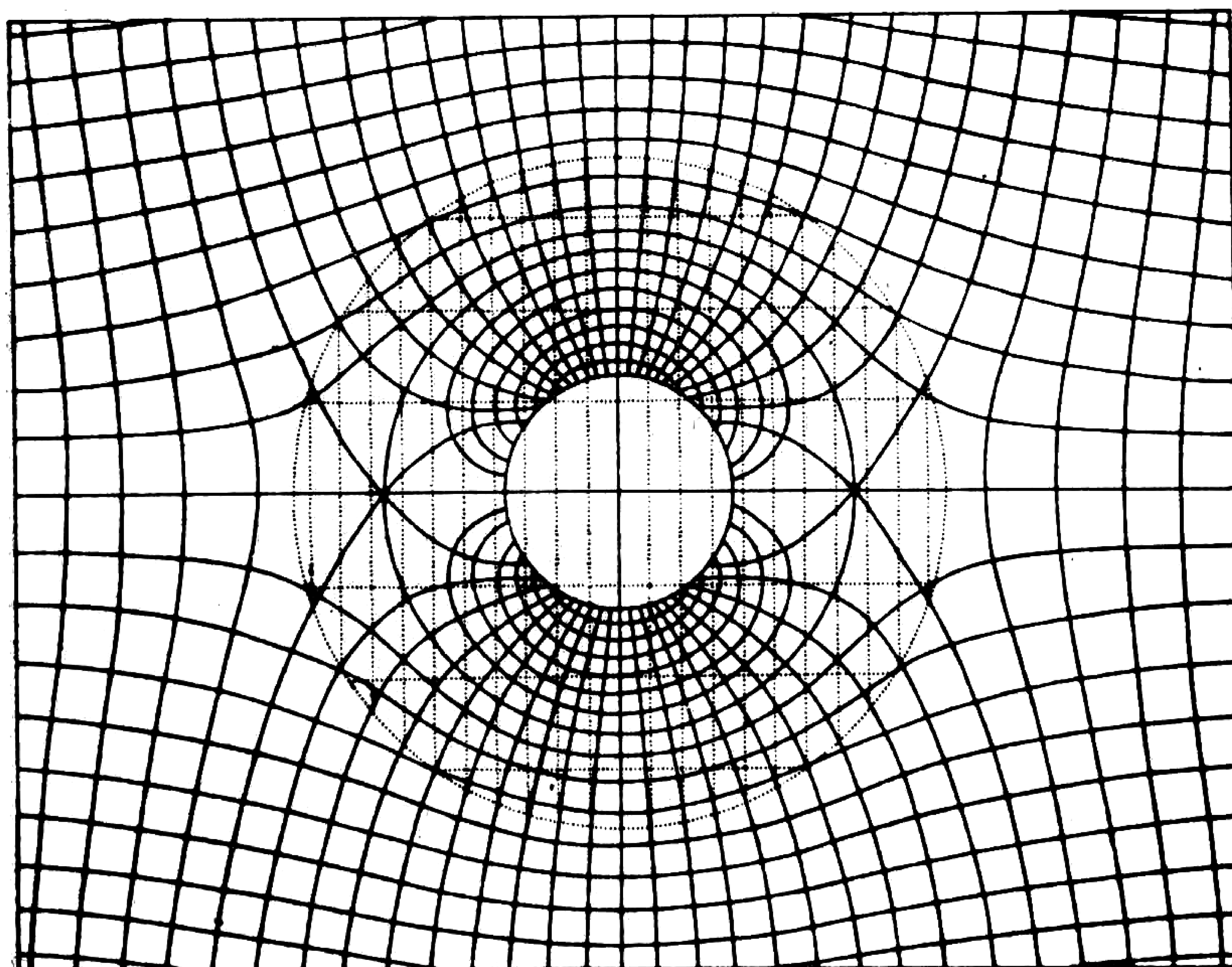


Рис. XIV (п. 388). Два поперечно намагниченных цилиндра

Рис. XV (п. 434). Поперечно намагниченный цилиндр в направлении север — юг, помещенный в однородное магнитное поле

Рис. XVI (п. 436). Поперечно намагниченный цилиндр в направлении восток—запад, помещенный в однородное магнитное поле





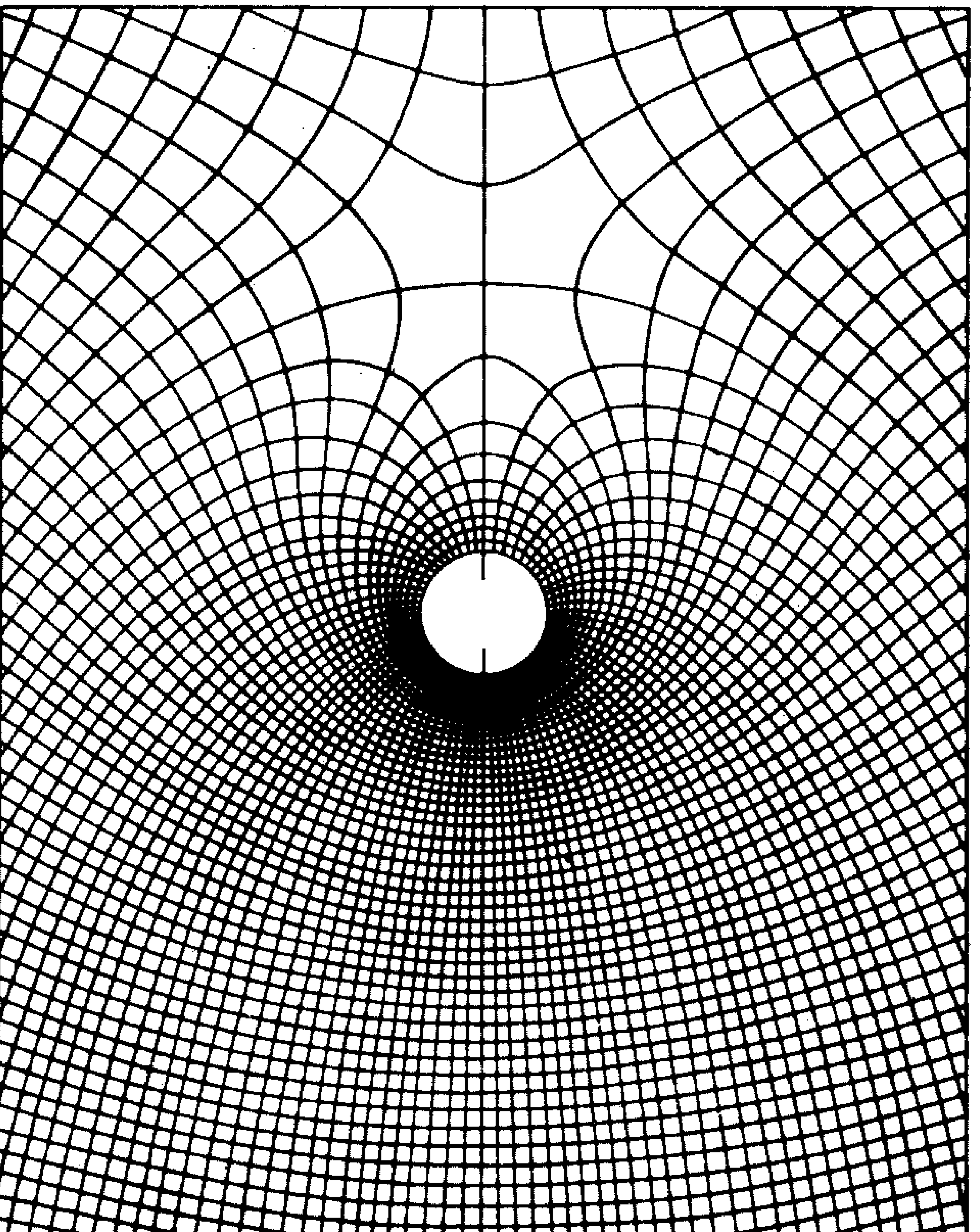


Рис. XVII (п. 496). Однородное магнитное поле, возмущенное электрическим током в прямом проводнике

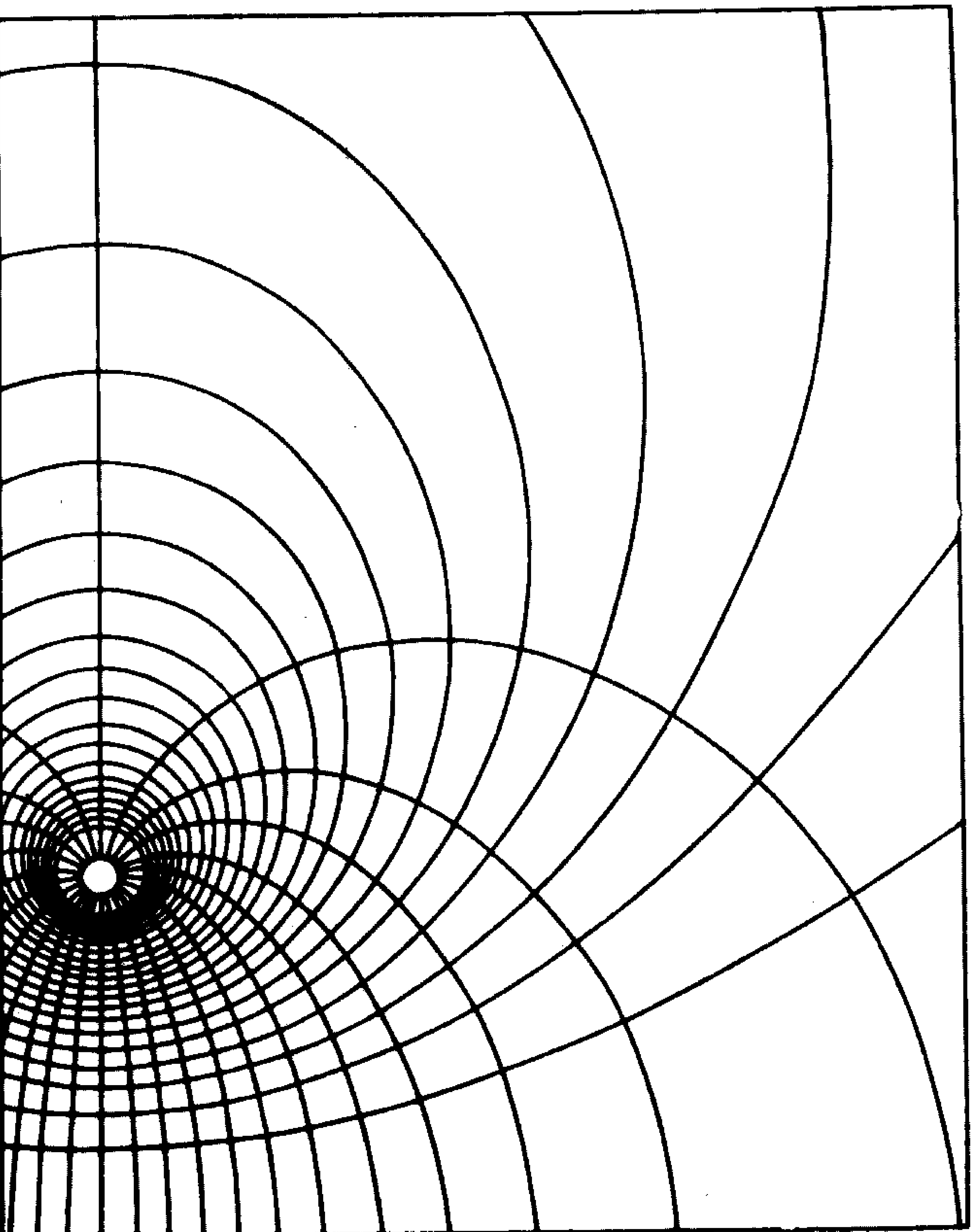


Рис. XVIII (п. 487, 702). Круговой ток

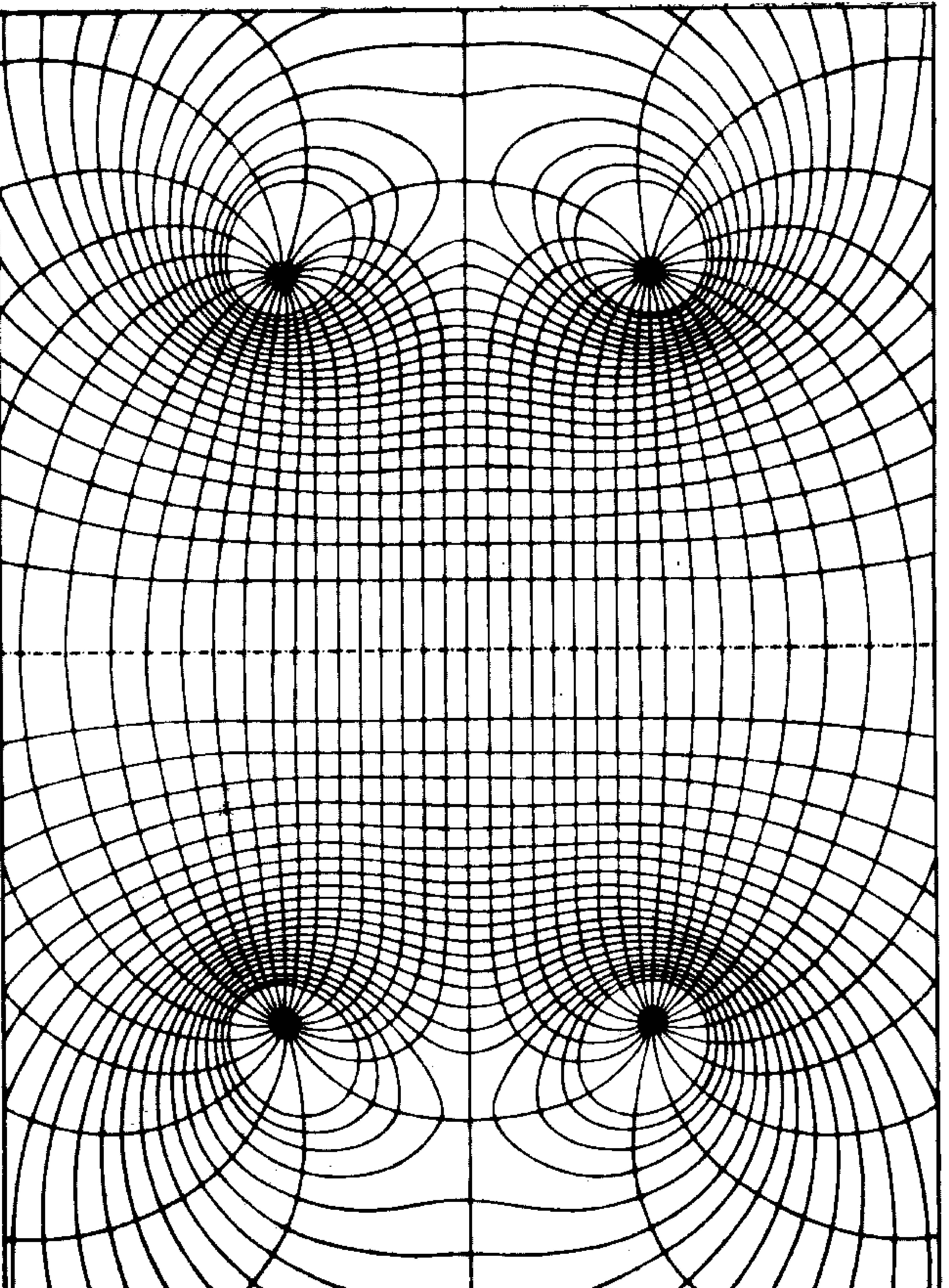


Рис. XIX (п. 713). Два круговых тока

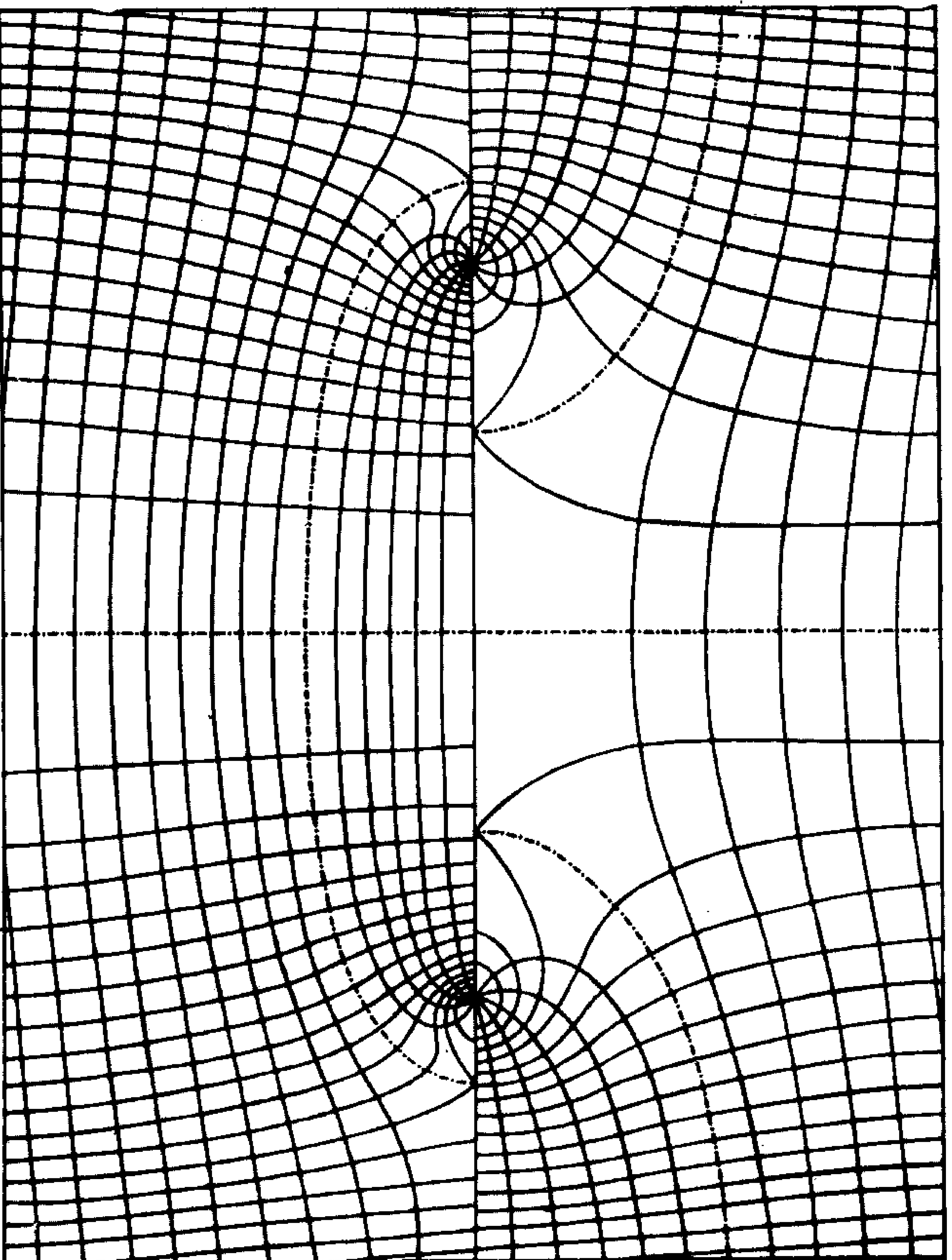


Рис. XX (п. 225). Круговой ток в однородном поле силы

ПРИЛОЖЕНИЯ

I
ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Когда меня попросили прочитать корректуру второго издания «Электричества и Магнетизма», работа по его печатанию продвинулась до девятой главы, большая часть которой уже была переработана автором.

Те, кто знаком с первым изданием, сравнивая его с этим, увидят, какие обширные изменения были внесены Профессором Максвеллом и по существу предмета, и по форме изложения, и насколько сильно пострадало настоящее издание от его преждевременной смерти. Первые девять глав в некоторых случаях были полностью переписаны и дополнены многими новыми материалами, а их прежнее содержание было перестроено и упрощено.

С девятой главы и далее настоящее издание лишь немногим отличается от простой перепечатки предыдущего. Единственная вольность, которую я позволил себе, состояла во внесении в разных местах, где это казалось полезным для читателя, промежуточных математических обоснований, а также нескольких сносок по разделам, которые, как показал мой собственный опыт и опыт учеников, посещавших мои занятия, требуют дальнейшего освещения. Эти сноски заключены в квадратные скобки. *

Я знаю, что Профессор намеревался значительно изменить изложение двух мест, а именно математическую теорию электрической проводимости в проволочных цепях и определение коэффициентов индуктивности проволочных катушек. Однако по этим вопросам я не счел себя вправе добавить что-либо существенное из его заметок, поэтому текст оставлен неизменным в соответствии с прежним изданием, исключение составляет численная таблица, напечатанная во втором томе: она оказалась очень полезной для расчета коэффициентов индукции в кольцевых проволочных витках.

Для столь оригинальной, содержащей такое большое количество подробностей, относящихся к новым результатам, работы вряд ли было возможным избежать в первом издании кое-каких ошибок. Но я думаю, что в этом издании большая часть их будет выявлена для дальнейшего исправления. Моя высокая уверенность при выражении этой надежды основана на том, что в чтении корректуры мне помогали разные друзья, хорошо знакомые с этим трудом, среди которых я могу особенно отметить моего брата Профессора Чарльза Нивена и г-на Дж. Дж. Томсона, члена Тринити Колледжа в Кембридже.

У. Д. Нивен
W. D. (Niven)

Тринити Колледж, Кембридж,
Окт. 1, 1881 г.

---

* Некоторые примечания У. Нивена вынесены в комментарии.— *Примеч. пер.*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Я взял на себя труд по прочтению корректуры этого издания по просьбе представителей Кларендон Пресс, от которых я узнал, к своему глубокому сожалению, что г-н У. Д. Нивен под бременем своих официальных обязанностей не счел возможным просмотреть текст следующего издания Трактата.

Читатели максвелловских произведений весьма обязаны той неустанной работе, которую проделал над ними г-н Нивен, и я уверен, что они столь же остро, как и я, будут сожалеть о том, что какие-то обстоятельства лишили третье издание преимуществ его опеки.

Сейчас прошло уже около двадцати лет с тех пор, как была написана эта книга; за это время науки об Электричестве и Магнетизме развивались с быстротой, почти не имеющей параллелей в их предыдущей истории, в немалой степени благодаря взглядам, введенным в них этой книгой: многие ее параграфы послужили отправными точками для важных исследований. Когда я начал пересматривать это издание, я имел намерение дать в комментариях некоторые сведения об успехах, достигнутых после опубликования первого издания, не только потому, что считал это полезным для студентов-электриков, но и потому, что все недавние исследования подтверждают наиболее примечательным образом представления, развитые Максвеллом. Вскоре, однако, я увидел, что прогресс в этой науке столь велик, что выполнить мое намерение невозможно, не обезобразив книгу непропорционально большим количеством комментариев. Тогда я решил придать этим комментариям несколько более последовательную форму и издать их отдельно. Они уже почти готовы для публикации и увидят свет, я надеюсь, через несколько месяцев [1]. Ссылки на эти комментарии даются как на «Дополнительный том». Несколько сносок, относящихся к отдельным изолированным пунктам, которые можно было прокомментировать кратко, помещены в книге. Все тексты, добавленные к этому изданию, вставлены в фигурные скобки [2].

Я попытался кое-что дополнить в пояснениях аргументации тех разделов, где, как показал мой преподавательский опыт, почти все студенты испытывали значительные трудности, но, чтобы снабдить пояснениями все выкладки, в которых, насколько я знаю, студенты испытывают затруднения, потребовалось бы значительно большее увеличение объема, чем это было в моем распоряжении.

Я попытался подтвердить результаты, даваемые Максвеллом без доказательств,

---

[1] Этот дополнительный том был издан в 1893 г.: J. J. Thomson, Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism, The Clarendon Press, Oxford, 1893; в русском переводе не появлялся.— *Примеч. пер.*

[2] Так же, как и комментарии, сделанные Нивеном, некоторые из замечаний Дж. Дж. Томсона вынесены в Приложения (II).— *Примеч. пер.*

но не во всех случаях получил приводимые им ответы. Тогда различие указывалось мною в примечаниях.

Я перепечатал из работы Максвелла «Динамическая Теория Электромагнитного Поля» его метод определения самоиндукции катушки. Из-за того что он был опущен в предыдущих изданиях, этот метод часто приписывают другим авторам.

При подготовке этого издания максимально возможную помощь мне оказал г-н Чарльз Чри, член Кингз Колледжа в Кембридже. Он прочитал все листы корректуры, и его советы были бесценными. Мне помогали также г-н Лармор, член Колледжа Св. Джона, г-н Уилберфорс, демонстратор Кавендишской Лаборатории и г-н Уокер, член Тринити Колледжа.

Дж. Дж. Томсон
(*J. J. Thomson*)

Кавендишская Лаборатория
Дек. 5, 1891 г.

II
КОММЕНТАРИИ*

45. Максвелл различает полную электродвижущую силу, которая совпадает с современным понятием ЭДС, и электродвижущую силу в точке, или интенсивность (напряженность) электродвижущей силы, которая на современном языке есть просто напряженность электрического поля и совпадает с только что введенной (в п. 44) результирующей электродвижущей напряженностью.

51. Здесь и во многих местах далее Максвелл приводит экспериментальные данные без достаточно подробных оговорок условий или обстоятельств, при которых они получены. Наверное, он не преследовал при этом справочных целей, а хотел пояснить некоторые тенденции. Почти все данные о численных значениях физических величин можно почерпнуть, например, из «Таблиц физических величин» (Справочник под ред. акад. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976). Что же касается недоговоренностей, содержащихся в тексте, они оставлены в неприкосновенности.

52. К этому времени Максвелл уже приступил к подготовке к печати трудов Кавендиша, которые затем были изданы под его редакцией. (The Electrical Researches of Henry Cavendish/ Ed. J. C. Maxwell. Cambridge: Cambr. University Press, 1879.)

52. Здесь приходится сталкиваться с очень многозначной терминологией, оттенки которой трудно передать по-русски. Маквелл вводит термин Specific Inductive Capacity — удельную индуктивную емкость диэлектрика, которую потом совмещает с диэлектрической проницаемостью или диэлектрической постоянной. Одновременно он оперирует с емкостью (capacity) конденсатора, которая в точности совпадает с нашим понятием емкости. Далее, однако, он будет употреблять аналогичные понятия и для магнитных полей, где возникает Specific Magnetic Inductive Capacity, которую уже невозможно перевести как «магнитная емкость среды», так как это создавало бы у современного читателя ассоциации, на которые Максвелл вряд ли мог рассчитывать. Поэтому здесь и далее слово capacity в значении проницаемость переводится как «способность», а термин «емкость» употребляется только в современном его значении.

59. Д. Д. Томсон обратил внимание на то, что утверждение Максвелла о единственности распределения должно быть видоизменено,— распределение, указанное Максвеллом, является одним из многих, приводящих к нужному механическому воздействию.

80. Максвелл часто направление действия силы ставит в соответствие с выбранным знаком заряда, не делая специальных оговорок. Так, фраза «напряженность должна быть направлена по нормали к поверхности, равняться $4\pi\sigma$ и действовать в наружном направлении» подразумевает, что $\sigma>0$, а при $\sigma<0$ отрицательная напряженность действует в наружном направлении, т. е. напряженность направлена внутрь.

82. Максвелл не различает здесь силовую трубку (образованную линиями напряженности поля) и трубку индукции (образованную линиями электрической индукции), но фактически далее он говорит о последней, см. конец п. 82.

82. В формуле $R=-4\pi\sigma$, в отличие от п. 80, напряженность считается направленной из трубки, т. е. внутрь проводника.

87. Величины $q_{rs}=de_r/dV_s$, называемые в современной литературе емкостными коэффициентами, Максвелл разделяет на собственные емкостные коэффициенты q_{rr}, называя их емкостями, и на взаимные емкостные коэффициенты $q_{rs}\,(r\neq s)$, называя их коэффициентами взаимной индукции. Эта терминология здесь сохранена, хотя было бы правильнее говорить об электростатической индукции, тем самым избегая терминологического совпадения с коэффициентами взаимной индукции контуров с токами.

96 г. Как заметил Д. Д. Томсон, стоящий в правой части (4b) интеграл $\iiint \Phi\nabla^2\Psi\, d\varsigma$ не должен распространяться на объем малой сферы, внутри которой Φ имеет особенность; это уже учтено последним членом в левой части (4b).

97 а. В формулах (10), (11) и далее нормаль ν' направлена внутрь, а нормаль ν — наружу.

98. Раздел этот, посвященный функции Грина, снабжен отдельной нумерацией формул (1) — (6); далее, в п. 99а, продолжается нумерация формул п. 97.

102 в. Приводим комментарий Д. Д. Томсона: «Полученные выражения для поверхностных плотностей заряда не очень строгие и не совпадают с результатами, полученными

* Комментарии приведены к параграфам I и II томов «Трактата».— *Примеч. ред.*

точными методами для случая двух сфер, двух цилиндров, сферы и плоскости, цилиндра и плоскости, расположенных близко друг к другу. Выражения для поверхностной плотности заряда могут быть найдены следующим образом. Обозначим ось симметрии через z, она пересечет эквипотенциальные поверхности под прямыми углами. Пусть R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны эквипотенциальной поверхности в точке пересечения ее с осью z, тогда условие соленоидальности в проекции на z, как нетрудно показать, будет таким:

$$\frac{d^2V}{dz^2}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{dV}{dz}=0.$$

Если V_A и V_B — соответственно потенциалы двух поверхностей, а t — расстояние между ними вдоль z, то

$$V_B=V_A+t\left(\frac{dV}{dz}\right)_A+\frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_A+\ldots .$$

Обозначив через R_{A_1} и R_{A_2} главные радиусы кривизны первой поверхности и подставив d^2V/dz^2 из дифференциального уравнения, получим

$$V_B-V_A=t\left(\frac{dV}{dz}\right)_A\left\{1-\frac{1}{2}t\left(\frac{1}{R_{A_1}}+\frac{1}{R_{A_2}}\right)\right\}+\ldots,$$

но

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)_A=-4\pi\sigma_A,$$

где σ_A — поверхностная плотность заряда в точке пересечения осью z первой поверхности, следовательно,

$$\sigma_A\simeq\frac{1}{4\pi}\frac{(V_A-V_B)}{t}\left\{1+\frac{1}{2}t\left(\frac{1}{R_{A_1}}+\frac{1}{R_{A_2}}\right)\right\},$$

аналогично

$$\sigma_B\simeq\frac{1}{4\pi}\frac{(V_B-V_A)}{t}\left\{1+\frac{1}{2}t\left(\frac{1}{R_{B_1}}+\frac{1}{R_{B_2}}\right)\right\}.$$

Эти выражения уже согласуются в упомянутых выше случаях с выражениями, полученными строгими методами».

110. Д. Д. Томсон обратил внимание на то, что задача отыскания системы напряжений, обеспечивающих заданные значения силы, неоднозначна. Действительно, к любому тензору напряжений можно добавить произвольный тензор, дивергенция которого равна нулю.

140 а. При $\sigma=0$ в выражение (74) для $Y_n^{(\sigma)}$ следует ввести коэффициент 1/2.— *Коммент. Д. Д. Томсона.*

143. На рис. V, помещенном в конце тома, непривычно выглядят силовые линии однородного поля внутри сферы (при удалении от центра сферы силовые линии сгущаются). Это связано со своеобразным способом нанесения силовых линий на рисунок, принятым Максвеллом для полей с аксиальной симметрией. Процедура эта подробно описана им в п. 123.

154. Приводим комментарий Д. Д. Томсона, касающийся вывода соотношений (53): «Результаты п. 154 могут быть получены следующим образом. После перехода от переменных x, y, z к λ, μ, ν уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{(\mu-\nu)(b-\lambda)^{1/2}(c-\lambda)^{1/2}}{(\mu-b)^{1/2}(c-\mu)^{1/2}(\nu-b)^{1/2}(\nu-c)^{1/2}}\frac{d\varphi}{d\lambda}\right\}+\ldots=0,$$

или

$$(\nu-\mu)(b-\lambda)^{1/2}(c-\lambda)^{1/2}\frac{d}{d\lambda}\left\{(b-\lambda)^{1/2}(c-\lambda)^{1/2}\frac{d\varphi}{d\lambda}\right\}+$$
$$+(\nu-\lambda)(\mu-b)^{1/2}(c-\mu)^{1/2}\frac{d}{d\mu}\left\{(\mu-b)^{1/2}(c-\mu)^{1/2}\frac{d\varphi}{d\mu}\right\}+$$
$$+(\mu-\lambda)(\nu-b)^{1/2}(\nu-c)^{1/2}\frac{d}{d\nu}\left\{(\nu-b)^{1/2}(\nu-c)^{1/2}\frac{d\varphi}{d\nu}\right\}=0.$$

После введения величин α, β, γ

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}=\frac{1}{(b-\lambda)^{1/2}(c-\lambda)^{1/2}}, \quad \frac{d\beta}{d\mu}=\frac{1}{(\mu-b)^{1/2}(c-\mu)^{1/2}}, \quad \frac{d\gamma}{d\nu}=\frac{1}{(\nu-b)^{1/2}(\nu-c)^{1/2}}$$

уравнение Лапласа принимает вид

$$(\nu-\mu)\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+(\nu-\lambda)\frac{d^2\varphi}{d\beta^2}+(\mu-\lambda)\frac{d^2\varphi}{d\gamma^2}=0,$$

так что любые линейные функции α, β, γ удовлетворяют уравнению Лапласа.

При $b=c$ мы можем положить

$$\alpha=-\int\limits_0^\lambda\frac{d\lambda}{b-\lambda}, \qquad \gamma=\int\limits_{2b}^\nu\frac{d\nu}{\nu-b}, \qquad \lambda=b\{1-e^\alpha\}, \qquad \nu=b\{1+e^\nu\}.$$

Из (51) имеем

$$(\mu-b)=\frac{1}{2}(c-b)\{1-\cos\beta\}, \qquad (c-\mu)=\frac{1}{2}(c-b)\{1+\cos\beta\},$$

следовательно, из (50)

$$x=b+b\left(e^\gamma-e^\alpha\right), \qquad y^2=4b^2e^{\gamma+\alpha}\sin^2\frac{\beta}{2}, \qquad z^2=4b^2e^{\gamma+\alpha}\cos^2\frac{\beta}{2}.$$

И если мы выберем начало координат в фокусе $x=b$ и обозначим β через $2\beta'$, be^γ через $\alpha e^{2\gamma'}$, be^α через $\alpha e^{2\beta}$, то получим

$$x=e^{2\gamma'}-e^{2\alpha'}, \quad y=2\alpha e^{\alpha'+\gamma'}\sin\beta', \quad z=2\alpha\varepsilon^{\alpha'+\gamma'}\cos\beta',$$

откуда легко выводятся уравнения в форме (54).

Поскольку из этих уравнений следует, что радиальная составляющая электрической силы меняется как $1/r$, нормальная составляющая и, следовательно, поверхностная плотность будут меняться как $(1/r)\cdot(r/p)$, где p — перпендикуляр из фокуса на касательную плоскость; таким образом, поверхностная плотность меняется как $1/p$ и, следовательно, как корень квадратный из r».

164. Для более наглядного понимания утверждения Максвелла полезно пояснить его при помощи следующей иллюстрации. Пусть точки A, C и B' являются центрами трех сфер, причем сферы с центрами в точках B' и C являются взаимно инверсными относительно сферы с центром в точке A. Тогда, если точка B является инверсной для A относительно сферы C, а C' — инверсна для A относительно сферы B_1, то B и B', так же как C и C', взаимно инверсны относительно сферы A.

170. Весь текст п. 170 после выражений для α', β', γ', δ' принадлежит Нивену; он сохранен здесь, поскольку, возможно, написан по тем дополнениям в черновиках или в лекционной записи, которые остались после Максвелла.

193. Текст п. 193 после формулы (10) также принадлежит Нивену и сохранен по той же причине, что и текст в п. 170.

200. Как отметил Д. Д. Томсон, поправка на кривизну равна $\left(1+\frac{1}{4}\frac{B}{R}\right)$, а не $\left(1+\frac{1}{2}\frac{B}{R}\right)$, как это приведено в тексте; однако расхождение снимается, если под R понимать не радиус серединной окружности, а радиус малого диска (цилиндра), что, по-видимому, имел в виду Максвелл.

200. Выражение (38) является приблизительным. Как указал Нивен, точный ответ имеет вид

$$\frac{R^2}{B}+\frac{2}{\pi}R\ln 2+\frac{B}{4}+\frac{B}{2\pi^2}(\ln 2)^2-\frac{B}{\pi^2}\sum_1^\infty\frac{1}{2^n}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\left(\ln 2\right)^2.$$

что отличается от (38) приближенно на 0,28 B.

350. Последний абзац п. 350 отсутствует в первом издании.

357. «В журнале «Phil. Mag.» за 1877 г., т. 1, с. 515—525 г-н Оливер Лодж указал на существование недостатка в методе Манса. Поскольку электродвижущая сила батареи зависит от проходящего через нее тока, отклонение стрелки гальванометра не может быть одинаковым при обоих положениях переключателя, если справедливо, конечно, уравнение $a\alpha = c\gamma$. Г-н Лодж описывает некоторую удачно использованную им модификацию метода Манса».— *Примеч. У. Нивена.*

388. «В случае (3) говорят, что первый магнит ориентирован по направлению ко второму магниту, а второй ориентирован «боком» по отношению к первому. С помощью формул (6), (7) легко доказать, что если бы первый магнит был ориентирован боком по отношению ко второму, то момент сил, действующих на второй магнит, был бы равен m_1m_2/r^3. Таким образом, момент сил в случае, когда отклоняющий магнит ориентирован по направлению к отклоняемому, вдвое больше, чем в случае, когда он ориентирован боком по отношению к последнему. Гаусс показал, что если бы сила менялась обратно пропорционально p-й степени расстояния между полюсами, то момент при ориентации отклоняющего магнита по направлению к отклоняемому был бы в p раз больше, чем в случае ориентации отклоняющего магнита боком по отношению к отклоняемому. Сравнивая моменты сил в этих двух положениях, можно проверить закон обратных квадратов более точно, чем это возможно при помощи крутильных весов».— *Коммент. Д. Д. Томсона.*

404. У Фарадея термин «сфондилоид» (sphondiloid) введен в п. 3271 (т. III, с. 586) в статье «О физическом характере линий магнитной силы» (см. также п. 82). В дальнейшем этот термин не прижился.

426. Значение $\varkappa = 1600$ вставлено в текст Д. Д. Томсоном, что несколько противоречит максвелловским данным $\varkappa = 32$; 45 (см. п. 425).

443. Здесь Максвелл без оговорок рассматривает внешнюю силу x, как непосредственно воздействующую на отдельную молекулу магнита. В действительности же действующая сила может отличаться от внешней, что особенно существенно для таких веществ, как железо, где намагниченность $I \gg x_0$. На это обстоятельство обратил внимание Д. Д. Томсон.

444. Здесь Максвелл не очень четко сформулировал свое предположение, что привело к появлению нескольких разъясняющих комментариев Д. Д. Томсона и У. Нивена. Максвелл, по-видимому, имел в виду следующую модель, в рамках которой получаются приводимые им теоретические результаты:

если внешняя сила отклоняет молекулу на угол, меньший β_0, то после снятия силы молекула возвращается в исходное состояние равновесия; если внешняя сила вызывает отклонение на угол, больший β_0, то это вызывает смещение положения равновесия молекулы до тех пор, пока отклонение от нового (смещенного) положения равновесия не станет равно β_0; после снятия намагничивающей силы такая молекула «вернется» в новое положение равновесия.

454. Комментарий Д. Д. Томсона, поясняющий оптимальный выбор расстояния, на котором получается минимальная ошибка при однократном измерении, сводится к следующему: при однократном измерении $Q = 2M/H = Dr^3$, ошибка $\delta Q = \delta D r^3 + 3Dr^2\delta r$, если ошибки измерений δD и δr независимы, то $(\delta Q)^2 = r^6(\delta D)^2 + 9D^2r^4(\delta r)^2 = r^6(\delta D)^2 + 9(Q^2/r^2)(\delta r)^2$. Эта величина минимальна, когда $(\delta D/D) = \sqrt{3}(\delta r/r)$.

486. Максвелл не приводит вывода формулы для работы, совершаемой магнитом при полном обороте вокруг оси; это место независимо комментировалось и Нивеном, и Томсоном. Мы приводим здесь некоторое объединенное рассуждение.

Как ясно из рис. 23 п. 491, при движении вокруг оси O южный полюс (над плоскостью рисунка) и северный полюс (под плоскостью рисунка) совершают разные работы над полем. Последнее складывается из поля, создаваемого неизменным током i, текущим по подводящим проводам и вдоль оси O, и изменяющимися токами $i-x$ и $i-y$, текущими по контурам $BQPO$ и $BRPO$. При движении магнитного полюса по замкнутому контуру в постоянном магнитном поле работа отлична от нуля только в том случае, когда контур охватывает ток; следовательно, южный полюс никакой работы не совершает, а работа северного полюса (направление Север → Восток → Юг → Запад соответствует движению по часовой стрелке в плоскости рисунка) равна $4\pi mi$. Поле от изменяющихся токов вычисляется как градиент скалярного потенциала; потенциал же пропорционален телесному углу, под которым виден контур с током из точки нахождения магнитного полюса. Обозначим через Ω_x и Ω_y телесные

углы, под которыми видны контуры $BQPOZ$ и $BRPOZ$ из южного полюса магнита, а через Ω_x' и Ω_y' — из северного. Ясно, что при этом можно условно считать возвратную ветвь OZ находящейся в плоскости рисунка — это сдвинет потенциал только на постоянную величину. Более того, нетрудно убедиться, что вклад в результирующую работу при движении полюсов по окружности вокруг оси O дает только поле тока, текущего по перемещающемуся отрезку PO, поскольку созданное кольцевым током магнитное поле перпендикулярно направлению движения. В результате работа в поле меняющихся токов будет определяться соотношением

$$m\int_0^{2\pi}\left[(i-x)\frac{d}{d\theta}(\Omega_x+\Omega_x')+(i-y)\frac{d}{d\theta}(\Omega_y+\Omega_y')\right]d\theta=-mi2\pi(\Omega+\Omega'),$$

что и дает формулу, приводимую Максвеллом.

487. Приводим изложение комментария Д. Д. Томсона, относящегося к выводу формулы для угла, под которым пересекаются на контуре две эквипотенциальные поверхности.

Для определения угла пересечения двух эквипотенциальных поверхностей, опирающихся на общий контур, рассмотрим вспомогательную сферу бесконечно малого (в масштабах контура) радиуса, касательную к кромке контура. Введем сферическую систему координат, отсчитывая полярный угол θ от оси, проходящей через центр сферы параллельно касательной к контуру в месте его пересечения со сферой, а азимутальный угол φ — от этой касательной. Тогда телесный угол, под которым виден контур из центра сферы, будет равен

$$\omega_1=\int_0^{\alpha_1}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=2\alpha.$$

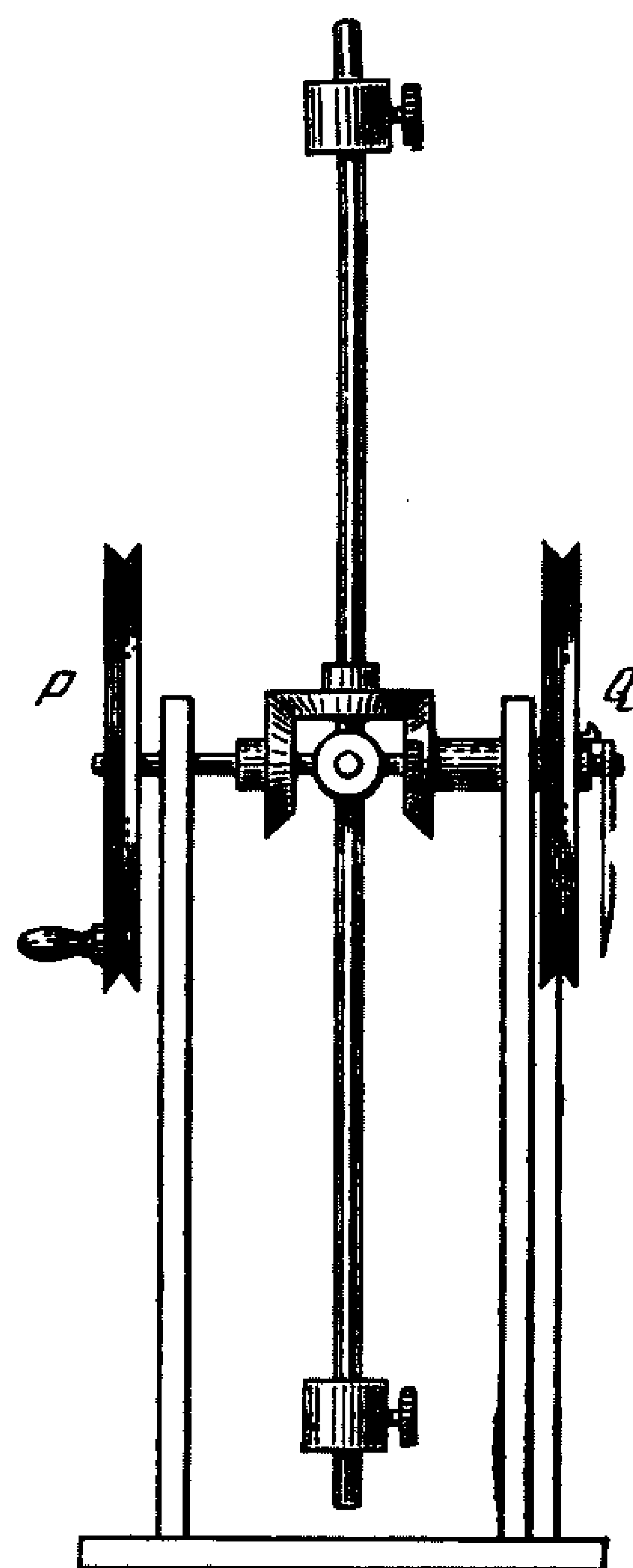


Рис. 34а

Отсюда ясно, что угол между двумя эквипотенциальными поверхностями дается формулой, приводимой в тексте:

$$\alpha_1-\alpha_2=(\omega_1-\omega_2)/2.$$

Это соотношение нарушается в точках излома и самопересечения контура.

497. Максвелл считает правой стороной тока ту, которая находится справа от наблюдателя, стоящего на горизонтальной плоскости и смотрящего вдоль тока.— *Коммент. Д. Д. Томсона.*

536. Д. Д. Томсон обратил внимание, что независимость электромагнитной силы индукции от материала проводника предполагает, что этот материал немагнитный.

584. В конце п. 584 Д. Д. Томсоном сделано дополнение, которое ниже приводится без сокращений.

«Замечание. В Кавендишской лаборатории есть спроектированное Максвеллом устройство (модель), очень наглядно иллюстрирующее законы индукции токов. Оно воспроизведено на рис. 34, *а*. Буквами P и Q отмечены диски; вращение диска P моделирует первичный ток, вращение диска Q — вторичный. Эти диски связаны между собой шестеренчатым дифференциалом. Промежуточная шестеренка несет на себе маховик, момент инерции которого можно регулировать, перемещая грузы к центру или на периферию. Сопротивление во вторичном контуре моделируется с помощью струны, перекинутой через диск Q и накрепко привязанной к эластичной ленте. Когда диск P начинают вращать (т. е. ток начинает течь в первичной цепи), диск Q будет поворачиваться в противоположную сторону (что эквивалентно появлению обратного тока при включении первичного). Когда же скорость вращения P установится постоянной, диск Q будет неподвижен (при постоянном токе в первичной

цепи ток во вторичной отсутствует); при остановке диска P диск Q начинает вращаться в том же направлении, в котором раньше вращался диск P (возникновение прямого тока во вторичной цепи при размыкании первичной). Влияние железного сердечника, приводящего к увеличению индукции, может быть продемонстрировано путем увеличения момента инерции маховика».

603. К п. 603 имеется важное дополнение Д. Д. Томсона. Как известно, Максвелл не написал в трактате всех уравнений электромагнитного поля (которые в наше время известны как уравнения Максвелла), см. более подробно послесловие. Добавление Д. Д. Томсона (сделанное со ссылкой на Хевисайда) сводится к тому, что можно записать замкнутую систему уравнений для полей **E**, **H** и **B**; на полусовременном языке это добавление можно сформулировать следующим образом.

Для замкнутых «истинных» токов (под «истинным» током понимается сумма токов проводимости и смещения) можно описать электрическое поле уравнением $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, которое вместе с уравнением $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ист}}$, материальными связями $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}_{\text{ист}} = \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d}{dt}\right)\mathbf{E}$ и граничными условиями полностью определяет «состояние электромагнитного поля».

604. Максвелл считает, что сила со стороны магнитного поля действует на «истинный» ток, складывающийся из тока проводимости и тока смещения. Подробное разъяснение по этому вопросу приведено в послесловии.

631. При выводе выражения (5) для энергии электрического поля Максвелл исходит из соответствующих представлений в электростатике, где электрическая напряженность потенциальна. Однако, как известно, этот результат сохраняется и для переменных вихревых полей. В этом месте в 3-м издании есть замечание Д. Д. Томсона, аргументирующее справедливость такого обобщения. Оно опущено нами, поскольку окончательное установление выражения для энергии опирается на закон сохранения ее (теорему Пойнтинга), т. е. в известной мере содержит элемент постулирования.

632. Приводим комментарий проф. Нивена, извлеченный им из письма Максвелла профессору Кристалу (Chrystal). «В п. 389 энергия, обусловленная магнитом, имеющим составляющие намагниченности A_1, B_1, C_1 и помещенным в магнитное поле с составляющими магнитной силы α_2, β_2, γ_2, принята равной

$$-\iiint (A_1\alpha_2+B_1\beta_2+C_1\gamma_2)dxdydz,$$

где интегрирование ограничено областью магнита в предположении, что A_1, B_1, C_1 обращаются в нуль всюду вне ее.

Однако полная энергия записывается в виде

$$-\frac{1}{2}\iiint \{(A_1+A_2)(\alpha_1+\alpha_2)+\ldots\}\,dx\,dy\,dz,$$

причем интегрирование распространяется на все части пространства, где находятся намагниченные тела, и A_2, B_2, C_2 обозначают составляющие намагниченности в произвольной точке вне магнита.

Таким образом, полная энергия состоит из четырех частей:

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_1+\ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{1}$$

эта часть постоянна, если намагниченность магнита неизменна;

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_1+\ldots)\,dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

эта часть, согласно теореме Грина, равна

$$-\frac{1}{2}\iiint (A_1\alpha_2+\ldots)\,dx\,dy\,dz \tag{3}$$

и
$$-\frac{1}{2}\iiint (A_2\alpha_2+\ldots)\,dx\,dy\,dz. \quad (4)$$

Последнюю часть мы также можем считать возникающей от жесткой намагниченности и поэтому предполагать постоянной.

Следовательно, изменяемая часть энергии перемещаемого магнита с жесткой намагниченностью является суммой выражений (2) и (3), а именно

$$-\iiint (A_1\alpha_2+B_1\beta_2+C_1\gamma_2)dxdydz.$$

Помня, что смещение магнита изменяет значения α_2, β_2, γ_2, но не изменяет A_1, B_1, C_1, для составляющих силы, действующей на магнит в произвольном направлении φ, найдем

$$\iiint \left(A_1\frac{d\alpha_2}{d\varphi}+B_1\frac{d\beta_2}{d\varphi}+C_1\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right)dx\,dy\,dz.$$

Если же вместо магнита мы имеем тело, намагниченное через индукцию, выражение для силы должно быть таким же; поэтому, подставляя $A_1=k\alpha$, . . ., получим

$$\iiint k\left(\alpha\frac{d\alpha_2}{d\varphi}+\beta\frac{d\beta_2}{d\varphi}+\gamma\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\right)dx\,dy\,dz.$$

В этом выражении нужно положить $\alpha=\alpha_1$, α_2,. . . , но, если намагниченное тело мало или мала величина k, мы можем пренебречь α_1 по сравнению с α_2 и получить выражение для силы, совпадающее с приведенным в п. 440:

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{2}\iiint k(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Работа, совершаемая магнитными силами при уносе тела в бесконечность в случае, когда оно обладает небольшой индуктивной способностью и является намагниченным по индукции, равна только половине работы в случае такого же тела с такой же, но заданной жесткой намагниченностью, поскольку индуцированный магнит теряет свою намагниченность по мере уноса его в бесконечность».

659. Со ссылкой на статью Максвелла (Royal Soc. Proc., XX, p. 160—168, см. также The Scientific Papers of J. C. Maxwell, vol. II, art. XLIX, p. 294) Нивен поясняет, что любое другое решение задачи отличается от приведенного в тексте системой замкнутых токов, зависящей от начальных условий, а не от каких-то внешних причин. Эта система токов быстро затухает; поэтому, если постулировать достаточную удаленность в прошлое начальных условий, приведенное в тексте решение будет единственным.

685. Как заметил Д. Д. Томсон, соотношения (22), (23) строго верны только в случае $\mu=\mu'=\mu_0$, в противном случае надо учитывать искажения, вносимые в поле неоднородностями μ.

696. Как указал Д. Д. Томсон, это легко доказывается, если зональную гармонику $P_i(\vartheta)$ в выражении (6) для ω_1 представить в виде суммы ряда по зональным и тессеральным гармоникам относительно оси C_a, при этом следует воспользоваться формулой

$$\mu=\int\limits_{\mu_2}^{1}\frac{d\omega_1}{dr}\,2\pi c_2^2\,d\mu_2.$$

711. Д. Д. Томсон отмечает, что в поправочном множителе вместо численного коэффициента 3/2 необходимо использовать 3/4.

755. В конце п. 755 помещено следующее дополнение профессора Нивена:

«Приведенные далее исследования заимствованы из записей лекций Профессора Клерка Максвелла, сделанных господином Флемингом; они грустны тем, что составляют часть последней лекции, прочитанной Профессором. В записях г-на Флеминга схема эксперимента отличается от той, которая приведена в тексте книги,— там батарея и гальванометр поменяны местами».

«Выражение (8) может быть доказано следующим образом: обозначим через L_1, L_2, N и Γ соответственно коэффициенты самоиндукции катушек A, B, ab и гальванометра. Тогда кинетическая энергия системы T будет приближенно равна

$$\frac{1}{2} L_1\dot{x}^2+\frac{1}{2} L_2\dot{y}^2+\frac{1}{2} \Gamma (\dot{x}-\dot{y})^2+\frac{1}{2} N\gamma^2+M_1\dot{x}\gamma+M_2\dot{y}\gamma.$$

Диссипативная функция F, т. е. половина скорости изменения энергии, затрачиваемой на нагрев катушек, равна (см. книгу лорда Рэлея «Теория звука», т. I, с. 78)

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2R+\frac{1}{2} \dot{y}^2S+\frac{1}{2} (\dot{x}-\dot{y})^2 K+\frac{1}{2} \gamma^2Q,$$

где Q — сопротивление батареи вместе с принадлежащей ей катушкой.

Уравнение для токов относительно какой угодно переменной x имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}+\frac{dF}{d\dot{x}}=\xi,$$

где ξ — соответствующая электродвижущая сила. Следовательно, мы имеем

$$L_1\ddot{x}+\Gamma (\ddot{x}-\ddot{y})+M_1\dot{\gamma}+R\dot{x}+K(\dot{x}-\dot{y})=0, \qquad L_2\ddot{y}-\Gamma (\ddot{x}-\ddot{y})+M_2\dot{\gamma}+S\dot{y}-K (\dot{x}-\dot{y})=0.$$

Эти уравнения могут быть проинтегрированы сразу же по t. Замечая, что x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$, γ в начальный момент времени равнялись нулю, и полагая $x-y=z$, мы придадим (после исключения y) уравнению следующий вид:

$$A\ddot{z}+B\dot{z}+Cz=D\dot{\gamma}+E\gamma. \qquad (8')$$

Через небольшой промежуток времени после присоединения батареи ток γ сделается стационарным, а ток $\dot{z}$ затухнет. Поэтому $Cz=E\gamma$.

Это приводит к выражению (8), написанному выше; оно показывает, что, когда полное количество электричества, протекающее через гальванометр, равно нулю, мы должны иметь $E=0$ или $M_2R-M_1S=0$. Далее, уравнение (8′) показывает, что если в гальванометре вообще нет тока, мы должны иметь $D=0$, или $M_2L_1-M_1L_2=0$».

Здесь Д. Д. Томсон счел уместным добавить: «Пока условие $M_2L_1=M_1L_2=0$ не выполнено (хотя бы приближенно) непостоянство нуля гальванометра, обусловленное переходными токами, мешает точно установить, происходит или нет «подскок» показаний гальванометра при замыкании цепи батареи».

756. В третьем издании «Трактата» помещено приложение к главе XVII, сделанное при редактировании Д. Д. Томсоном. Оно полностью совпадает с разделом статьи Максвелла «Динамическая теория электромагнитного поля», Dynamical Theory of the Electromagnetic field, *Phil. Trans.*, 155, p. 475, имеющейся в русском переводе (см.: Джеймс Клерк Максвелл. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: ГИТТЛ, 1952, п. 43).

770. Как указал Д. Д. Томсон, описываемый искровой разряд заряженной поверхности в воздух был обнаружен Тоулменом в 1876 г.

778—779. Здесь сохранен термин Максвелла «Электромагнитная емкость самоиндукции катушки» (electromagnetic capacity of selfinduction of a coil), поскольку в тексте проводится сопоставление с электрической емкостью конденсатора (electrostatic capacity of condenser). В принятых сейчас терминах емкость самоиндукции соответствует индуктивности или коэффициенту самоиндукции. Ранее Максвелл прибегал и к таким обозначениям.

793. Еще Д. Д. Томсон обратил внимание на противоречивость приводимых здесь цифровых данных. Он прокомментировал это так: «Мне не удалось подтвердить эти цифры. Если принять $v=3\cdot10^{10}$, то для средней энергии в одном кубическом сантиметре солнечного света, согласно данным Пуйе (Pouillet), приводимым Томсоном, получим $3{,}92\cdot10^{-5}$ эрг, и соответствующие значения P и β, определяемые соотношением (24), будут в единицах *CGS* равны: $P=9{,}42\cdot10^8$ или 9,42 вольт на сантиметр, $\beta=0{,}0314$ или значительно больше, чем одна шестая часть горизонтальной магнитной силы Земли».

858. «В первом и во втором изданиях члены $2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}+2v'\frac{d}{ds'}\frac{dr}{dt}$ пропущены; поскольку, однако, $\frac{\partial^2}{\partial t}=\left\{v\frac{d}{ds}+v'\frac{d}{ds'}+\frac{d}{dt}\right\}^2$, их, по-видимому, следует включить; тем не менее они не влияют на результат в случае замкнутых контуров». — *Коммент. Д. Д. Томсон.*

III

ПОСЛЕСЛОВИЕ[1]
(редакторов перевода)

1. Принципы перевода

Перевод любого текста, художественного или научного, обычно представляет собой компромисс между двумя крайностями — смысловым и буквальным соответствием оригиналу. Наш перевод максвелловского «Трактата об электричестве и магнетизме» ближе ко второй. Это результат преднамеренного решения. Поэтому прежде всего постараемся пояснить его мотивы и рассказать о тех принципах, которых мы придерживались в процессе работы над переводом.

Первый из них — нечто вроде *принципа стилистического соответствия.* Мы стремились не изменять максвелловскую манеру письма, не улучшать, не приближать ее к современной, не трактовать «Трактат», останавливаясь в этом стремлении лишь перед неизбежными различиями языковых норм. Сохранялась не только крупномасштабная архитектоника текста, но и конструкция фразы почти всюду, где англоподобность еще не должна была, по нашему мнению, отторгать русского читателя от более или менее непринужденного ее восприятия.

Язык Максвелла своеобразен. За кажущейся простотой, частыми повторами равносмысловых утверждений, отступлениями, перескоками видится и логическая, и эмоциональная направленность, так что определенная доля аллитераций и стилистических сбоев должна восприниматься не как косноязычие, а как средство литературного воздействия, и было бы досадно выгладить это при переводе.

В своем первоначальном назначении «Трактат» имел целью изложение новых взглядов на свойства (а отчасти и на природу) электромагнетизма, и читатель тех времен следил за ходом повествования, еще не зная правильного ответа, вернее, еще не будучи уверенным в правильности его. Поэтому как сама аргументация, так и форма представления ее также поддерживала совсем иные, чем сейчас, отношения между автором и читателем.

Сохранение таких нюансов является, наверное, заповедным правилом любого перевода и уж тем паче перевода исторически значимого материала, но оно заведомо требует высокого лингвистического мастерства; потому-то мы, опасаясь промахов, тяготели — при отсутствии явных противопоказаний — в сторону пунктуального переноса стилистики. Этому отчасти благоприятствовало изменение функций «Трактата», происшедшее за столетие. Первоначально они были не только чисто научные, но и учебные. Как учебное пособие «Трактат» был необычен, ибо в нем много места отводилось «неокончательным утверждениям», а потому он казался многословным, допускал возможность методических улучшений и разъяснений и т. д. Вполне вероятно, что перевод его на русский язык в те време-

---

[1] В послесловие включены фрагменты обзора [1], выпущенного в связи со 150-летием со дня рождения Максвелла. Некоторые ссылки на литературу даются через этот обзор.

Наиболее полный (из известных нам) перечень работ, посвященных истории максвелловской электродинамики, приведен в [2]. Мы признательны Б. В. Булюбашу за эту справку.

на (к сожалению, не случившийся) поощрял бы большее предпочтение смысла над формой [2].

Современный читатель знакомится с «Трактатом» с иными намерениями: им руководит — насколько мы вправе судить — скорее историческая любознательность, реже — желание получить фактическую справку и почти как исключение— потребность пополнить свое предметное образование. Снятие образовательных обязанностей как раз и позволяет оставить в неприкосновенности повторы, длинноты, кажущиеся или фактические непоследовательности, загадочности и т. п. и, главное, не вносить оживляющего грамматического разнообразия там, где оно отсутствует у самого Максвелла. Например, Максвелл довольно часто, повторяясь от фразы к фразе, постепенно развивает тот или иной тезис, словно разглядывая его под разными углами. И при этом отдает предпочтение условным оборотам: «если предположить», «если допустить», «если взять» и даже «если обозначить», как бы дозволяя при этом свободу и другим возможностям. Мы практически нигде не изменяли этих наклонений, хотя и понимали, что по-английски они несут на себе отпечаток меньшей осторожности, чем по-русски.

Второй принцип следовало бы назвать «*принципом наименьшего вмешательства*» или даже категоричнее — «*принципом невмешательства*» в авторский текст. Сам по себе он вроде бы очевиден, но предусматривает текстологическую ясность, т. е. знание того, что́ есть аторский текст, а как раз в этом мы испытывали некоторые затруднения.

Перевод «Трактата» выполнен с третьего издания 1891 г., которое было подготовлено к печати Дж. Дж. Томсоном. А всего на английском языке выпущено три независимых издания: первое, 1873 г.,— самим Максвеллом; второе издание 1881 г., которое только начал готовить Максвелл, а докончил — в редакторском плане — проф. У. Нивен уже после смерти Максвелла; наконец, третье — томсоновское издание. Все последующие перепечатки «Трактата» на английском языке повторяют третье издание. Правда, с текста нивенского издания успели появиться переводы на немецкий (1883 г.), французский язык (1889 г.), но после 1891 г. за английским текстом третьего издания укрепилась репутация канонического.

Мы держали для контроля перед собой исходное издание 1873 г., но это не всегда помогало нам восстановить истину. Доподлинно известно, что Максвелл успел подготовить ко второму изданию лишь д е в я т ь глав, подвергнув их заметной переработке. Сюда же вошла и предварительная глава (Предварение, Preliminary), где изложены общие взгляды на поведение физических и математических величин, вовлекаемых в теорию электромагнетизма. Из сличения этих разделов в первом и втором издании можно строить догадки о том, каковы были намерения Максвелла по усовершенствованию и продолжению «Трактата», но не более того. Похоже, что он не намечал внесение кардинальных структурных изменений, но хотел навести определенный смысловой порядок и терминологическую чистоту. Об этом свидетельствуют не только переписанные им главы, но рукопис-

---

[2] Ранее на русском языке были изданы лишь избранные отрывки из публикаций Максвелла, в том числе и из «Трактата» [3], с сопроводительными заметками Дж. Дж. Томсона и очень выразительными комментариями Л. Больцмана. Предисловие к «Трактату» было также переведено в сборнике [4]. Сейчас эти книги за давностью лет стали мало доступными. Во избежание стилистического разнобоя в настоящем издании все уже известные ранее места «Трактата» переведены заново.

ные заметки и фрагменты его лекций, где были переизложены отдельные места «Трактата», по-видимому, показавшиеся ему недостаточно совершенными или завершенными.

Редакторы второго и третьего изданий (Нивен и Томсон), имея в своем распоряжении кое-какие следы замыслов Максвелла, постарались познакомить с ними читателей. Для этого ими были использованы три вида редакторских вставок: комментаторские сноски (помещенные внизу соответствующих страниц), прямые врезки в текст, отграниченные от максвелловского прямыми (Нивен) или фигурными (Томсон) скобками, и, наконец, изменения без указаний на авторство. При переводе на русский язык всякий раз приходилось принимать индивидуальные решения, отдавая предпочтение, естественно, самому Максвеллу всюду, где имелась возможность отделить «деяния от толкования». В случае расхождения текстов первого и третьего изданий, когда установление причин несовпадения было безнадежным, мы принимали версию третьего издания. Наш подход к комментариям Нивена и Томсона будет пояснен чуть позже. Что же касается опечаток или описок, то большая часть их была обнаружена и устранена Нивеном и Томсоном, хотя кое-что осталось и для нас. Впрочем, вполне возможно, что и наша внимательность тоже сработала не везде. Только в совершенно очевидных случаях исправления опечаток или недопечаток производились негласно. Никаких посягательств на места, казавшиеся нам странными или даже неточными, не делалось. Более того, мы старались переводить их строже, указывая при необходимости на неоднозначности оборотов. Даже комментирование таких мест могло иногда граничить с нарушением исторического такта, т. е. с использованием разности времен и знаний на предмет снисходительного поучения.

Так мы пришли к принятию третьего *принципа — сдержанности* в *комментариях*, распространив это и на замечания предшествующих редакторов. Последние преследовали несколько целей. Прежде всего, указания на фактические неточности. Эти комментарии, разумеется, сохранены — иногда в дословном переводе, иногда в переизложении, иногда с нашими дополнениями. Однако все это вынесено в конец второго тома, дабы не отвлекать читателя от чисто максвелловского течения мыслей. Нивен и особенно Томсон уделили много внимания методическим улучшениям — они наводили строгости в некоторых доказательствах, иллюстрировали максвелловские утверждения более удачными, на их взгляд примерами, а порой и не пропускали возможности обобщений.

Мы не сочли нужным приводить все это довольно объемистое хозяйство, созданное в те времена в связи с потребностью усвоения и освоения максвелловской электродинамики, тем более что оно далеко не исчерпывало сути дела. Впрочем, некоторые комментарии этого типа были все-таки оставлены в тех случаях, когда возникали сомнения, не инициированы ли они какими-либо максвелловскими указаниями.

Третий вид комментариев Нивена — Томсона включал сведения о результатах, опубликованных после выхода в свет первого издания «Трактата». Они нами убраны без колебаний, ибо вряд ли сейчас представляется интересным перечисление этих небольших и разрозненных успехов первого десятилетия, к тому же и не полное, а извлеченное лишь из той части текущей литературы, которая оказалась доступной редакторам. Восполнение этих пробелов и естественное продолжение перечня на последующие периоды вовлекло бы нас в занятие составления

истории развития максвелловской электродинамики, неуместное в рамках дополнений к «Трактату», хотя и несомненно интересное.

Не меньшая сдержанность была проявлена нами и в отношении собственных комментариев, хотя к пониманию разумности таковой мы пришли не сразу. Сначала нам казалось, что многие вычисления и доказательства было бы полезно повторить в современной манере, привычнее воспринимаемой и легче сопоставляемой с известными методами. Хотя максвелловская электродинамика являет собой пример физической теории, надолго сохраняющей свой первоначальный облик в неприкосновенности, все же за прошедшее столетие был достигнут значительный прогресс в ее интерпретации и методике изложения. Множество разноплановых монографий и учебников появилось за это время и находятся в активном обращении. Возросла культура и техника работы с уравнениями Максвелла, и это позволило извлекать из них результаты, на которые Максвелл вышел «независимо и много раньше», весьма экономными средствами и с большим пониманием их подчиненности общим законам и принципам. Следовательно, эти книги вполне могут сойти за развернутые комментарии к «Трактату», хотя их авторы, как правило, и не ведут свои исчисления непосредственно от «Трактата» [3].

С другой стороны, именно методическое оснащение позволяет нам сейчас легче понимать максвелловский язык, чем его современникам. Более того, он эмоционально воспринимается как первозданный, его архаизмы не раздражают, а те трудности, на которые сетовали некоторые «логически настроенные» первые читатели «Трактата», преодолеваются нами более непринужденно, поскольку мы приучены к полевому мышлению, обладаем обогащенной интуицией и, главное, уверенно знаем, что уравнения Максвелла правильно описывают **все** макроэлектродинамические явления. Так что даже выдающиеся по тем временам комментарии Больцмана (частично переведенные на русский язык [3]) сейчас уже, по нашему разумению, не могут сопровождать «Трактат». Они принадлежат к истории преодоления недоверия, очищения здания от строительных лесов.

Последний оборот идет от самого Максвелла, который сознательно, следуя воодушевляющему примеру Фарадея, не избегал вводить читателя в свою (как сказали бы сейчас) творческую лабораторию. Да и многие другие прямые комментаторы «Трактата» фактически исполняли агитационные и очистительные функции, с которыми успешно справилась сама жизнь. И мы не сочли нужным собирать их под одним переплетом, ограничившись только ссылками. Соответственно и свое собственное отношение мы старались выражать редко и ненавязчиво, преодолев опасения быть заподозренными в нерадивости. Есть, правда, по крайней мере один изъян в тактике скупого комментирования: не раскрыты именные ссылки, даваемые Максвеллом, подобно тому, как это было сделано, например, при переводе трудов Фарадея [5].

Наконец, четвертый принцип работы над переводом относится к терминологии и может быть назван *принципом непосягательства на старинные слова.*

Далее в п. 2 мы вкратце поясним максвелловскую систему обозначений, принятую в «Трактате», довольно многоплановую и многозначимую. Пока же сосредоточимся на чисто переводческих загвоздках. Создавая электродинамику, Мак

---

[3] В конце обзора [1] приведена разветвленная схема возникновения нескольких поколений таких учебников, генетически прослеженная от максвелловского «Трактата».

свелл естественно вводил множество новых терминов, которые обычно отпочковывались от образных пояснений определенных физических событий и, как многие первые обозначения, понятий, были в своей эмбриональной стадии метафоричны [4]. Установление связей между ранее, казалось бы, независимыми величинами сопровождалось совмещениями соответствующих терминов; при этом, как правило, рождалось и новое понимание их физической сущности. Значит, одновременно с эволюцией понятий происходила эволюция слов. Но, к сожалению, в английском и русском языках однозначной связи между этими лингвистическими процессами не существовало. У нас совершался свой — слегка смещенный по времени — процесс формирования электродинамического словаря. Когда речь шла о промежуточных обозначениях, играющих роль неформальных разъяснительных образов, то, поскольку они не получили в русском языке даже временного употребления, мы осмелились вставлять их в историю электродинамики ретроспективно.

Так возникли слегка непривычные нам словообразования «индуктивная способность», «магнитная индуктивная емкость» и т. п. Но в большинстве других случаев приходилось сталкиваться с уже укоренившимися словами, посягательство на которые потребовало бы переучения людей; поневоле следовало держаться старинных обычаев, несмотря на то, что их создатели распоряжались ими не очень удачно, поскольку было (и будет!) не так-то просто предугадывать смысловое обогащение понятий, подстерегающее их по ходу развития науки. Действительно, многие обозначения возникли из ассоциаций с первыми, обычно экспериментальными, проявлениями: магнит, электрон, поле и т. п., а затем их содержание углублялось и утрачивало связь с происхождением.

Иногда возникает искушение (наивное, как всякое преобразование методом распоряжений сверху) взять и, собравшись с духом, провести всеобщую реформу перевведения всех обозначений взамен старых, исторически сложившихся, но, увы, не отразивших окончательного назначения своего. Если такое и произойдет, то, скорее всего, при изобретении нового языка, не обремененного увесистыми традициями, языка изолированного, кастового, слова которого не будут диффундировать по живым языкам, подобно старой латыни. А пока приходиться приноравливаться.

Вот несколько примеров. В максвелловские времена довольно часто слово electrification употреблялось и для обозначения *процесса* заряжения, и как характеристика *состояния* наэлектризованности. В русском языке его функции распределились по разным словам, хотя можно было бы ввести *заряжение* и *заряженность*, *электризация* и *наэлектризованность*... Далее, Максвелл часто использует абстрактный образ electrified point (заряженная точка), а мы его вынуждены переводить как точечный заряд (point charge), придавая сему более модельный оттенок. То же самое несоответствие наличествует и в случае заряженного объема и, строго говоря, не тождественного с объемным зарядом. И вдруг в двумерном случае русский язык разрешает эти два понятия — геометрическое (заряженная поверхность) и модельное (поверхностный заряд) — употреблять раздельно и независимо.

---

[4] Сейчас у нас появилась приятная возможность отослать читателя, интересующегося неисповедимостью законов появления терминов, к научно-показательной статье Е. Л. Фейнберга [6], откуда следует, в частности, что трудности прошлых лет не померкнут, а усугубятся в будущем.

Другой, еще более выразительный пример принудительного следования традициям связан с запутанным использованием слова *сила*. Даже в физическом словаре оно испытало *сильные* перегрузки. Это, прежде всего, обычная механическая сила (иногда говорят пондеромоторная, но как разнообразящий синоним — без альтернатив). Ему соответствует английское слово force. Значит, слово «сила» ассоциируется с размерной физической величиной. Однако мы часто прибегаем к «силе» в безразмерном значении: сила тока, сила магнитного полюса и т. п. В английской лексике это уже не force, а strength, т. е. скорее напряженность или даже с и л ь н о с т ь, но не сила; с другой стороны, «напряженность» приходится приберечь для перевода английского «intensity», потому что «интенсивность» в русском языке выглядит как скалярное понятие, тогда как напряженность может смотреться и как векторное тоже... Перечень этих пересечений можно было бы продлить. До сих пор в ходу понятие «*живая сила*», которая имеет размерность *энергии*, или лошадиной *силы*, имеющей размерность *мощности* (horse power)... В общем, основания к преобразованию обозначений вполне аргументируемы, и в принципе их следовало бы начать с переписывания исходных монографий, но это задержало бы перевод «Трактата» на неопределенный срок, ибо человечеству пока еще не суждено договориться даже и по более важным вопросам.

2. Терминология, обозначения

Как уже упоминалось, Максвелл предполагал в дальнейших переизданиях «Трактата» провести пересмотр обозначений и терминологии. Видимо, он испытывал тут известное беспокойство. И в какой-то мере оно оправдано: в нашем современном представлении «Трактат» схож с книгой, миновавшей процедуру внутрииздательского редактирования. Правда, сейчас, когда он перешел в ранг исторических памятников, это обстоятельство имеет и благоприятные стороны, поскольку его с большим основанием можно воспринимать как истинно максвелловский, почти «рукописный» документ и изучать с его помощью даже некоторые психологические аспекты творчества (что, кстати, часто затрудняется в наши дни из-за возрастающего вмешательства в текст «теневых соавторов»). Символика и терминология «Трактата» тоже показательны. Максвелл порой необычно многообразен в словесных наименованиях сходных или даже одинаковых физических величин. Некоторые его понятия живут, развиваются, а затем исчезают вовсе, другим он остается верен до конца, иногда чередуя две или три их разновидности. Например, диэлектрическая проницаемость сначала появляется как электрическая индуктивная способность (емкость, capacity), потом—как диэлектрическая постоянная, потом — как проницаемость.

Это отражает действительную картину разнобоя, имевшего место до максвелловского объединения статического и переменного электромагнетизма с оптикой. Аналогичные многоликости свойственны и электромагнитным полям: они обретают разные имена почти при всяком своем независимом появлении на свет. Если речь идет об электрическом поле, то это и электрическая сила (electric force), когда оно определяет воздействие одного заряда на другой, это и электрическая интенсивность (electric intensity), когда оно — самостоятельное (оторванное от источников) поле в среде (оставаясь, однако, по-прежнему величиной векторной, направленной вдоль линии силы), это напряженность ЭДС или даже просто

ЭДС в точке (electromotive intensity, electromotive force at a point), т. е. плотность ЭДС (at a point density), прежде всего, когда электрическое поле возникает в результате изменения магнитного потока.

А вот с напряженностью магнитного поля никакого разнословия нет — она всегда фигурирует как магнитная сила (magnetic force), хотя, заметим, и не обладает размерностью механической силы. Конечно, метания не случайны: они отражают изменения взглядов на понятия и то состояние поиска, в котором пребывал Максвелл при написании «Трактата» и даже после. Некоторые из терминов (displacement, flux, current) носят следы аналогий, моделей. Как мы знаем, впоследствии разные по происхождению поля E слились в одно электрическое поле, а поле **H** так и осталось самим собой (т. е. магнитным полем), утратив лишь отвлекающую «силовую часть». Что же касается векторов **D** и **B**, то здесь терминология и вовсе не претерпела изменений: и у Максвелла, и в наши дни употребляются на равных правах термины электрическое смещение и электрическая индукция (это **D**), и всюду без исключений — магнитная индукция (это **B**). При этом иногда Максвелл придает этим понятиям и смысл векторной плотности соответственно электрических и магнитных потоков, но слово «плотность» опускает, называя все это просто потоками (flux), а то, что сейчас называется потоком, он обозначает как полный (интегральный) поток (total flux).

Здесь мы были вынуждены отступиться от «принципа сохранения устаревших слов» и следовать поздней терминологии. Иначе современный читатель вконец запутался бы или же текст был бы испещрен назойливыми пометками. Обратим внимание, что в наше время некоторые часто встречающиеся термины дублируются привычно закрепленными за ними буквами, приобретающими тем самым функции и обозначений, и наименований. Но такая стандартизация электромагнитной символики (в ряде случаев интернациональная) пришла позже, в «Трактате» почти для всех векторных величин Максвелл прибегает к заглавным готическим буквам, непривычным для глаза многих пользователей даже из латино-алфавитных стран, поэтому первоначальные максвелловские обозначения не получили никакого распространения, что, между прочим, не так уж часто бывает в физике.

Впрочем, «непризнанию» максвелловских обозначений способствовало также еще и отсутствие внутритрактатной однозначности. Только когда все эти развивающиеся и сливающиеся величины достигали наивысшего положения , так сказать в обществе себе подобных, символика за ними закреплялась окончательно. Может быть поэтому «Трактату» и не предпослан список принятых в нем обозначений, а систематизация главнейших из них приведена лишь в п. 618, непосредственно перед п. 619, где собраны все основополагающие уравнения поля (уравнения Максвелла). К этому разделу читатели могут обращаться по части обозначений как к справочному, все-таки проявляя при этом известную бди тельность.

В конце позволим себе сделать небольшое замечание о переводе формульного материала. Максвелл не различает в обозначениях полной производной от частной: у него всюду знак дифференцирования выглядит как $\frac{d}{d}$. Верно, в ряде случаев дифференцирования по времени он пользуется развернутым выражением, которое в привычном нам представлении имеет вид $\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)$, но и тут со-

храняет $\frac{d}{dt}$ вместо $\frac{\partial}{\partial t}$. Мы оставили эти формы в неприкосновенности, обнаружив, что в контексте недоразумения почти исключаются, а некоторые двусмысленности, на которые Максвелл шел с пониманием, иначе нельзя было бы и передать. Во всех других отклонениях от наших формульных стандартов (если только они не могли привести к путанице) мы выбирали обозначения, принятые у нас сейчас, например, вместо log вводили ln, вместо $\tan^{-1}$ — arc tg и т. п.

3. Структура

Вряд ли уместно рассказывать о схеме устройства книги в Послесловии к ней, т. е. после того, как она предстала перед глазами читателей. Однако полезно, по, видимому, обратить внимание на некоторые ее необычности. Сначала о внешних признаках. «Трактат» состоит из частей (их 4), глав (их 56) и параграфов — пунктов (их 866). Последние пронумерованы непрерывно и имеют внутреннюю нумерацию формул. Примерно так же, как «Труды» Фарадея [5]. Это облегчает библиографическое взаимодействие с текстом — все ссылки можно производить попунктно, а не постранично, и поэтому они инвариантны к любым изданиям на любых языках. Многие пункты не имеют заголовков, но какое-то словесное упоминание о них обязательно присутствует в сводном Содержании «Трактата». Этот атрибут книги вообще выполнен весьма оригинально — в нем даны не заглавия, а характеристики (ключевые фразы) параграфа. Некоторые даже неожиданны, и поэтому сводное Содержание представляет, как говорится, вполне самостоятельный интерес: туда полезно заглядывать не только с общепринятыми намерениями — поиска нужного места, но и с целью ознакомления с максвелловскими акцентами.

Однородность структуры «Трактата» иногда нарушается отступлениями, отдельными техническими экскурсами, и это часто не отражено в *формальном содержании*, хотя играет важную роль для понимания *содержания фактического*.

Особых слов заслуживает предметно-именной указатель. В переводе он воспроизведен аутентично, тем более что нам не удалось уловить, чем руководствовался Максвелл при его составлении. Имена, физические объекты, явления, величины приведены там вкупе, подряд, неполно, выборочно, иногда даже применены другие, слова, чем в пунктах, куда дается ссылка. Проще всего предположить, что это результат недоработки, но не исключены и другие, более уважительные мотивы.

Теперь несколько слов о внутренних, методических особенностях структуры «Трактата». Сейчас сложился прочный стереотип изложения основ макроэлектродинамики. Он состоит в двухэтапном подходе. На первом этапе осуществляется собирание экспериментальных фактов и ступенчатое обобщение охватывающих эти факты законов. Это стадия индуктивных догадок и обобщений, стадия восхождения к уравнениям Максвелла. Они постулируются как исходные, первоначальные законы Природы, затем изучаются результаты последовательного дедуктивного приложения этих законов к разным, в той или иной степени упрощенным моделям и сопоставляются с доступными наблюдению фактами. Эта стадия исследования решений уравнений относится сейчас в основном к теоретической физике — разделу, посвященному теории электромагнитного поля.

Не будем стремиться понять, почему первая — восходящая ветвь — считается более общей (точнее — более экспериментальной) физикой, чем вторая. Важно иное. Ведь обучение многим знаниям, не только физике и не только электромагнетизму, происходит, как правило, двухзаходно, причем индуктивная цепочка предшествует дедуктивной (этими словами здесь и далее мы оперируем несколько упрощенно и скорее в целях обозначений, а не характеризования, т. е. отнюдь не утверждая, что индуктивные и дедуктивные приемы так категорично разнесены по стадиям). Наверное считается, что воспроизведение в целях обучения этого естественного хода познания законов природы (а ведь именно так мы осваиваем окружающий мир по мере своего взросления) адекватен психоневрологической сущности людей. Исторически впервые такой прием был испробован на механике. Там, отправляясь от законов равновесия и движения простейших тел под воздействием на них внешних сил, постепенно наращивались обобщения с выходом на аналитическую динамику сплошных (непрерывных) сред, вершинные уравнения которой могли быть извлечены из принципа наименьшего действия.

В середине XIX в., когда у Максвелла созрели намерения привести в систему многочисленные разрозненные факты и законы, относящиеся к электромагнетизму, эта программа построения Великой Науки Динамики (мы употребляем здесь максвелловские эпитеты и максвелловский способ придания патетичности высказываниям путем привлечения заглавных букв к заглавным словам [5]) была во многих своих частях завершена. Но Максвелл, опоздав стать ее создателем, несомненно являлся ее знатоком и воплотителем. На опыте динамики можно было основывать методику создания и других динамико-подобных (тоже максвелловский оборот) наук: наикратчайшими путями выходить на наиобщайшие законы, которые затем анализировать и сопоставлять с наблюдениями во всех наивозможнейших частных ситуациях. И вот эту работу Максвелл проделал, можно сказать, в одиночку, тогда как в Динамике она соединила усилия нескольких поколений разнохарактерных созидателей (Ньютон, Эйлер., Лагранж, Гамильтон...).

Конечно, и у Максвелла были Великие и Проницательные Предшественники, в первую очередь Фарадей, но функции обобщения, объединения и анализа Максвелл исполнил сам. В этом смысле «Трактат» можно квалифицировать как первый в истории физики образец научного произведения (мы не знаем, есть ли второй), соединившего в себе основполагающую монографию, т. е. фолиант, систематизирующий старые и устанавливающий новые связи в природе явлений, и учебно-методическое пособие, педагогически последовательно, двухэтапно вводящее обучающегося читателя (у Максвелла неоднократно прорываются прямые обращения — «учащийся», «обучающийся», «студент»(в курс нового знания и понимания. Наверное, мы несколько утрируем картину, но намеренно, чтобы контрастнее выставить максвелловский замысел «Трактата» — в едином сочинении провести охват всего электромагнетизма по восходящим и нисходящим путям. Эта программа раскрывается в самом начале «Трактата».

Вот что пишет Максвелл в Предисловии: «Я полагал бы, что будет полезен трактат, который имел бы главной своей задачей охват всего предмета в целом, с

[5] Максвелл привлекает несколько разных способов акцентирования: курсивы, разрядки, а также красные, прописные буквы в начале слов. По-английски это выглядит менее торжественно, чем по-русски, поскольку частично еще не утрачена немецкая традиция, где все существительные начинаются с прописных букв.

общей методической точки зрения...». Кстати сказать, Предисловие к «Трактату» заслуживает отдельного изучения, это самостоятельное *произведение науки* (и науковедения). Затем Максвелл возвращается к вопросу о структуре книги по мере продвижения вперед. У него есть даже специальный пункт 59 (сохранившийся и при подготовке второго издания!) — «План Трактата и сводка его результатов». И допустимо предположить, что он вернулся бы к обсуждению этих вопросов в Заключении к последующим изданиям, если бы жизнь предоставила ему такую возможность.

4. Основные идеи

Казалось бы, не должно возникать трудностей выявления основополагающих идей, на которые опирался Максвелл при создании общей теории электромагнетизма: он неоднократно и подробно (местами, как считалось некоторыми его современниками, даже излишне пространно) пишет о них сам. Мы выделим их примерно в том же порядке, в котором они развиваются в «Трактате». Прежде всего, это понятие физического поля; затем — скалярных и векторных величин, описывающих поля математически; далее — принцип близкодействия, как-то естественно проистекающий из принятия существования полей, непрерывно распределенных в пространстве и изменяющихся во времени; наконец, введение тока смещения на равных правах с током проводимости (и током конвекции), благодаря чему упрочивался вывод об универсальном соблюдении закона сохранения заряда (уравнение непрерывности для тока аналогично соответствующему уравнению в гидродинамике).

Однако помимо этих идей «Трактат» содержит и другие, столь открыто не провозглашаемые, но тоже весьма значимые. В некоторых случаях это стало понятно лишь впоследствии, через поколения.

В историческом плане сюда же примыкает и вопрос о предшественниках, особенно близких, непосредственных, тех, кто своими результатами, предсказаниями и т. п. инициировал максвелловские раздумья над явлениями электромагнетизма, и тех, кто, по существу, снабдил его удобным для описания этих явлений инструментарием.

Максвелла — за редчайшими исключениями — отличала тактичность и уважительность ко всем предшественникам. Но одного он выделял особо как образец Научного Величия и Научного Ясновидения. Речь идет, конечно же, о Фарадее. Вряд ли в те времена существовал какой-либо другой ученый, кроме Максвелла, проштудировавший «Труды» Фарадея так тщательно, так проникновенно и так благожелательно к ним. А ведь многим ревнителям строгих правил некоторые содержащиеся в них умозаключения казались, мягко говоря, не совсем вразумительными. Это какой-то парадоксальный стереотип «непризнания признанного». Человек, уже прослывший Великим Исследователем Природы, казалось бы, должен был хотя бы настораживать людей каждым своим размышлением, намерением, поступком. А они, как завороженные, отметают их, не вникнув, будто руководствуются какими-то тягостными соображениями типа «он так долго был прав, что когда-то должен начать быть неправым».

Фарадей был, по-видимому, человеком, которому нет и не может быть объяснений, если под таковыми понимать логические доводы. Он соединял в себе дотош-

ную приверженность фактам, подкорковую бдительность к отвлекающим случайностям с симфоническим воображением, позволявшим ему составлять правильное представление о свойствах ответов без решения задач и без умения решать их в общепринятом понимании. По-видимому, он действительно приводил в состояние раздражения немалое число «аналитиков» (Максвелл называет их «professed mathematicians», возможно, используя двусмысленность слова «professed» — профессиональный и считающий себя таковым), вынужденных признавать его Великие Открытия и не признавать свою неспособность проникнуться его образным мышлением. А ведь такие люди, как Фарадей, принадлежа сами к странным («аномальным») явлениям природы, именно потому и могли столь непринужденно просто углядывать не менее странные явления в Природе вообще. Вероятно, кое-что свойственное Фарадею, относится и к самому Максвеллу, открывшему *этого* Фарадея, т. е. прочитавшему и расшифровавшему фарадеевские «письмена» с доверием к ним. Максвелл скромно сводит свою заслугу к переизложению идей Фарадея на язык математических соотношений. Но его показания не должны нас дезориентировать: мы понимаем, что само по себе открытие *этого* Фарадея потребовало от Максвелла неменьшего преодоления инерционности мышления, чем когда дело касалось явлений, причисляемых к неодушевленным.

Главнейшей концепцией Фарадея была концепция континуума, непрерывно распределенного в пространстве действия, поля,— сначала поля электрических и магнитных сил, а потом уже и единого электромагнитного поля. Она не воспринималась всерьез его современниками, скорее всего, из-за того, что аналогия с механикой требовала введения какой-то особой эфирной среды, наделенной вымороченными свойствами. Максвелл не сразу, но сумел преодолеть этот «страх среды». Сначала он придумал механико-подобную электродинамику [6], затем фактически устроил механические подкрепления фарадеевской концепции поля и построил теорию этого поля, как потом стали говорить, феноменологически, оперируя с полями как с первоначальными физическими сущностями. Именно таким образом обстоит дело в «Трактате», в чем заключается его первостепенная научно-методическая значимость. Мы уже настолько привыкли к неизбежности обращения на том или ином иерархическом уровне описания к феноменологическим постулатам, что нам нелегко оценить то идеологическое мужество, которое нужно было проявить Максвеллу для принятия столь нетривиального решения. Это ведь не только про электродинамику, это про познание окружающего мира вообще.

Фактически еще ранее в теории гравитации (не говоря уже прямо об электростатике), развиваемой Лапласом, Пуассоном, Грином, было использовано понятие поля, в частности, поля скалярного потенциала и градиента от него, дающего силу, и все работали с этими понятиями, не подводя под них никаких несущих сред, но почему-то считали их не более чем математическими абстракциями. Мак-

[6] Именно с таких позиций были изложены идеи Максвелла в его первых работах [7]; где фактически уже содержались все черты новой электродинамики. Отчасти это надолго отпугнуло многих соисследователей. А некоторые даже и «Трактат» восприняли (по-видимому из-за невнимательного с ним знакомства) не более как систематизацию «механистического подхода». Напомним часто цитируемую сентенцию А. Пуанкаре: «Система Максвелла была странно и малопривлекательна, так как он предполагал весьма сложное строение эфира; можно было подумать, что читаешь описание завода с целой системой зубчатых колес, рычагами, передающими движение, и сгибающимися от усилия центробежными регуляторами и передаточными ремнями» [8]. А ведь в «Трактате» уже ничего этого и не было!

свелл неоднократно взывает к данному примеру как к иллюстрации удивительного взаимонепонимания между математически и физически мыслящими людьми, ибо полевая концепция Фарадея по существу состояла лишь в придании этим и аналогичным им решениям смысла наблюдаемых величин.

Приняв концепцию поля, Максвелл прежде всего предпринял пересмотр (и этому посвящена изрядная часть «Трактата») всех доселе известных и сравнительно хорошо разработанных разделов электричества, магнетизма и проводимости («conductance» — снова трудности перевода, по-русски это делается с помощью длинного оборота — «процесс прохождения токов по проводящим средам»). При этом Максвелл столь же непринужденно, сколь это делается в гидродинамике, вводит, кроме потенциальных векторных полей (обычных, но, заметим, отнюдь не обязательных даже в электростатике), поля вихревые. И хотя он нигде не дает явного доказательства простой, но определяющей многие топологические особенности векторных полей теоремы о представлении произвольного векторного поля в виде суперпозиции потенциального и вихревого, он широко пользуется таким разбиением как очевидным.

Следующий шаг должен был состоять в развитии аппарата векторной алгебры и анализа. Аппарат в том виде, в котором мы владеем им сейчас, как известно, был отработан чуть позже, но можно сказать, что это произошло в основном по заказу теории электромагнитного поля [7]. Не следует, однако, принижать и прямой максвелловский вклад: Максвеллу принадлежит понимание адекватности векторного анализа, не говоря уже об инициативе его использования. Бытует мнение, что будто бы он предпочитал работать только с декартовыми компонентами векторов. Действительно, при решении многих конкретных задач (да еще при извлечении преимуществ от разделения переменных) он широко пользовался записью уравнений через проекции (не обязательно декартовы, разумеется). Но он не пропускал почти ни одной возможности — по крайней мере в «Трактате» — написания общих уравнений в инвариантном векторном представлении. Правда, максвелловские обозначения не совсем привычны нашему глазу. Следуя Гамильтону и Тэту (а в те времена больше и некому было следовать), он стал работать со скалярами и векторами как с компонентами кватернионов.

Напомним, что кватернионом называется объект, состоящий из четырех компонент: одного действительного скаляра и трех мнимых составляющих вектора, причем каждой декартовой координате приписывается своя мнимая единица. Таким образом, вместо одной обычной мнимой единицы i, характеризуемой свойством $i^2=-1$, вводится три i, j, k $(i^2=j^2=k^2=-1)$, их различие между собой определяется попарной некоммутируемостью, а именно $ij=k=-ji$, $jk=i=-kj$, $ik=-j=-ki$ [11].

Сейчас мы понимаем, что привлечение кватернионов удобно упрощает вычисления, связанные с некоммутирующими величинами, например, при трехмерных вращениях, теория которых была заложена еще Эйлером. Но в максвелловские времена люди не обращали внимания на такие тонкости, и кватернионика Гамильтона считалась нечто вроде символа обособления гордой ирландской самобытности. А Максвелл принял ее в качестве рабочего инст-

[7] Описание послетрактатной истории максвелловской электродинамики в той ее части, которая связана с именем Хевисайда, приведено в книге Б. М. Болотовского [9], к которой мы отсылаем читателя.

румента и приспособил обслуживать фарадеевские поля, ибо кватернионика позволяла установить правила не только сложения, но и умножения векторов, а следовательно, открывала путь к построению векторного дифференциального исчисления. Действительно, если рассматривать векторное поле **A** (A_α, $\alpha = 1, 2, 3$ — индексы соответствуют номерам координатных осей) как векторную *часть* кватерниона $\mathfrak{A}$ (следуя Максвеллу, снабжаем кватернионы готическими обозначениями), то произведение двух чисто векторных кватернионов (их иногда называют ассоциированными) $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$, выполненное с учетом правил коммутации i, j, k, будет содержать векторную *часть* (Максвелл обозначает ее $V\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) и скалярную *часть* ($S\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}$), и ничего более. Судя по воспоминаниям [10], Гамильтон очень гордился этим результатом и имел к тому основания.

В современном представлении через действительные проекции произведение векторов A_α и B_β в общем случае выглядит как симметричный диадный тензор $A_\alpha B_\beta$. По известной теореме приведения он может быть разложен на три «элементарных» (неприводимых) группы: группу скаляров $A_\alpha B_\alpha$ $\left(\text{по дважды встречающимся индексам производится суммирование } \widehat{\alpha,\alpha} \equiv \sum_{\alpha=1}^{3}\right)$, группу векторов (псевдовекторов) $e_{\alpha\beta\gamma}AB_{\beta\gamma}$ ($e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор) и группу симметричных тензоров с нулевым следом $\left(A_\alpha B_\beta + A_\beta B_\alpha - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}A_\alpha B_\beta\right)$; $\delta_{\alpha\beta}$ — единичный симметричный тензор; последняя группа повышает ранг описания *векторных* полей и потому «не задействована» в формулировке скалярных и векторных уравнений электродинамики (во всяком случае применительно к неэкзотическим ситуациям). Кватернионная операция умножения векторов производит это отметание тензоров второго ранга автоматически.

Этими несколько подробными сопоставлениями векторных действительных и векторных кватернионных манипуляций мы, с одной стороны, дополняем информацию п. 2 об обозначениях «Трактата», а с другой — хотим отметить высокое качество принятой в нем терминологии, в определенном смысле более адекватной существу дела, чем наша. В самом деле, скалярная *часть* произведения векторов

$$S\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \to \mathbf{AB} = A_\alpha B_\beta$$

и векторная *часть* произведения векторов

$$V\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \Rightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{B} \to e_{\alpha\beta\gamma}A_\beta B_\gamma$$

лингвистически последовательнее отражают существо теоремы приведения, чем наши в общем-то жаргонные обороты «*скалярное* и *векторное произведения*».

Конечно, сейчас большинство из нас является приверженцами описания скалярных и векторных полей в действительных переменных, считая его нагляднее кватернионного. Но ведь наглядность — свойство человеческое — прививаемое и воспитываемое. А по строгости оба подхода равноправны.

Далее Максвелл, тоже вслед за Гамильтоном, вводит оператор дифференцирования $\nabla = i\,\frac{\partial}{\partial x_1} + j\,\frac{\partial}{\partial x_2} + k\,\frac{\partial}{\partial x_3}$. Собственно говоря, это и есть истинный опе-

ратор Гамильтона, а наш модифицированный вариант «набла» приспособлен к действительным переменным и не содержит комплексных факторов i, j, k. С помощью этого оператора образуются три новых математических образа: градиент скаляра ($\nabla \cdot \varphi$), ротор или вихрь вектора

$$V \cdot \nabla\mathfrak{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta A_\gamma$$

и конвергенция (равная дивергенции с обратным знаком)

$$-S \cdot \nabla\mathfrak{A} = -\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_\alpha A_\alpha,$$

а также соответствующие операции второго порядка, важнейшая из которых

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha},$$

эквивалентна «нашему» лапласиану с противоположным знаком.

Важность этого математического языка несомненна. Без него уравнениям поля не удалось придать бы столь универсального охвата. Так что второе открытие Максвелла в «одушевленной части» природы было связано с кватернионикой Гамильтона, и оно произошло тоже, как и в случае Фарадея, вопреки общепринятым мнениям профессионалов. Конечно, Максвелл не довел этот аппарат до современного автоматизма, базирующегося на небольшом числе векторных тождеств, с которыми сейчас быстро осваиваются студенты, но это не умаляет его общей заслуги. Тем более что он пошел в определенном смысле дальше. Ведь его цель состояла в придании аналитического представления идеям Фарадея, а тот видел поля, как целостные электрические и магнитные «пейзажи», что было адекватно лишь крупномасштабной топологии. И в этом случае Максвеллу опять «повезло»: его снова «поджидал» практически завершенный аппарат интегральных теорем, известных нам как теоремы Гаусса — Остроградского и Стокса, который позволил написать уравнения электромагнитного поля в интегральной форме. Правда, в отличие от дифференциальных, эти уравнения не собраны воедино в «Трактате», а разбросаны по специализированным главам. Но, как следует из Предварительной главы, Максвелл намеревался систематизировать свои топологические идеи на базе критериев перифрактичности, характеризующих трехмерные многосвязные области.

К сожалению, нам не дано восстановить ход его замыслов. И поэтому, вероятно, некоторые фрагменты рассуждений на эти темы мы принимаем скептически. Например, Максвелл различает векторные поля двух типов — потоковые (пронизывающие поверхности, «ассоциируемые» с ними) и силовые (направленные вдоль линий , «ассоциируемые» с линиями). Такая классификация кажется нам отчасти ситуационной: она, с нашей точки зрения, выполняла функцию наведения, т. е. помогла Максвеллу связать между собой изменения электрических и магнитных полей в пространстве и во времени, но не более того. Формулируя закон индукции Фарадея в интегральной форме

$$\oint_l \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$$

(всюду, где не оговорено иное, мы пользуемся в Послесловии гауссовыми единицами и стандартной современной символикой), Максвелл различал общетопологические свойства конфигураций, образованных полями E, H (работает только их вихревая часть, закручиваемая вдоль замкнутых линий) и полями, пронизывающими поверхность, ограничиваемую этим контуром. Отсюда вытекала максвелловская классификация, касающаяся потоковых и силовых векторов. К числу линиеподобных векторов Максвелл относил **E**, **H**, вектор-потенциал **A** и т. п., а к потоковым векторам — **B**, **D**, плотность электрического тока **j** и т. п. Но, уже придя к уравнениям материальных связей в виде $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, он признал равноправие векторных полей обоих типов, в том числе и топологическое равноправие.

Следующий этап состоял в использовании всего перечисленного выше идейного и технического оснащения для установления наиболее общих закономерностей электромагнетизма. Сотни, а может быть, и более работ посвящены изучению фактических и предполагаемых путей, которым следовал или мог следовать Максвелл при продвижении к своим Великим Уравнениям [8].

Прежде всего у него на вооружении был принцип близкодействия, в согласии с которым все возмущения (а значит, и электрические — магнитные — тоже) должны передаваться в пространстве с конечной скоростью и территориально последовательно — от одного элемента пространства (среды) к другому, прилегающему к нему (adjacent). Это означало, что соответствующий математический аппарат должен был опираться на дифференциальные (а не на разностные или дифференциально-разностные) уравнения в *частных* производных по координатам и времени.

После этого он записал все известные до него законы электромагнетизма в форме таких уравнений. И сделал решающий шаг, дополнив их током смещения. Что же побудило его к этому? Вопрос становится уже отчасти «легендарным» в том смысле, что ответ на него обрастает историческими легендами. Совсем непросто вжиться в предыдущую эпоху из последующих: невольно прокрадывается стремление придать ходу истории большую целеустремленность и последовательность, чем она может себе позволить сама. В итоге возникают различные реконструкции, использующие методику и логику уверенного в своей правоте будущего. Вполне возможно, что Максвелл привлекал все доводы, какие были вскрыты или допридуманы потом в научно-исторических исследованиях, но одни из них играли роль первичных догадок, а другие — проверок на внутреннюю непротиворечивость и на внешнюю совместимость с общими законами природы.

Вероятно, его внимание привлекало простейшее модельное рассуждение, опирающееся на аналогию с «верной» Динамикой. Оно состояло в необходимости возникновения реального смещения «зарядоносителей» под действием силовых полей. Отсюда и эта терминология из теории упругости: вектор электрического

[8] Во время подготовки русского перевода «Трактата» вышел сборник статей «Максвелл и развитие физики XIX—XX веков» [15], где содержится обильный материал, связанный с историей максвелловских открытий в электродинамике. В частности, в статье Б. И. Спасского разбираются различные варианты рассуждений, к которым фактически или предполагаемо прибегал Максвелл. Далее мы придерживаемся при обсуждении этих вопросов только «Трактата», хотя исторически вполне вероятно, что введение тока смещения было первоначально инициировано аналогиями с механическими упругими деформациями среды в духе первых максвелловских работ. Об этом Б. И. Спасский пишет очень убедительно.

смещения, ток смещения (тоже электрического, ибо соответствующая ему величина в магнетизме оставлена безымянной). Затем допустимо думать, что были привлечены размышления о прохождении электрического тока по последовательной цепи проводник — емкость, когда условия непрерывности изменения окружающего магнитного поля вдоль цепи вынуждают ввести какое-то продолжение тока проводимости внутри конденсатора.

Далее, может быть, уже на уровне контроля возникла формально математическая потребность привести нововведение в непротиворечие с уравнением непрерывности для тока, что тоже удачно сочеталось с модельной картинкой, заимствованной из аналогии с механикой непрерывных сред. Был еще один путь получения правильных уравнений — их симметризация. Максвелл тщательным образом сделал все необходимые для этого заготовки, фактически сформулировав принцип дуальности (двойственности) электрических и магнитных полей в статическом приближении, но никаких слов о распространении этого принципа на изменяющиеся во времени поля в «Трактате» нет. Возможно, это чисто случайный пробел, и тогда он был бы наверняка восполнен при следующей правке «Трактата», но возможно и другое — Максвелл не пошел на введение каких-то фиктивных магнитных токов, поскольку они не укладывались ни в какие модельные представления. А ведь он был поборником модельной физики и, по-видимому, должен был представить себе модельно все, что умел понять.

Наконец, если не держаться только явных свидетельств, содержащихся в «Трактате», то следует иметь в виду и такие поступательно-возвратные поисковые движения мысли, как подгонка исходных положений теории для получения законов, ведущих к разумным толкованиям наблюдаемых эффектов. Действительно, историческое реконструирование сходно с составлением сценария по законченному и отснятому фильму, а творческий процесс может включать в себя фрагменты, не попавшие в итоговые кадры. Скажем, стремясь соединить (по программе Фарадея) электромагнетизм с волновой оптикой, можно было отправляться от волнового уравнения для полей (или потенциалов) и надлежащим образом подправить систему уравнений первого порядка.

И все же аналоговый подход был для Максвелла, наверное, самым важным подкреплением чувства правоты. Как уже говорилось выше, «Трактат» являет собой произведение, почти очищенное от динамического оснащения, хотя и с ярко выраженным динамическим прошлым. В нем просматриваются две функции, исполненные Великой Наукой Динамикой. Первая состоит в установлении взаимных аналогий между гидродинамикой и электродинамикой, что не только не утратило, но и повысило свое значение впоследствии. В современном понимании Максвелл предложил принципиальные схемы построения аналоговых машин, причем сделал это не так, как обычно делается сейчас на основе общности математического описания, а наоборот — в предварении составления уравнений, как раз и получая свои уравнения из соображений физического сродства явлений. Привычность нашего обращения с аналогами, возможно, притупляет неочевидность максвелловского достижения. Тем более что потом направление этой аналогии изменило знак: для понимания и интерпретации явлений различной природы (в том числе и явлений динамических) теперь обычно уже используются электродинамические системы благодаря их доступной осуществимости и простоте интуитивных представлений.

С другой стороны, ориентация на Динамику выполняла еще одну функцию — функцию установления единства взглядов на устройство мира. В те времена Динамика была единственной областью физики с логически замкнутым описанием (постулаты → измерения — правила → измерения → выводы → измерения → постулаты) и сопоставление с ней давало некоторую страховку в том, что новая теория не войдет в противоречие с некоторыми общими физическими принципами (например, и прежде всего, законами сохранения), а это на начальном этапе было еще не так-то просто сделать напрямик. В таком объединении взглядов на гидродинамику и электродинамику Максвелла поджидал еще один успех. По аналогии с механикой он построил функцию Лагранжа для электромагнитных процессов [9] (которая в случае электромеханических систем получила известность потом как функция Лагранжа — Максвелла). Похоже на то, что он и сам недооценил общефизического значения этого достижения. Ведь фактически этим был проторен путь познания любого вида взаимодействия, для осторожности скажем, неживой природы.

Руководствуясь разумными доводами (например, поведениями представительных моделей в представительных условиях или соображениями симметрии, инвариантности и т. п.), можно попытаться угадать вид функции Лагранжа, а затем испытать ее на верность по стандартной схеме: уравнения движения — интерпретация — сравнение с экспериментом. Эта схема позволила, в частности, проникнуть в физику калибровочных полей. Она выглядит настолько естественной, что даже не ассоциируется с именем Максвелла,— предельный случай полного признания, когда авторство утрачивается в силу общечеловеческой значимости, как при изобретении колеса.

5. Уравнения поля

«Теория Максвелла — это уравнения Максвелла». Эта часто цитируемая оценка принадлежит Герцу [4]. В ней есть лозунговая экстремальность — она выставляет независимость ценности правильного результата от поисковых блужданий. Конечно, в «Трактате» обсуждается еще и множество разнообразнейших проблем разной степени важности и общности, но уравнения электродинамики, сосредоточенные в п. 591—603, несомненно являют собой их кульминацию. Фактически уравнения были найдены задолго до первого издания «Трактата» и опубликованы в 1861—1862 гг. Но это не ослабляет волнения, охватывающего при знакомстве с ними в «Трактате», наверное, из-за возможности следовать шаг за шагом максвелловским путем приближения к ним.

К счастью, Максвелл избежал участи некоторых других первооткрывателей— ему не пришлось бороться за приоритет. Уравнения были неожиданны и не сразу поняты. Многие другие исследователи, занятые аналогичными делами, т. е. разви-

---

[9] Как обычно, Максвелл в своих рассуждениях отправляется от модели. Здесь это была модель квазистационарного LC-контура с пространственно разделенными полями. Но найденная им функция Лагранжа в выражении через поля правильна в самом общем случае, т. е. максвелловская модель дала верный ответ даже вне предела своей пригодности. Это произошло потому, что в ней фактически соблюдено уравнение непрерывности тока (ток в L-ветви равен производной от заряда в C-ветви), что, как известно, почти автоматически дополняет уравнения электродинамики током смещения.

вающие свои варианты теории, не восприняли достижения Максвелла как решающие и тем более как завершающие. Одной из причин, наверное, было привлечение образной, фарадеевского толка аргументации, о чем уже несколько раз говорилось выше. Это отпугивало, по крайней мере, некоторых континентальных физиков. Как ни странно, но такая территориальная поляризация наблюдалась на самом деле: немецкая и французская наука была более привержена рассудочному, аналитическому способу познания, чем британская,— тяготевшая к образным, геометрическим методам. И шло это традиционно еще со времен Великого Противостояния дифференциалов Лейбница и флюксий Ньютона. Вообще написанные Максвеллом уравнения показались «конкурентам» неубедительными и неубедительно обоснованными. И они не приняли их за фундаментальные исходные законы, по существу не нуждающиеся в почленной аргументации и не подлежащие выводу из иерархически более элементарных (такая потребность возникла позже в процессе создания квантовой теории поля).

Другими причинами были, видимо, изобилие этих уравнений, непривычный их облик и еще неполная очищенность от некоторых частностей (подробности — чуть позже). Максвелл писал: «Эти соотношения можно считать основополагающими. Их можно было бы скомбинировать так, чтобы исключить некоторые из величин. Однако наша задача сейчас состоит не в получении компактных математических формул, а в написании выражения для каждого соотношения, о котором мы что-либо знаем. На этой стадии исследования исключение любой величины, отражающей полезную идею, было бы скорее потерей, чем выигрышем» («Трактат», п. 615).

Представленная Максвеллом итоговая система уравнений (а в ней присутствовали уравнения и для полей, и для потенциалов, и материальные связи, и выражения для сил) была внутренне непротиворечива, так что решение вопроса об излишествах действительно отступало пока на второй план: все это уладилось позже при формулировке и доказательстве теорем единственности (и существования, конечно). Первостепеннее стояла проблема полноты и замкнутости (и достоверности, конечно). По этому поводу Максвелл не позволил себе высказывать какие-либо общие сентенции, но привел несколько простейших решений для предъявления экспериментаторам. Как мы знаем, все контрольные эффекты, предложенные самим Максвеллом (а также несколькими поколениями исследователей позже), прошли обоснованную экспериментальную экспертизу, в том смысле, что были подтверждены в пределах точности, с которой макроскопическая электродинамика оказалась вообще справедливой.

Далее мы проведем сопоставление сводных уравнений электродинамики, содержащихся в «Трактате», с уравнениями Максвелла в их современном представлении. Для этого воспроизведем формульную часть п. 618 (этот параграф имеет название «Кватернионные выражения для электромагнитных уравнений») и рядом с каждой трактатной формой поместим соответствующее ей выражение в обозначениях, принятых теперь с использованием гауссовой системы единиц [10].

---

[10] В «Трактате» сводные уравнения помечены не цифрами, а прописными буквами латинского алфавита и тем выделены от рядовых формул. Правда, три уравнения вообще никак не означены: для них мы ввели малые греческие буквы (α), (β), (γ).

Уравнение для магнитной индукции

$$\mathfrak{B} = V \cdot \nabla \mathfrak{A},$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{A}$$

B — магнитная индукция, **A** — вектор-потенциал (электрический)

Уравнения для электродвижущей напряженности

$$\mathfrak{E} = V \cdot \mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi,$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}\, \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \tag{B}$$

E — напряженность электрического поля, φ — скалярный потенциал (электрический), **u** — скорость контура или системы отсчета, c — скорость света в вакууме.

Уравнение для механической силы

$$\mathfrak{F} = V \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{B} + e\mathfrak{E} - m\nabla\Omega,$$
$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\, \mathbf{j}^e_{\text{пол}} \times \mathbf{B} + \rho^e \mathbf{E} - \rho^m \nabla \Psi, \tag{C}$$

f — объемная плотность силы, $\mathbf{j}^e_{\text{пол}} = \mathbf{j}^e_{\text{пр}} + \mathbf{j}^e_{\text{см}}$ — плотность полного (истинного электрического тока, $\mathbf{j}^e_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости, $\mathbf{j}^e_{\text{см}}$ — плотность тока смещения, ρ^e — плотность электрического заряда, ρ^m — плотность магнитного заряда, Ψ — скалярный потенциал (магнитный).

Уравнение для намагничения

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I},$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \tag{D}$$

B — магнитная индукция, **H** — напряженность магнитного поля, **M** — вектор намагничения.

Уравнение для электрических токов

$$4\pi\mathfrak{C} = V \cdot \nabla \mathfrak{H},$$
$$\frac{4\pi}{c}\, \mathbf{j}^e_{\text{пол}} = \nabla \times \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{H}. \tag{E}$$

Уравнение для токов проводимости

$$\mathfrak{K} = c\mathfrak{E},$$
$$\mathbf{j}^e_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}, \tag{G}$$

σ — проводимость среды.

Уравнение для электрического смещения

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} k\mathfrak{E}, \qquad (\alpha)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

ε — диэлектрическая проницаемость.

Уравнение для истинного тока

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}} = \left(c + \frac{1}{4\pi} k\right)\mathfrak{E}, \qquad (H),\ (I)$$

$$\mathbf{j}^e_{\text{пол}} = \mathbf{j}^e_{\text{пр}} + \mathbf{j}^e_{\text{см}} = \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}.$$

Уравнение для электрической объемной плотности

$$\mathfrak{e} = S \cdot \nabla\mathfrak{D}, \qquad (J)$$

$$4\pi\rho^e = \nabla \cdot \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{D}.$$

Уравнение для электрической поверхностной плотности $\rho^e_{\text{пов}}$

$$4\pi\rho^e_{\text{пов}} = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1), \qquad (K)$$

$\mathbf{n}_{1,2}$— нормаль к поверхности из среды 1 в среду 2.

Уравнение для намагничения

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}, \qquad (L)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

μ — магнитная проницаемость.

Уравнение для магнитной плотности

$$\mathfrak{m} = S \cdot \nabla\mathfrak{J}, \qquad (\beta)$$

$$\rho^m = -\operatorname{div} \mathbf{M} = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

Уравнение для магнитной силы (когда rot **H**=0)

$$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega, \qquad (\gamma)$$

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi.$$

Итак, перед нами совокупность сводных уравнений (A) — (γ), и мы в состоянии оценить их совершенство и правильность с позиций нашего понимания. Вообще говоря, она отличается от системы, впоследствии канонизированной как система уравнений Максвелла. Но за малыми исключениями отличия скорее методические, а не принципиальные. Прежде всего совокупность (A) — (γ) по-другому организована; и в этом, и в некоторых ее деталях еще проглядываются следы моделей, принимавших участие в процессе поиска. Это те самые строительные леса, отмеченные ранее Максвеллом — с признательностью за оставление их — в трудах Фарадея, и выходит, что не по недосмотру сохраненные теперь им

самим. Кроме того, при перегруженности системы (A) — (γ) в ней есть известная незавершенность: в частности, не проведено несколько «напрашивающихся» обобщений, даже из числа уже подготовленных и обсужденных в тексте. И мы обязаны Дж. Дж. Томсону, Г. Герцу, О. Хевисайду и Х. Лоренцу тем, что именно они оказались доброжелательно вдумчивыми последователями, сумевшими первыми осознать непреходящее значение этих уравнений и довести их до того общего по смыслу и изящного по форме состояния, которое в наше время принимается за образец физической теории.

Опуская промежуточные этапы и мотивировки действий, приведем систему уравнений Максвелла в ее усовершенствованном представлении. Потом были предложены, возможно, более удачные (в отношении компоновки, объединения, обобщений, классификации по типам симметрии и инвариантности и т. п.) варианты записи [12], но данная форма (лишь слегка подправленная позже) остается и по сей день одной из наиболее употребительных:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{e}_{\text{пр}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho^{e}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\qquad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\qquad \mathbf{j}^{e}=\sigma\mathbf{E}^{e}, \qquad (5)$$

$$\mathbf{f}_{\text{мех}}=\rho^{e}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{j}^{e}_{\text{пр}}\times\mathbf{B}. \qquad (6)$$

Причем даже порядок расстановки уравнений настолько прижился, что в «определенных кругах» (кастовость тут тоже регламентируется научным происхождением) часто говорят, «как следует из первого, второго и т. д. уравнения Максвелла», считая, видимо, перенумерацию отступничеством от Заветов Учителя, хотя легко усмотреть из сравнения (A) — (γ) с (1) — (6), что все это дело рук Апостолов, а не Его самого.

Сейчас принимается такая классификация. Уравнения (1) — (4) — собственно уравнения электромагнитного поля. Уравнения (5) — материальные уравнения (в их простейшей разновидности — линейная изотропная среда с локальными и мгновенными взаимодействиями — без дисперсии). Сторонние поля $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ могут быть включены в (5) или вставлены прямо в (1) — (4). Уравнение (6) выражает силу, действующую на свободные заряды и токи; через него осуществляется метрологическая связь с полями другой природы (механикой, гравитацией). Иногда (6) заменяется законом сохранения энергии, но тогда приходится делать оговорки, преждевременные на стадии постулирования общих законов движения.

Уравнения для полей (1) — (4) разбиваются на две пары: (1) и (4) выражают поля через их источники — электрические заряды и токи, а (2) и (3) источников не содержат, это автономная пара уравнений, определяющая связь между **E** и **B**, причем универсально, вне зависимости от материальных соотношений и от свойств источников. Так вот, источниковые уравнения (1) и (4) написаны Максвеллом сразу в «окончательном виде», принятом потом. Это соответственно (E) и (J). В них

скрыто содержится и уравнение непрерывности для токов проводимости (или конвекции)

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^e + \frac{\partial \rho^e}{\partial t} = 0. \qquad (7)$$

Его Максвелл не вставляет в эту совокупность, что не означает, однако, что он не относит его к числу основополагающих. Более того, отсутствие в системе (A) — (γ) уравнения непрерывности, возможно, даже обусловлено вполне последовательными доводами: Максвелл считал его более общим, так сказать, надэлектродинамическим законом природы.

Другая автономная пара (2) и (3) представлена в «Трактате» иначе. Во-первых, Максвелл ввел в (B) проводящий контур, движущийся со скоростью $\mathbf{u}$ относительно других неподвижных элементов системы (среды), что позволило ему установить (так сказать, попутно, заодно) закон преобразования полей при переходе в движущуюся (инерциальную) систему отсчета (в нерелятивистском приближении, однако). Это и есть остаточный след модели. Его легко устранить, положив $\mathbf{u}=0$ (редкая ситуация, когда частный случай инициирует более общие соотношения!). Во-вторых, Максвелл не прибегнул к форме (2), (3), а как бы, опустив ее (возможно, даже и не заметив этого), сразу выдал решение: уравнения (2), (3) тождественно удовлетворяются, если представить **E** и **B** через потенциалы **A**, φ, рассматриваемые пока как произвольные функции координат и времени:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (8)$$

При $\mathbf{u}=0$ (8) точно совпадает с (A) и (B). Фактически Максвелл вышел на соотношения (8) путем последовательных обобщений разных модельных ситуаций. Но тем сильнее, как нам кажется, мы должны проникнуться чувством преклонения перед таинственной силой (в смысле мощи интуиции) Великого Ума: Максвелл нашел функциональное решение уравнений, минуя сами уравнения [11], причем нашел в самом общем виде, и вдобавок в таком, который подсказал еще один, иной и по-иному содержательный подход к описанию электромагнитных полей вообще. Уравнения (2), (3) были явно выписаны О. Хевисайдом, и Дж. Дж. Томсон успел вставить их в примечания к 3-му изданию «Трактата» (см. примеч. к п. 598).

Конечно, уравнения (1) — (4) и их прообразы в «Трактате» предполагают дифференцируемость всех встречающихся в них полей. Правда, каждому дифференциальному уравнению может быть поставлено в соответствие интегральное уравнение, где это ограничение на поля снимается. Максвелл отводил такому описанию (как уже отмечалось, обладающему большим сродством с полевыми представлениями Фарадея) важную роль в формировании науки, посвященной топо-

[11] Впрочем, вопрос этот не решается однозначно. В «Трактате» решения (8) и в самом деле написаны без уравнений (2), (3), однако в одной из ранних своих работ [7] Максвелл выписал второе уравнение в явном виде, а потом почему-то отнес его к производным, а не основным уравнениям. В сборнике [15] имеется очень содержательная статья Н. Т. Маркчева, где дается сводка и сравнение всех разновидностей систем уравнений электродинамики в их исторической последовательности от трех максвелловских до многочисленных (хотя и тоже не всех) после.

логии векторных (а затем уже и тензорных любого ранга) полей (в отношении полей электромагнитных в этом деле еще и сейчас есть изрядные недоработки). Но, несмотря на большую общность, в сводном перечне уравнений в «Трактате» интегральная запись не фигурирует, а должные замечания по этому поводу рассеяны по разным разделам текста. Пока еще Максвелл искал принципиально правильные связи и только после получения доказательств их правильности должен был возникнуть следующий вопрос — установление *наиболее общих* правильных связей. А аппарат для решения этого вопроса был уже наготове. Более того, он включил в основную совокупность уравнений (K), которое мы интерпретируем сейчас как граничное условие — условие, определяющее закон перехода полей (в данном случае нормальных компонент D) через границу раздела сред (в данном случае через заряженную поверхность) и которое, строго говоря, вытекает из интегрального соотношения, обобщающего (4):

$$\oint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi \int_V \rho\, dV,$$

где замкнутая поверхность S охватывает весь объем V. Таким образом, можно думать, что Максвелл временно отложил обсуждение вопроса о справедливости общих интегральных уравнений для электромагнитных полей и соответственно об общих условиях скачкообразного или непрерывного перехода разных компонент разных полей через резкие границы раздела сред [12].

Вторая группа уравнений, представляющая материальные связи, фактически не подвергалась никаким изменениям и выглядит вполне по-современному: (5) совпадает с (α), (L), (G) с точностью до обозначений. При этом Максвелл не ставил целью установление каких-то общих связей, ограничившись простейшими. Чуть позже, в главах XX—XXI, он расщирит возможные свойства сред, включив анизотропию (зависимость от направления) и оговорив дисперсию (зависимость от частоты). Важно отметить, что в этом простейшем наборе связей не сделано ни опущений, ни излишеств, а названо ровно столько соотношений, сколько необходимо для замыкания всей системы уравнений. Проблема замыкания и в наше время доставляет кое-какие беспокойства [13], так как для различных способов описания электромагнитных полей требуются разные независимые функции, причем одни из них могут быть вспомогательными («скрытыми от измерений»), а другие физически адекватными измеряемым величинам. Система (1) — (4) содержит $3\times5=15$ скалярных величин, подлежащих определению; это компоненты векторов **E**, **D**, **H**, **B** и $\mathbf{j}^e$ (заряд ρ^e всюду, кроме идеальной электростатики, находится по известному распределению токов $\mathbf{j}^e$). Попарные подсистемы (2), (3) и (1), (4) налагают каждая только по три (а не четыре!) связи на искомые вектора. В самом деле: из (2) — (3) шесть компонент векторов **E** и **B** выражаются

[12] В переписанной Максвеллом для второго издания Предварительной главе (именно в таком виде она фигурирует в данном переводе) вопросу о свойствах разрывных функций уделено специальное внимание. А эта глава — подготовительная, в какой-то мере способствующая раскрытию замыслов автора. Более того, и в электростатике, и в магнитостатике, и в теории стационарных токов постановка краевых задач для потенциалов (и полей) обсуждается на самом строгом уровне, так что гипотеза, по которой Максвелл не упустил из виду, а отложил написание сводных интегральных уравнений и краевых условий, имеет достаточные основания.

через три компоненты **А** и скаляр φ, но последние благодаря градиентной инвариантности еще допускают введение одной скалярной функции f, которой можно распорядиться произвольным образом. Напомним, что градиентной (или калибровочной) инвариантностью называется независимость векторов **Е** и **В** относительно преобразования потенциалов

$$\mathbf{A}' \to \mathbf{A} - \nabla f, \qquad \varphi' \to \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{9}$$

В результате система (1) — (4), содержащая 15 скалярных величин, фактически производит только шесть независимых ограничений первого порядка. И следовательно, для ее замыкания требуется еще девять связей; как раз именно столько выдают материальные соотношения (5).

Обращение к потенциалам, заметим, оказалось и здесь — при оценке условий замыкания системы уравнений поля — продуктивной необходимостью, так как без максвелловского представления (8) вряд ли возможно было установить инвариантное преобразование (9). В таком явном окончательно оформленном виде оно не встречается в «Трактате», хотя в процессе выхода на уравнения (8) Максвелл неоднократно обсуждает вопросы о неоднозначности введения скалярного и векторных потенциалов порознь.

Осталось обсудить наиболее трудное место, связанное с выводом выражения для механической силы (С). То, что в (С) наряду с членом, описывающим силу, действующую на токи, входит одновременно еще и член, соответствующий силе, действующей на фиктивные магнитные заряды, с помощью которых можно заменить (с известными оговорками) действие замкнутых токов, не должно приводить к недоразумениям: нужные пояснения сделаны в соответствующих параграфах «Трактата», относящихся к магнитостатике. Но обобщение равноправности такого подхода на произвольно текущие во времени процессы требует все же некоторых дополнений.

Постольку поскольку магнитные заряды рассматриваются как вспомогательные величины, вводимые ради методических удобств, то не имеет смысла говорить и о плотности механической силы, действующей на них со стороны поля, как о величине физически измеряемой, однако можно утверждать, что суммарная (интегральная) сила на всю систему токов проводимости будет совпадать с силой на эквивалентные им магнитные листы. Причем если в силе, действующей на токи, фигурирует вектор магнитной индукции, то в силе на магнитные заряды «занят» вектор напряженности магнитного поля **Н**. По существу, это равносильно тому, что, так сказать, «будущий» принцип двойственности, т. е. принцип инвариантности уравнений поля относительно дуальной замены $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$, $\rho^e \to \rho^m$, $\mathbf{j}^e \to \mathbf{j}^m$, $\rho^m \to -\rho^e$, $\mathbf{j}^m \to -\mathbf{j}^e$, справедлив также и в своем силовом проявлении. Останется ли такая дуальность справедливой при воздействии на «реальные» магнитные монополи, если таковые все-таки будут найдены в природе, по-видимому, нельзя разрешить внутри собственно максвелловской электродинамики, а в прогностических теориях неоспариваемой ясности нет вплоть до настоящего времени [14].

Однако дуальность заведомо должно быть соблюдена при чисто абстрактном использовании магнитных зарядов, основанном на переопределении токовых источников поля по правилам (β): $\rho^m = -\operatorname{div}\mathbf{M}$, где **М** — вектор намагничения,

отыскиваемый как одно из возможных решений интегрального уравнения вида

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\int\limits_V \mathbf{j}^e_{\text{пр}}\times\mathbf{r}\,dV=\int\limits_V \mathbf{M}\,dV,$$

что отвечает двум рецептам введения магнитного момента: для системы токов и для системы зарядов.

Таким образом, в выражении (С) нет излишеств, но приведено одновременно два выражения для силы, действующей на токи или на магнитные заряды в зависимости от предпочитаемого описания фактических источников магнитного поля. Однако, строго говоря, при зарядовом описании в уравнение (С) должен быть введен еще один член, связанный с появлением магнитных токов. Действительно, по смыслу введения магнитных зарядов в уравнения поля как источников этого поля (фиктивных или реальных) они должны удовлетворять закону сохранения, и, значит, любое изменение во времени плотности ρ^m сопровождается подтеканием или оттеканием магнитного тока (фиктивного или реального) с плотностью $\mathbf{j}^m$:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^m=-\frac{\partial\rho^m}{\partial t}. \qquad (10)$$

Уравнение непрерывности (10) двойственно ($\mathbf{j}^e\to\mathbf{j}^m$, $\rho^e\to\rho^m$) уравнению непрерывности (7). И потому последовательный учет принципа двойственности в задаче о механическом действии электромагнитного поля на источники (строго говоря, конечно, на «носители источников») должен в общем случае дополнить (С) членом $\frac{1}{c}\,\mathbf{j}^m\times\mathbf{D}$.

И, наконец, последнее замечание, также относящееся к выражению (С). В той части силы, которая определяет воздействие поля на токи (строго говоря, конечно, на носители токов), Максвелл оперирует не с током проводимости, а с истинным током, дополнительно содержащим еще и ток смещения. Это отличает соотношение (С) от используемого нами теперь. Разница обусловлена несколько иным определением понятия силы (во-первых) и отсутствием еще одного члена, двойственного члену с электрическим током смещения (во-вторых). Поскольку вопрос представляет не только исторический интерес, остановимся на нем подробнее. Без ущемления сути дела в целях сокращения формул положим сразу $\varepsilon=1$, $\mu=1$, т. е. будем рассматривать силы, действующие на заряды и токи в вакууме.

Закон сохранения импульса в этом случае принимает вид

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}=\mathbf{f}_{\text{мех}}, \qquad (11)$$

где

$$\mathbf{f}_{\text{мех}}=\rho^e\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{j}^e_{\text{пр}}\times\mathbf{H},\quad \mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H},$$

$$\overleftrightarrow{T}\to T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta+H_\alpha H_\beta)-\frac{1}{8\pi}\,\delta_{\alpha\beta}(E^2+H^2).$$

Здесь $\mathbf{g}$ — плотность электромагнитного импульса, $T_{\alpha\beta}$ — тензор напряжения, дающий поток импульса (втекающий, а не вытекающий, внутрь объема, где находятся источники — отсюда и различие в знаках по сравнению с обычной записью

законов сохранения). Соотношение (11) может быть переписано в несколько ином виде, если ввести понятие «обобщенной» силы, включающей в себя наряду с обычной механической (по нашей терминологии — лоренцовой) силой еще и изменение электромагнитного импульса

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{T} = \mathbf{f}_\Sigma = \mathbf{f}_{\text{мех}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} =$$
$$= \rho^e \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}^e_{\text{пр}} \times \mathbf{H} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}^e_{\text{см}} \times \mathbf{H} + \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{12}$$

Сравнивая выражение для $\mathbf{f}_\Sigma$ в (12) с максвелловской формулой (C) (где для однозначности подхода нужно сразу же положить $\rho^m = 0$), нетрудно обнаружить, что они отличаются только наличием дополнительного члена в (12)

$$\frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\,\mathbf{j}^m_{\text{см}} \times \mathbf{E}, \tag{13}$$

которому может быть придан вид, сходный с лоренцовым, если ввести условно «магнитный ток смещения»:

$$\mathbf{j}^m_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Следовательно, формулы (11) или (12) допускают такую дуально симметричную запись:

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{T} = \mathbf{f}_\Sigma = \rho^e \mathbf{E} + \rho^m \mathbf{H} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}^m_{\text{пол}} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}^e_{\text{пол}} \times \mathbf{E}.$$

Причина отсутствия у Максвелла добавочного члена (13) отчасти раскрывается в п. 641—643, где он выводит выражение для механической силы, дифференцируя тензор напряжений (его магнитную часть), и проводит соответствующие обобщения на переменные во времени процессы. Воспроизведем это вычисление в наших обозначениях. Если в магнитостатике задан тензор $T^m_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} H_\alpha H_\beta - \frac{1}{8\pi}\delta_{\alpha\beta} H^2$, то его дивергенция равна

$$\frac{\partial T^m_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_\beta} H_\alpha H_\beta - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\delta_{\alpha\beta}\mathbf{H}^2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{4\pi} H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{1}{8\pi}\nabla_\alpha \mathbf{H}^2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla) H_\alpha + \frac{1}{4\pi} H_\alpha \operatorname{div}\mathbf{H} - \frac{1}{8\pi}\nabla_\alpha \mathbf{H}^2. \tag{14}$$

Здесь по дважды встречающимся индексам проводится суммирование $\widehat{\beta\beta} \to \sum_{\beta=1}^{3}$. Приняв во внимание тождество

$$\nabla \mathbf{H}^2 = 2(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + 2\mathbf{H} \times \operatorname{rot}\mathbf{H},$$

можно соотношению (14) придать окончательный (для случая магнитостатики) вид:

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{T}^m = -\frac{1}{4\pi}\,\mathbf{H} \times \operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,\mathbf{j}^e_{\text{пр}} \times \mathbf{H}. \tag{15}$$

Именно эта формула и приводится Максвеллом в п. 642—644. Обобщение состоит в замене $\mathbf{j}^e_{\text{пр}} \to \mathbf{j}^e_{\text{пр}} + \mathbf{j}^e_{\text{см}}$. Таким образом, уравнение (22) п. 644 подтверждает итоговое уравнение (C).

Однако в переменных полях соотношение (15) следует сложить с двойственным ему соотношением для электрической части тензора напряжений

$$\operatorname{div} \overleftrightarrow{T}^e = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} = \rho^e \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad (16)$$

и в результате взамен максвелловской формулы (C) получить выражение (12).

Конечно, с помощью современного оперативного формализма, следуя Хевисайду, восстановление дуальной симметрии в выражении для силы (15) и (16) выглядит почти как очевидное. Но следует напомнить, что в «Трактате» вопрос о симметрии не обсуждался в столь общей постановке и, более того, его выяснение было отчасти затруднено отсутствием выписанного в явном виде уравнения (2). Вполне возможно, что это было причиной ненаписания последнего члена в (12) и (16).

Заметим в конце, что мы ограничились здесь комментированием только основных уравнений в их «итоговом» приведении (A) — (γ). Однако в тексте «Трактата» имеется несколько важных разбросанных замечаний, позволивших впоследствии обобщить эти уравнения на случай движущихся сред при наличии конвективных токов и т. д.

6. Незавершенность

Когда выстраивается новая система взглядов, охватывающая все явления ранее считавшиеся независимыми, разрозненными, как-то несправедливо говорить о незавершенности монографии, где впервые дано последовательное изложение основ теории и где не только установлены ее общие уравнения, но и приоткрыты тайны «феномена осенения» — скачка мысли в направлении, показавшемся сначала просто правильным, а потом оказавшемся единственно правильным. И все же в отличие от «Начал» Ньютона — а максвелловский «Трактат» может быть отнесен по некоторым критериям к следующей за ними вехе в истории познания мира (заметим, кстати, что по-латыни они не «Начала», а «Принципы», т. е. главные положения) — в «Трактате» нет такого широкого панорамного разворота применений найденных уравнений. Максвелл прожил недолгую жизнь (1831—1879) и до самой кончины, даже в последней болезни продолжал работать над «Трактатом», так что при других, более благоприятных, стечениях обстоятельств мы могли бы унаследовать от него второе издание «Трактата», как принято сейчас писать, полностью переработанное и улучшенное. Он, конечно же, не успел воспользоваться всеми плодами своих уравнений и в продвижении по «дедуктивному спуску» ограничился лишь некоторыми демонстрациями. Но это были впечатляющие примеры.

Прежде всего, уравнениям подчинились все законы электростатических, магнитостатических, стационарно-токовых и квазистационарных полей и стало возможным понять точность соответствующих приближений. Далее, Максвелл извлек из найденных им уравнений несомненно наиболее представительное решение для произвольно быстрого изменения полей во времени и пространстве — плоские электромагнитные волны в однородной среде, распространяющиеся со

скоростью света и способные переносить энергию и импульс. Это был Триумф Великого Объединения — электричества, магнетизма и оптики, предсказанного еще Фарадеем. И, как мы понимаем теперь, гакие решения можно воспринимать как фундаментальные: их суперпозиция (в линейном случае) дает любое распределение поля, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, так что в известном смысле оба описания — через уравнения или через совокупность фундаментальных решений — эквивалентны. Наконец, Максвелл наметил схему объяснения «воздействия магнетизма на свет», т. е. фарадеевского эффекта вращения плоскости поляризации в замагниченной среде — прообраза будущих параметрических и нелинейных электромагнитных эффектов.

Среди максвелловедов (людей, изучающих не только особенности творения, но и свойства Творца) бытует несколько очевидных «эвристических недоумений» типа «странно, что Максвелл не обратил внимание на...». И ведь действительно странно, что он, получив электромагнитную волну для свободного значения частоты, ограничился только оптическими приложениями, ни словом не упомянув о возможности существования электромагнитных волн в более низкочастотных диапазонах. По-видимому, и не нужно искать всему этому каких-либо особых объяснений. Прошло более 115 лет со времени выхода первого издания «Трактата», а исследования содержательности максвелловских уравнений не ослабевают. Максвеллу удалось проникнуть в одну из самых емких сокровищниц Природы, оценить масштабы богатств которой люди смогли только за несколько поколений. Освоить их одному смертному, даже такому великому и радивому, как Максвелл, было не по силам; тем более еще не спало «волнение достижения» и еще оставалась известная неуверенность в исчерпывающей полноте найденных законов.

Поэтому если и имеет смысл обсуждать какую-то незавершенность «Трактата», то только в узком смысле, рабочую незавершенность, касающуюся некоторых вопросов, которые Максвелл по характеру предшествующего материала, казалось, должен был затронуть и замкнуть. Выше указывалось на них. Так, сходство структур электростатических и магнитостатических полей позволило Максвеллу подробнейшим образом проследить, как сопоставляются их математические описания и тем самым установить статический вариант принципа двойственности (иногда говорят, перестановочной двойственности, чтобы отойти от терминологического совпадения с дифракционным принципом Бабине). Естественно было бы завершить это сопоставление формулировкой общего принципа, что относительно быстро и случилось потом (Хевисайд, 1885—1891 гг.), но, понятно, что это произошло лишь после «восстановления» уравнения (2).

Вторая рабочая незаконченность относится к законам сохранения энергии, импульса и момента импульса. И здесь Маквелл еще в статических разделах «Трактата» отрабатывает многие тонкие моменты, связанные с этими понятиями, опираясь на них потом в обобщениях на быстропеременные поля, но все же последний шаг остался не сделанным, хотя математически любые законы сохранения могли быть сформулированы по типу уравнения непрерывности ($\operatorname{div} \mathbf{u}\rho + (\partial\rho/\partial t) = 0$), так всесторонне (и модельно, и отвлеченно) разработанному в «Трактате» на примере закона сохранения электрического (7) и магнитного (10) зарядов.

Наконец, несколько слов о полях и потенциалах. Максвелл тщательно продумывал измерительную (метрологическую) сторону вопроса, связанного с введением электромагнитных полей (см. Предварительную главу), и мог высказаться по этому поводу в главах X и XI части IV после обсуждения уравнения электродинамики. Недаром же у него уравнение (C) для механической силы записано через поля, а не через потенциалы. Таким образом, он должен был выйти на утверждение об измеримости полей и вспомогательности потенциалов в общем случае, тем более что опять же в статике и квазистатике эти моменты им не были опущены.

Возможно, что к перечню сему можно присоединить еще несколько обоснованных домыслов, например, об описаниях полей в движущихся системах отсчета, об обобщениях материальных уравнений и т. п. Однако и без того эти рассуждения выглядят несколько спекулятивно, т. е. основываются скорее не на доводах, а на отсутствии контрдоводов.

И все же особого замечания заслуживает вопрос об инвариантности уравнений относительно преобразований координат и времени. Максвелл был первым человеком, который придал установленным им законам Природы релятивистски инвариантный облик; однако он не акцентировал свое достижение, предоставив это сделать впоследствии другим (Фитцжеральд, Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн). Вообще говоря, преобразования, которые мы называем лоренцовыми, могли бы быть написаны еще в XVIII в. при изучении одномерного волнового уравнения (уравнения струны, например), но они наверняка рассматривались бы тогда, как некое забавное, чисто формальное, свойство уравнения.

Поскольку максвелловские уравнения тоже приводят к волновым уравнениям для полей (или для потенциалов), то они в этом ограниченном смысле не дают фактического продвижения. Оно наступило после понимания того, что законы природы должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т. е. после упрочения убежденности в справедливости принципа относительности. И максвелловской электродинамике «повезло» в том смысле, что электродинамическая постоянная, совпавшая со скоростью света в вакууме, оказалась элитарно выделенной, предельно возможной среди всех других скоростей движения тел, и тем самым волновое уравнение для электромагнитных полей в вакууме тоже обрело свойство элитарной уникальности.

Этим замечанием мы решаем закончить Послесловие. В конце списка цитированной литературы приведен систематизированный перечень некоторых известных нам монографий по максвелловской электродинамике на русском языке, где в той или иной степени восполнены еще и образовательные функции.

Перевод I тома «Трактата» выполнен И. Л. Бурштейном и Б. М. Болотовским, второго тома, а также Введения, Предварительной главы и вспомогательных материалов — М. А. Миллером и Е. В. Суворовым. Большую помощь в просмотре и подготовке рукописи оказала С. Д. Жерносек. Общее редактирование «Трактата» осуществлено М. Л. Левиным, М. А. Миллером и Е. В. Суворовым. В процессе работы весьма полезными были советы В. С. Багоцкого.

ЛИТЕРАТУРА *

1. *Левин М. Л., Миллер М. А.* Максвелловский Трактат об электричестве и магнетизме // УФН. 1981. Т. 135, вып. 3.
2. *Wise M. N.* The Maxwell literature and British dynamic theory. Reviews and Bibl. Essays // Historical Study in Phys. Science. 1982. Vol. 13, part 1. P. 175—205.
3. *Максвелл Дж. Клерк.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля/Под ред. П. С. Кудрявцева. М.: Гостехиздат, 1950.
4. Из предыстории радио: Сборник оригинальных статей и материалов/Сост. С. М. Рытов, под ред. Л. И. Мандельштама. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Вып. 1.
5. *Фарадей М.* Экспериментальные исследования по электричеству/Под ред. Т. П. Кравца. М.: Изд-во АН СССР, 1947—1959. Т. 1—3.
6. *Фейнберг Е. Л.* Перевод и культура// Природа. 1958. № 8.
7. The Scientific paper of James Clerc Maxwell/Ed. W. D. Niven. London — Dover, 1890.
8. *Пуанкаре А.* Теория Максвелла и герцовы колебания. СПб., 1900.
9. *Болотовский Б. М.* Оливер Хевисайд. М.: Наука, 1985.
10. *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П.* Кватернионы // Квант. 1983. № 9.
11. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.
12. *Раман П.* Теория поля. М.: Мир, 1984.
13. *Игнатов А. М., Рухадзе А. А.* О неоднозначности определения магнитной проницаемости материальных сред // УФН. 1981. Т. 135, вып. 1.
14. *Коулмен С.* Магнитный монополь пятьдесят лет спустя // УФН, 1984. Т. 144, вып. 2.
15. Максвелл и развитие физики XIX—XX веков. Сб. статей/Под ред. Л. С. Полака. М.: Наука, 1985.

---

* Литература 1—15 цитирована в Послесловии.— *Примеч. ред.*

МОНОГРАФИИ ПО МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

1. *Лорентц Г. А.* Теория электромагнитного поля. М.: Гостехиздат, 1933.
2. *Лорентц Г. А.* Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. М.: Гостехиздат, 1956.
3. *Абрагам М., Беккер Р.* Введение в теорию электричества Максвелла.// Теория электричества. М.: Гостехиздат, 1939.
4. *Беккер Р.* Электронная теория // Теория электричества. М.: Гостехиздат, 1941. Т. II.
5. *Планк М.* Теория электричества и магнетизма // Введение в теоретическую физику. М.: ГТТИ, 1933. Ч. III.
6. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.
7. *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948.
8. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.
9. *Поль Р. В.* Учение об электричестве. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Электричество и магнетизм. Физика сплошных сред // Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. Т. 5—7,
11. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм// Берклеевский курс физики. М.: Наука, 1983. Т. II.
12. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
13. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963.
14. *Рамо С., Уиннери Дж.* Поля и волны в современной радиотехнике. М.: Гостехиздат, 1950.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Электродинамика сплошных сред// Теоретическая физика. М.: Наука, 1973. Т. II; 1982. Т. VIII.
16. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
17. *Власов А. А.* Макроскопическая электродинамика. М.: Гостехиздат, 1955.
18. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. Второе изд. М.: Радио и связь, 1988.
19. *Семенов А. А.* Теория электромагнитных волн. М.. Изд-во МГУ, 1962.
20. *Говорков В. А.* Электрические и магнитные поля. М.: Госэнергоиздат, 1960.
21. *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля. М.: Высш. шк., 1964.
22. *Федоров Н. Н.* Основы электродинамики. М.: Высш. шк., 1965.
23. *Каценененбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966.
24. *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971.
25. *Вольман В. И., Пименов Ю. З.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1971.
26. *Баскаков С. И.* Основы электродинамики. М.: Сов. радио, 1973.
27. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973.
28. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля. М.: Гостехиздат, 1951.
29. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
30. *Ампер А. М.* Электродинамика. Сб. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
31. де *Гроот С. Р., Сатторп Л. Г.* Электродинамика. М.: Наука, 1982.
32. *Тонелла М. А.* Основы электромагнетизма и теория относительности. М.: ИЛ, 1962.
33. *Новаку В.* Введение в электродинамику. М.: ИЛ, 1963.
34. *Скиллинг Г. Г.* Введение в теорию электромагнитных волн. М.: Связьиздат, 1947.
35. *Френкель И. Я.* Электродинамика: (Общая теория) // Собр. избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1.
36. *Савельев И. В.* Механика. Электродинамика // Основы теоретической физики. М.: Наука, 1975. Т. 1.
37. *Семенов А. А.* Введение в электродинамику излучающих систем. М.: Изд-во МГУ, 1963.
38. *Марков Г. Т.* и др. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Сов. радио, 1979.

39. *Матвеев А. Н.* Электродинамика. М.: Высш. шк., 1980.
40. *Матвеев А. Н.* Электродинамика и теория относительности. М.: Высш. шк., 1964.
41. *Хайкин С. Э.* Электромагнитные колебания и волны. М.: Госэнергоиздат, 1959.
42. *Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А.* Электродинамика. М.: Наука, 1978.
43. *Семенов Н. А.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973.
44. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. М.: Высш. шк., 1980.
45. *Кузнецов Б. Г.* Эволюция основных идей электродинамики. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
46. *Поливанов К. М.* Электродинамика движущихся тел. М.: Энергоиздат, 1982.
47. *Иродов И. Е.* Основные законы электромагнетизма. М.: Высш. шк., 1983.
48. *Красюк Н. П., Дымовин Н. Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высш. шк., 1974.
49. *Туров Е. А.* Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983.
50. *Покрсвский С. И.* Электричество и магнетизм. М.: ГТТИ, 1933. Ч. I.; 1935. Ч. II.
51. *Стражев В. И., Томильчик Л. М.* Электродинамика с магнитным зарядом // Наука и техника, 1975.
52. *Дучков В. М.* Электродинамика: История и методология макроскопической электродинамики. М.: Высш. шк. 1975.
53. Вычислительные методы в электродинамике/Под ред. Р. Митры. Мир, 1977.
54. *Фрадкина Э. М.* Лекции по курсу «Теория Максвелла и электромагнитные волны». М.: МАИ, 1971.
55. *Фредерикс В. К.* Электродинамика и введение в теорию света. Л. Кубуч, 1934.
56. *Рудаков В. Н.* Теория электромагнитного поля. (в III ч.). Л.: Электротехн. ин-т им. В. И. Ульянова (Ленина), 1971.
57. *Фальковский О. И.* Техническая электродинамика. М. Связь, 1978.
58. *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: Физматгиз, 1958.
59. *Медведев В. В.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977.
60. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985.
61. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений Максвелла. Киев: Наук. думка, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Содержание 7

ЧАСТЬ III

МАГНЕТИЗМ

Глава I. Элементарная теория магнетизма 23
Глава II. Магнитная сила и магнитная индукция 39
Глава III. Магнитные соленоиды и магнитные оболочки 47
Глава IV. Индуцированная намагниченность 57
Глава V. Частные задачи магнитной индукции 67
Глава VI. Веберовская теория индуцированного магнетизма 82
Глава VII. Магнитные измерения 93
Глава VIII. О земном магнетизме 119

ЧАСТЬ IV

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Глава I. Электромагнитная сила 126
Глава II. Исследования Ампера по взаимодействию электрических токов 139
Глава III. Об индукции электрических токов 153
Глава IV. О самоиндукции тока 167
Глава V. Об уравнениях движения систем со связями 170
Глава VI. Динамическая теория электромагнетизма 179
Глава VII. Теория электрических контуров 188
Глава VIII. Исследование поля с помощью вторичного контура . . . 191
Глава IX. Общие уравнения электромагнитного поля 205
Глава X. Размерности электрических единиц 215
Глава XI. Об энергии и напряжении в электромагнитном поле . . . 221
Глава XII. Токовые листы 231
Глава XIII. Параллельные токи 254
Глава XIV. Круговые токи 265
Глава XV. Электромагнитные приборы 278
Глава XVI. Электромагнитные измерения 295
Глава XVII. Сравнение катушек 309
Глава XVIII. Электромагнитная единица сопротивления 314

Глава XIX. Сравнение электростатических единиц с электромагнитными 323
Глава XX. Электромагнитная теория света 334
Глава XXI. Магнитное действие на свет 348
Глава XXII. Объяснение ферромагнетизма и диамагнетизма молекулярными токами 363
Глава XXIII. Теория действия на расстоянии 370
Алфавитный указатель 381
Иллюстрации 388

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Предисловие ко второму изданию 392
Предисловие к третьему изданию 393
II. Комментарии 395
III. Послесловие (редакторов перевода) 403
Литература 432

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ

II

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии
«Классики науки»

Редактор издательства Г. Г. Гуськов
Художественный редактор М. Л. Храмцов
Технические редакторы М. Ю. Соловьева, Л. И. Куприянова
Корректоры Н. Б. Габасова, Л. А. Стойкина

ИБ № 39868

Сдано в набор 17.11.88.
Подписано к печати 15.05.89.
Формат 70×90¹/₁₆
Бумага типографская № 2
Гарнитура литературная
Печать высокая
Усл. печ. л. 34. Усл. кр.-отт. 33,64. Уч.-изд. л. 32,6
Тираж 3100 экз. Заказ 3683
Цена 3 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Набрано в ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первой Образцовой типографии»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6



В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ

«НАУКА»

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Фаминцин А. С.

ОБМЕН ВЕЩЕСТВ И ПРЕВРАЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ
В РАСТЕНИЯХ

57 л. 10 р. 20 к.

Становление физиологии растений в нашей стране связано с деятельностью А. С. Фаминцина (1835—1918). Книга ученого — первая монография по физиологии растений, вышедшая в 1883 г. С нее начинаются отечественная физиология и биохимия растений. Она вошла в историю науки как классический образец обобщения чрезвычайно сложного материала на важном, переломном этапе развития биологии. Основная идея монографии — единство биохимических процессов растительного и животного мира.

Издание рассчитано на физиологов, биохимиков, историков науки.

Бернштейн Н. А.

ФИЗИОЛОГИЯ ДВИЖЕНИЙ

43 л. 7 р.

В настоящее издание вошли две основные книги Н. А. Бернштейна: «О построении движений» (1947 г.), удостоенная Государственной премии СССР, и «Очерки по физиологии движений и физиологии активности» (1966 г.), подводящая итог научной работы автора. Трудами Бернштейна начата новая глава в физиологии движений — живой организм рассматривается не как реактивная (только лишь реагирующая на стимулы), а как активная система, стремящаяся к достижению «потребного будущего». Статья академика О. Г. Газенко и профессора И. М. Фейгенберга знакомит читателя с жизненным и творческим путем ученого.

Издание рассчитано на физиологов, психологов, биологов, философов, медиков, инженеров, математиков, специалистов по кибернетике.

УИЛЬЯМ ГАМИЛЬТОН

Избранные труды
Оптика
Механика
Кватернионы

36 л. 4 р.

В сборнике избранных трудов известного английского физика, математика и механика У. Р. Гамильтона (1805—1865) включены его основополагающие труды по геометрической оптике (законы распространения, отражения и преломления света, открытие конической рефракции), физической оптике (открытие различия между групповой и волновой скоростями света), оптико-механической аналогии, аналитической механике (вариационный принцип, гамильтониан и т. д.), теории кватернионов (гиперкомплексные числа, исчисление векторов и т. д.). Многие работы переведены на русский язык впервые. В приложении помещены статьи о жизни и научном творчестве ученого, комментарии, библиография.

Издание рассчитано на физиков, математиков, механиков и историков науки.

ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ КНИГ ПОЧТОЙ ЗАКАЗЫ ПРОСИМ НАПРАВЛЯТЬ ПО АДРЕСУ:

АДРЕСА МАГАЗИНОВ «АКАДЕМКНИГА»:

480091 АЛМА-АТА, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»);
370001 БАКУ, ул. Коммунистическая, 51 («Книга — почтой»);
232600 ВИЛЬНЮС, ул. Университето, 4;
690088 ВЛАДИВОСТОК, Океанский проспект, 140 («Книга — почтой»);
320093 ДНЕПРОПЕТРОВСК, проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
734001 ДУШАНБЕ, проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»);
375002 ЕРЕВАН, ул. Туманяна, 31;
664033 ИРКУТСК, ул. Лермонтова, 289 («Книга — почтой»);
420043 КАЗАНЬ, ул. Достоевского, 53 («Книга — почтой»);
252030 КИЕВ, ул. Ленина, 42;
252142 КИЕВ, проспект Вернадского, 79;
252030 КИЕВ, ул. Пирогова, 2;
252030 КИЕВ, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»);
277012 КИШИНЕВ, проспект Ленина, 148 («Книга — почтой»);
343900 КРАМАТОРСК, Донецкой обл., ул. Марата, 1 («Книга — почтой»);
660049 КРАСНОЯРСК, проспект Мира, 84;
443002 КУЙБЫШЕВ, проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»);
191104 ЛЕНИНГРАД, Литейный проспект, 57;
199164 ЛЕНИНГРАД, Таможенный пер., 2;
196034 ЛЕНИНГРАД, В/О, 9 линия, 16;
197345 ЛЕНИНГРАД, Петрозаводская ул., 7 («Книга — почтой»);
194064 ЛЕНИНГРАД, Тихорецкий проспект, 4;
220012 МИНСК, Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»);
103009 МОСКВА, ул. Горького, 19а;
117312 МОСКВА, ул. Вавилова, 55/7;
117192 МОСКВА, Мичуринский проспект, 12 («Книга — почтой»);

630076 НОВОСИБИРСК, Красный проспект, 51;
630090 НОВОСИБИРСК, Морской проспект, 22 («Книга — почтой»);
142284 ПРОТВИНО Московской обл., ул. Победы, 8;
142292 ПУЩИНО Московской обл., МР, «В», 1 («Книга — почтой»)
620151 СВЕРДЛОВСК, ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»);
700000 ТАШКЕНТ, ул. Ю. Фучика, 1;
700029 ТАШКЕНТ, ул. Ленина, 73;
700070 ТАШКЕНТ, ул. Шота Руставели, 43;
700185 ТАШКЕНТ, ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»);
634050 ТОМСК, наб. реки Ушайки, 18;
634050 ТОМСК, Академический проспект, 5;
450059 УФА, ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»);
450025 УФА, ул. Коммунистическая, 49;
720000 ФРУНЗЕ, бульвар Дзержинского, 42 («Книга — почтой»);
310078 ХАРЬКОВ, ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»).